SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

Acad. NICOLAE TEODORESCU
VALERIU MANGU
ADRIAN NEGRU
CONSTANTIN CĂRBUNARU
MIRCEA TRIFU

8

# culegere de probleme

## în sprijinul candidaţilor care se pregătesc pentru admiterea în treapta a II-a de liceu şi olimpiade

partea I

### STRATEGII ŞI ALGORITMI DE REZOLVARE

- rezolvări ale problemelor din manuale;
- subiecte date la concursul de admitere în treapta a II-a în anii precedenţi;
- probleme date la olimpiade;
- probleme pregătitoare pentru concursurile de admitere.

Coordonator: Acad. NICOLAE TEODORESCU

BUCUREŞTI

Acad. NICOLAE TEODORESCU

VALERIU MANGU
CONSTANTIN CĂRBUNARU

ADRIAN NEGRU
MIRCEA TRIFU

# Matematica în gimnaziu și liceu, vol. I:
# CULEGERE DE PROBLEME

## Partea I

Coordonator: Acad. NICOLAE TEODORESCU

*Tipografilor Întreprinderii Poligrafice „Informația" care, printr-o uriașă mobilizare și o înaltă conștiință a muncii, au asigurat într-un timp record apariția acestei lucrări așteptată de generația celor 500 000 de viitori candidați la concursul de admitere în treapta a II-a de liceu*

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

**Acad. NICOLAE TEODORESCU**

**VALERIU MANGU** **ADRIAN NEGRU**

**CONSTANTIN CĂRBUNARU** **MIRCEA TRIFU**

MATEMATICA
în gimnaziu şi liceu, vol. I

8

# CULEGERE DE PROBLEME

## în sprijinul candidaţilor care se pregătesc pentru admiterea în treapta a II-a de liceu şi olimpiade

**Partea I**

**STRATEGII ŞI ALGORITMI DE REZOLVARE**

- **rezolvări ale problemelor din manuale;**
- **subiecte date la concursul de admitere în treapta a II-a în anii precedenţi;**
- **probleme date la olimpiade;**
- **probleme pregătitoare pentru concursurile de admitere.**

Coordonare: Acad. NICOLAE TEODORESCU

B U C U R E Ş T I

*Lucrarea face parte din planul de tipărituri*
*al Ministerului Educației și Învățămîntului,*
*tipărirea fiind avizată de către Consiliul Culturii și Educației Socialiste*

Referenți:
prof: **Laurențiu Gîrbă**
prof: **Elena Pogorevici**

## PREFAȚĂ

Concursurile, în general, constituie preocupări dintre cele mai îngrijorătoare pentru toți cei ce se angajează în ele. Concursurile de matematică, în special, prezintă dificultăți considerabile chiar pentru cei mai bine pregătiți dintre concurenți, fiindcă implică rezolvarea unui număr de probleme, care pot cuprinde întrebări neașteptate, pot cere cunoașterea unor metode ingenioase, sau folosirea unor tehnici neobișnuite pentru cine nu are un antrenament deosebit, care nu se capătă decît cu eforturi și perseverență. De aceea, culegerile de probleme stîrnesc totdeauna un interes deosebit în rîndul concurenților, care se grăbesc să le caute cu înfrigurare prin librării, în toate centrele de învățămînt din țară.

O importanță covîrșitoare o au concursurile de admitere în treapta a II-a de liceu, care au devenit în ultimii ani grele pentru majoritatea elevilor ce vor să urmeze în continuare cursurile liceale, după absolvirea treptei întîi. De aceea culegerile de tot felul, care își iau sarcina să pună la dispoziția acestora enunțurile și mai ales soluțiile problemelor date la aceste concursuri, sînt solicitate de sute de mii de viitori concurenți, chiar dacă apar în tiraje impresionante, chiar dacă autorii acestor culegeri nu urmăresc în mod deliberat să prezinte soluțiile cele mai instructive, să atragă atenția asupra dificultăților și căilor de a le învinge.

Într-o măsură mai redusă, fiindcă nu antrenează un număr atît de mare de concurenți, sînt soluțiile din culegerile de probleme pregătitoare pentru olimpiadele naționale și internaționale, dar și în acest domeniu cerințele sînt numeroase.

Societatea de Științe Matematice din Republica Socialistă România analizînd situația și necesitățile elevilor în calitate de concurenți și ale profesorilor, care își iau sarcina nobilă de a-i pregăti, în clase, în cercuri, în laboratoarele de matematică, și dînd curs numeroaselor solicitări primite din multe centre de învățămînt, a hotărît să publice în cadrul Bibliotecii SSM, o a opta lucrare intitulată „Culegere de probleme în sprijinul candidaților care se pregătesc pentru admiterea în treapta a II-a de liceu și olimpiade”.

Pornind de la recunoașterea faptului că metodologii de rezolvare a problemelor de matematică nu există, cel puțin după cunoașterea noastră, această lucrare își propune să aibă obiective metodologice, deci să orienteze pe cititori în strategiile și algoritmii de rezolvare, care apar în astfel de probleme, folosind experiența autorilor în calitatea pe care au avut-o în diversele comisii de concursuri, ca și de foști concurenți. În acest mod, sprijinul pe care culegerea își propune să-l dea cititorilor, are și un factor de apropiere între cei ce propun și cei ce trebuie să rezolve probleme.

Culegerea este împărțită în două părți, avînd în vedere amploarea conținutului ei, care ocupă 800 pagini. În prima parte se vor găsi trei capitole consacrate succesiv algebrei, aritmeticii și teoriei numerelor și combinatoricii. Partea a doua va cuprinde geometria plană și în spațiu, precum și enunțuri de probleme date la olimpiadele noastre în fazele județeană și finală, completate cu probleme de baraje pentru selecționarea concurenților la olimpiadele internaționale, precum și probleme date de olimpiadele internaționale. Multe dintre acestea sînt rezolvate în capitolele anterioare.

Fiecare capitol este precedat de o introducere cu caracter istoric și metodologic în care cititorul este purtat de-a lungul veacurilor de dezvoltare a disciplinei respective, cu semnalarea descoperirilor care s-au transmis pînă în zilele noastre și care, opere ale marilor înaintași, își găsesc locul în programele analitice și în manualele învățămîntului nostru gimnazial și liceal .De asemenea, se face o trecere în revistă fugitivă a problemelor celor mai semnificative din capitolul respectiv cu comentarii de ordin metodologic.

Multe dintre probleme sînt luate din manuale și sînt prezentate cu soluții complete, uneori cu două sau trei soluții. Nu s-a considerat profitabilă separarea problemelor în cadrul aceluiași capitol pe categorii de utilitate (manuale, cercuri, treaptă, olimpiade etc.) ci prezentarea diverselor metode, instrumente, strategii cu indicație la fiecare problemă a utilității ei principale.

Pentru orientarea cititorilor s-a prevăzut o codificare menționată o dată cu numărul problemei în capitolul respectiv, de exemplu I.7.8$^{M}$ care înseamnă că este problema 8 din capitolul I, paragraful 7, al cărei enunț se află în manual. Vom avea deci : M = problemă din manual; T = problemă dată la concursul de admitere în treapta a II-a ; PT = problemă pregătitoare pentru admiterea în treapta a II-a; PO = problemă pregătitoare pentru olimpiade.

Un indice de nume va încheia lucrarea și va cuprinde nume de autori de probleme, acolo unde identificarea a fost posibilă direct, ediții de manuale pentru probleme extrase și rezolvate, monografii, tratate, culegeri, reviste de specialitate ca surse bibliografice, fără posibilitatea de a realiza o citare completă, dar cu dorința de a menționa pe cît posibil sursele de enunțuri și chiar de autori ai unor soluții, deși în marea majoritate acestea au fost prelucrate de colectivul redacțional.

Deși culegerea nu este destinată cercetătorilor, ea conține numeroase probleme de prestigiu extrase din lucrări ale unor personalități celebre, care au edificat matematica de-a lungul glorioasei ei evoluții, astfel încît ea poate stimula creativitatea acelora dintre cititori care sînt atrași în mod deosebit de dorința de a adînci tezaurul nepieritor al acestei științe. Eforturile făcute de SSM pentru a realiza într-un timp extrem de scurt o lucrare de această amploare vor fi răsplătite dacă, așa cum doresc autorii, ea va aduce servicii cititorilor, în primul rînd celor ce au de înfruntat concursurile de treaptă și competițiile atît de pline de neprevăzut ale olimpiadelor.

**Acad.** NICOLAE TEODORESCU

# Capitolul I

# ALGEBRA

## 1. Începuturile algebrei. Algebra antichității. Algebra arabă

Dezvoltarea algebrei de-a lungul mileniilor a urmat un drum ascendent, pornind de la nevoile practicii într-o simbioză organică, ce s-a dovedit fertilă cu aritmetica și geometria, de care s-a desprins mult mai tîrziu, fără a se rupe definitiv niciodată.

Este deosebit de instructiv de urmărit sintezele care au condus la formarea algebrei ca disciplină autonomă și de pus în lumină elementele care au intrat în aceste simbioze. De exemplu, conceptul de *zero* n-a existat la egipteni, dar babilonienii l-au introdus notîndu-l printr-un semn special, tîrziu, în secolul III î.e.n., în epoca seleucizilor și numai în texte astronomice. Ar fi greu să desprindem operațiile algebrice de cele aritmetice la egipteni, dar babilonienii, deși nu cunoșteau simbolismul algebrei moderne, au practicat cu succes gîndirea algebrică. În tabletele lor sînt enunțuri de probleme de același tip sau de tipuri apropiate, care ne îndeamnă să le considerăm ca integrate într-o aceeași categorie, cu scopuri didactice, de a pune în lumină algoritmi de rezolvare, ceea ce constituie preocupări teoretice deliberate. Este remarcabil accentul pus pe indicarea operațiilor ce trebuie efectuate și pe darea răspunsului spre verificare.

Necesitatea tratării operațiilor aritmetice în sine fără a se urmări valorile numerice și proprietățile particulare ale numerelor în parte a marcat deci o separare operațională în cadrul aritmeticii, separare care trebuia să conducă la algebră.

Grecii antici au urmărit și ei acest obiectiv, aplicînd spiritul lor geometric prin reprezentări ale numerelor. Numerele figurative, cultivate cu pasiune de școala pitagoreică reprezintă un pas important spre simbolismul algebric, dar în același timp evidențiază tendința lor spre modelarea geometrică pe care o vom găsi concretizată în *algebra geometrică* a construcțiilor cu rigla și compasul, care sînt algoritmi cu caracter algebric modelatori geometrici ai operațiilor de rezolvare a ecuațiilor de gradele I și II.

Numele algebrei se formează mai tîrziu în școala matematică arabă, fiind legat de operația „al-jabr" de trecere a unui termen dintr-un membru al unei ecuații în celălalt. Împreună cu „al-muqābāla", operație de reducere a doi termeni egali din cei doi membri, ea forma sistemul de operații fundamentale de rezolvare a ecuațiilor de gradul I și II. Avem deci aici un fel de *axiomatizare* a operațiilor de rezolvare și acest fapt remarcabil explică de ce primul tratat de algebră este opera lui Al-Horezmi, în secolul VIII și este intitulat *Scurt tratat despre calculul lui al-jabr și al lui al-muqābāla*. De aici și numele de algebră, transmis cu fidelitate științei europene, care simțea că acest calcul era fondul prețios al unei discipline, în care ei au găsit rudimente de *expresii algebrice* din care se va concretiza mai tîrziu calculul algebric.

Păstrarea și fructificarea moștenirilor trecutului a fost un principiu fecund la arabi, care reluînd probleme ca duplicarea cubului sau trisecțiunea unghiurilor, insolubile prin algebra geometrică greacă, au dezvoltat în algebra islamică rezolvarea ecuațiilor algebrice de gradele III și IV cu coeficienți numerici sau chiar literali. Astfel, ei au *modelat algebric* probleme ale algebrei geometrice cum ar fi construcția poligoanelor regulate cu 7 sau 9 laturi, trisecțiunea unghiurilor sau reflexia unei raze de lumină pe o oglindă cilindrică pentru a ajunge în ochiul observatorului cînd pornește dintr-o sursă punctuală dată.

Putem atribui celebrului poet și matematician *Omar Khayyam* titlul de întemeietor al algebrei prin tratatul său din 1074, intitulat *Demonstrarea problemelor de al-jabr și de al-muqābāla*. El definește algebra ca disciplină autonomă avînd ca obiect numărul sau cantitatea necunoscută dintr-o relație a acestora cu alte numere sau cantități cunoscute. Astfel algebra se constituie inițial ca disciplină consacrată rezolvării ecuațiilor algebrice și va păstra acest cadru pînă în secolul al XIX-lea, deși acumulări cantitative de operații, operatori și expresii au întregit, extins și îmbogățit uimitor aria și conținutul *calculului algebric*.

## 2. Teoria ecuațiilor algebrice și calculul algebric

Nume glorioase ca cele ale lui *Chuquet*, *Rudolff*, *Cardano*, *Tartaglia Maurolico*, *Viète*, *Stevin*, *Descartes*, *Newton*, *Euler*, *D'Alembert*, *Lagrange*, *Rolle* au cultivat cu strălucire teoria ecuațiilor algebrice, introducînd pe rînd rădăcinile negative, apoi pe cele imaginare în structura acestei teorii și încercînd rezolvarea algebrică, prin radicali a ecuațiilor de gradele III, IV și așa mai departe. Faptul că la gradele III și IV ingeniozitatea și eforturile lor au fost răsplătite i-a îndîrjit în căutarea metodelor de rezolvare și pentru ecuațiile de grade superioare lui patru, însă fără succes.

Între timp, rezolvarea numerică, precum și depistarea și separarea rădăcinilor reale a introdus analiza matematică în studiul ecuațiilor algebrice, ceea ce constituie încă o dovadă de necesitatea unei simbioze între disciplinele matematice.

O altă problemă, pe care numai secolul al XVIII-lea a ajuns s-o formuleze a fost existența și numărul rădăcinilor unei ecuații de gradul $n$. *D'Alembert* a enunțat-o și a crezut că a și demonstrat-o, *Euler* și *Lagrange* de asemenea, dar i-a fost rezervat lui *Gauss* în pragul secolului al XIX-lea să dea o demonstrație riguroasă acestei teoreme fundamentale a algebrei prin care se stabilește că orice ecuație algebrică de gradul $n$ are exact $n$ rădăcini reale sau complexe, dacă ținem seamă și de ordinul de multiplicitate a unor rădăcini.

A fost un eveniment crucial fiindcă a impus un nou nivel de exigență în întreaga matematică: *rigoarea demonstrațiilor*. O astfel de exigență impune și analiza fundamentală și a instrumentelor folosite în edificarea unei teorii. Secolului al XIX-lea îi revine meritul de a descoperi aceste exigențe și de a le cultiva îndreptînd matematica spre o nouă fundamentare și spre formulări, punînd în lumină cerințele și virtuțile simbolismelor matematice.

Algebra, așa cum s-a filtrat prin cerințele problemelor pe care și le-a pus sau i s-au pus, este organic construită pe operații, deci are un caracter operațional esențial. De-a lungul secolelor ea a acumulat algoritmi de calcul, fără a-și pune întrebarea dacă îi sînt specifici sau nu. *Calculul algebric*, deși n-a fost decît un arsenal pentru cucerirea redutelor teoriei ecuațiilor algebrice a căpătat armamente din ce în ce mai perfecționate, care s-au impus prin ele însele și au devenit repede utile și utilizate și în alte discipline ale matematicii.

După ce s-a ajuns la folosirea unor notații, care au eliminat „algebra retorică" și apoi au perfecționat „algebra sincopată", calculul algebric a început să se edifice pe baza unor operații cu simboluri, construind expresii și rezolvînd ecuații prin soluții scrise cu ajutorul unor astfel de expresii, de exemplu compuse din radicali și operatori elementari ai aritmeticii.

Secolul al XVIII-lea a adus ca zestre *numărul complex*, cu calculul său propriu, dar analog celui cu numere reale, de asemenea, a pus în joc *determinantul*, ca rezultat al unor operații ce vor fi formalizate în secolul al XIX-lea prin *matrice*.

Caracterul algoritmic al algebrei a determinat la începutul secolului al XVII-lea descoperirea *logaritmilor*. *Neper* i-a introdus comparînd progresiile aritmetică și geometrică urmărind ușurarea calculelor trigonometrice și în general transformarea produselor în sume, a cîturilor în diferențe etc. În secolul al XVIII-lea *Euler* extinde noțiunea de logaritm la orice număr real sau complex. *Analiza combinatorie* este de asemenea o cucerire a secolului al XVII-lea în care *Fermat*, *Pascal* și *Newton* aduc contribuții valabile și astăzi. Trigonometria a beneficiat de crearea numerelor complexe prin formula lui *Cotes*, din care *de Moivre* deduce formula sa de ridicare la puteri întregi a numerelor complexe, iar *Euler* exprimă exponențiala imaginară $e^{x} = \cos x + i \sin x$, precum și $\sin x$ și $\cos x$ prin exponențiale imaginare.

*Algoritmii infiniți*, personificați prin *serii*, *produse infinite* și *fracții continue* au fost amplu dezvoltați formal de *J.Bernoulli*, *Newton*, *Euler*, *Lagrange*, îmbogățind algebra cu operatori prodigioși care se vor integra ulterior în analiza matematică, fiind condiționați de noțiunile de convergență și limită.

## 3. Extensiunea algebrei în secolul al XIX-lea. Fundamentele logice ale matematicii

Secolul al XIX-lea a adus algebrei progrese spectaculoase. Teorema fundamentală a fost demonstrată de *Gauss*, imposibilitatea rezolvării ecuației de gradul cinci prin radicali a fost pusă în lumină de *Abel*, iar *Galois* tranșează definitiv problema rezolvabilității prin radicali a ecuației generale de grad mai mare decît patru, introducînd noțiunea de grup de substituții. Astfel se pun bazele teoriei generale a grupurilor în care *Cauchy*, *Betti*, *Cayley*, *Jordan Sylow*, *Dedekind*, *Hamilton* aduc contribuții fundamental la care se adaugă cele ale lui *Klein* și *Lie*.

Algebra nu mai rămîne limitată la teoria ecuaţiilor algebrice, deşi chiar pentru desăvîrşirea acesteia au fost create instrumente de mare pătrundere ca grupurile sau matricele. *Algebra liniară* îşi are începuturile în calculul matricial care va fi folosit în teoria sistemelor liniare, a determinanţilor şi a cuaternionilor. Teoria formelor şi a invarianţilor se impune în geometria analitică, în teoria numerelor, în teoria ecuaţiilor diferenţiale, iar *Lie* şi *Klein* le pun în legătură cu teoria grupurilor.

Ceea ce este esenţial în evoluţia algebrei în secolul al XIX-lea este lărgirea noţiunii de algebră, prin punerea în lumină a noţiunii de *lege de compoziţie*. Astfel s-a ajuns la conceptul general de algebră, conturîndu-se numeroase tipuri de algebre bazate pe diferite structuri algebrice ca algebra cuaternionică, algebra lineară asociativă, calculul vectorial, algebra booleană etc.

Încă din primul sfert al secolului al XIX-lea, Peacock, Babbage şi Herschel iniţiaseră studiul fundamentelor logice ale matematicii şi al caracterelor abstracte ale operaţiilor algebrice. Astfel, ideea lui *de Morgan* de a prezenta logica sub formă matematică şi de a analiza raţionamentele şi instrumentele matematice în cadrul raţionamentului logic-deductiv a găsit un teren fertil pe care *Boole* l-a cultivat prin crearea logicii simbolice moderne. Sub influenţa sa şi prin folosirea algebrei booleene se încearcă unificarea logicii şi matematicii, ceea ce mai tîrziu încearcă *Peano* şi *Frege*. Astfel, *logica matematică*, deşi încercările de logicizare totală a matematicii nu au reuşit nici în secolul nostru, a devenit indispensabilă ca sprijin preţios al raţionamentelor matematice, pătrunzînd în ultimii ani şi în învăţămînt. Simbolismul logicii matematice are caracter algebric, algebra booleană fiind instrumentul de bază al logicii formale

### 4. Axiomatizarea matematicii. Teoria mulţimilor. Structurile algebrice

Analiza fundamentelor matematicii a condus de-a lungul secolului al XIX-lea la precizarea noţiunilor prin elaborarea de definiţii cît mai dezbărate de termeni intuitivi, ceea ce a condus la acceptarea unui număr mic de termeni ca primitivi şi la introducerea axiomelor ca propoziţii fundamentale, care definesc în contextul lor termenii primitivi prin relaţiile dintre ei, lăsîndu-le o mare libertate în conţinutul semantic. De asemenea, prin analiza logică a demonstraţiilor s-a sistematizat într-o măsură din ce în ce mai riguroasă mersul raţionamentelor de la ipotezele fundamentale la concluzii, evaluîndu-se ipotezele auxiliare necesare în aplicarea tehnicilor specifice diferitelor discipline sau a celor interdisciplinare, cum ar fi reprezentările geometrice, artificiile de calcul, inducţia matematică etc.

Pe această cale s-a ajuns la fundamentarea disciplinelor pe axiome şi s-au pus în lumină axiomele fundamentale, ca şi consecinţele înlocuirii sau eliminării unora dintre ele. Descoperirea geometriilor neeuclidiene, încercările de fundamentare logică a matematicii au condus pe *Hilbert* în ultimul an al secolului la axiomatizarea geometriei euclidiene, care a constituit, împreună cu construcţia geometriilor pe baza invarianţei faţă de transformările unor grupuri de transformări, bazele curentului de axiomatizare şi formalizare a matematicii secolului al XX-lea. Această fundamentare avea nevoie de o bază abstractă de o largă generalitate pentru toate conceptele matematice şi a găsit-o în *teoria mulţimilor* creată de *Cantor* începînd din 1873 şi tontinuîndu-se pînă în 1897.

În această teorie, în care orice reuniune de obiecte de orice natură, caracterizate numai printr-o proprietate comună, pot intra, *apartenenţa* este proprietatea de bază a oricărui *element*, iar echivalenţa a două mulţimi, deci corespondenţa biunivocă între elementele lor, caracterizează *puterea* sau *numărul cardinal* al diverselor categorii de mulţimi.

Teoria mulţimilor, controversată pînă în primele patru decenii ale secolului nostru, a devenit baza restructurării întregii matematici actuale, deşi există destule tendinţe de a se subscitui alte baze, cum ar fi cea a *teoriei categoriilor*.

Întrucît şi învăţămîntul matematic a fost restructurat, prin *modernizări* succesive şi aşezat, mai mult sau mai puţin riguros, pe bazele teoriei mulţimilor, este necesar să punem în evidenţă restructurarea fundamentală a algebrei. Aceasta nu mai înseamnă astăzi ceea ce însemna încă şi în prima jumătate a secolului trecut, *teoria ecuaţiilor algebrice* şi *calculul algebric*. Acest calcul încorpora, aşa cum am menţionat în excursia fugitivă de-a lungul istoriei algebrei, *operaţiile matematice* ale aritmeticii, teoriei numerelor, analizei şi geometriei. Prin analiza fundamentelor lor, aceste operaţii au fost degajate de conţinutul lor specific acestor discipline şi practicii şi s-au constituit în ceea ce denumim în prezent *structuri algebrice*.

Algebra modernă este studiul structurilor algebrice, dar este bine să nu absolutizăm nici această caracterizare prin care s-ar deschide calea unei abstractizări nelimitate şi a unei rupturi periculoase a algebrei de întreg trecutul ei şi de rădăcinile ei, cultivate de-a lungul secolelor, în practică şi în aplicaţiile ei în ştiinţă şi în arte.

Într-adevăr, în concepţia grupului *Bourbaki*, care şi-a luat sarcina epocală de a restructura matematica pe bazele teoriei mulţimilor, pe axiomatică şi pe formalizarea noţiunilor, operaţiilor şi relaţiilor, matematica este teoria structurilor matematice fundamentale : *algebrică, de ordine* şi *topologică*.

O structură matematică se defineşte printr-un sistem de axiome condiţional de anumite restricţii, între care independenţa şi necontradictibilitatea sînt esenţiale.

Structurile algebrice sînt definite prin operaţii pe mulţimi oarecare, prin *legi de compoziţie*. Sînt de menţionat ca indispensabile prin locul şi rolul pe care îl ocupă în întreaga ştiinţă, în tehnică şi în practică, structurile de *grup, corp* şi *inel*.

Ideea de grup este universală şi reflectă invarianţa de care se bucură proprietăţile unor submulţimi ale unei mulţimi, cînd li se aplică anumite operaţii. Noţiunea de grup s-a format în teoria ecuaţiilor, unde intervin grupurile finite, în special cele de permutări şi în geometrie, unde intervin grupurile infinite de transformări. Grupurile se manifestă pretutindeni, în fizică, în chimie, în mecanică, în ştiinţele tehnice şi în consecinţă trebuie să facă parte din cultura matematică generală a oricărui specialist cu studii medii, bineînţeles într-o formulare adecvată şi justificată din plin prin aplicaţii substanţiale. Aceleaşi argumente justifică cunoaşterea şi stăpînirea noţiunilor de corp şi inel, ambele provenite din teoria numerelor şi din algebra clasică.

Algebra liniară a căpătat o dezvoltare uriaşă prin studiul spaţiilor vectoriale, algebra tensorială, algebra exterioară, algebrele necomutative etc., de asemenea.

Această expansiune impresionantă a algebrei, care şi-a pus amprentele pe întreaga matematică modernă, dovedind caracterul interdisciplinar al matematicii, prezintă şi unele aspecte care trebuie luate în seamă pentru a nu absolutiza valoarea de cunoaştere a niciunei discipline.

Evoluţia revoluţiei structurale, determinată de concepţia *Bourbaki*, arată că nu toate construcţiile axiomatice sînt menite să se afirme şi să subziste, ci numai cele care corespund unor necesităţi şi aplicaţii în alte ramuri ale matematicii, ale altor ramuri ale ştiinţei, tehnicii, tehnologiei, practicii sau culturii.

După cum se exprimă J. *Dieudonné* în capitolul II, Algebra şi topologia din volumul IV al *Istoriei generale a ştiinţei* [1] p. 32, „mai puţin decît oricare altă ramură a matematicii, algebra nu-şi poate permite de a fi « gratuită » sub pedeapsa sterilităţii".

### 5. Problematica primului capitol al culegerii

Capitolul I al acestei culegeri, consacrat algebrei, este alcătuit în concordanţă cu ideile exprimate în această introducere metodologică. Într-adevăr, cel care studiază o culegere de probleme nu este un simplu înregistrator al unei serii cît mai voluminoase de reţete de rezolvare de exerciţii şi probleme, cu scopul de a le folosi într-o împrejurare critică provocată de un examen sau un concurs. Din nefericire, mulţi dintre cititorii şi beneficiarii nenumăratelor culegeri de probleme se situează, fie din proprie iniţiativă, fie de nevoie, pe această poziţie de „scapă cine poate".

Metodologia rezolvării problemelor nu se găseşte tratată în manuale, nici în marea majoritate a culegerilor sau revistelor matematice. Problemele se propun, soluţiile se cer sau se oferă în redactări, care nu urmăresc decît atingerea obiectivelor prestabilite prin enunţuri. De aceea, pregătirea pentru înfruntarea examenelor şi concursurilor, necesită o muncă, adesea disproporţională cu rezultatele realizate, o muncă artizanală fără viitor, fără satisfacţia unei cunoaşteri fertilizabile.

În ultimii ani, după expansiunea uriaşă a modernizării matematicii la toate nivelele de învăţămînt şi cercetare, constatîndu-se că o bună parte din tehnicile clasice şi străvechi ale înaintaşilor au fost eliminate cu multă exuberanţă şi că alte tehnici noi şi prodigioase le-au înlocuit prin apariţia de probleme de conţinut, s-a ajuns la convingerea că multe dintre cunoştinţele teoretice axiomatizate şi formalizate nu au o bază tehnică matematică solidă. În plus, în teoriile matematice fecunde se găsesc încorporate şi trebuie bine stăpînite capitolele clasice, ba chiar încorporate inter şi multidisciplinar. De aceea, există un curent din ce în ce mai puternic spre reintegrarea problemelor în arsenalul tehnicilor matematice obligatorii.

Desigur, nu vom mai folosi astăzi metodele neadevărate sau antice, notaţiile vechi, fundamentele neriguroase ale multor cuceriri ale înaintaşilor, ci le vom distila în alambicul logic-deductiv axiomatizant şi formalizator, dar vom căuta să aprofundăm cunoştinţele înalte pe care strămoşii nu le aveau sau doar le intuiau, folosind deliberat şi competent tehnicile pe care intuiţia lor surprinzătoare, ades genială, le-au descoperit din nimic, sau cine ştie din ce încercări stîngace ale propriilor înaintaşi. Este o greşeală să dispreţuim tehnicile de calcul algebric din trecut, fiindcă unele dintre ele au deschis calea teoriilor ulterioare, a căror evoluţie a rezultat din aprofundarea problemelor puse în practică, de rezolvarea ecuaţiilor etc.

---

[1]. *Istoria generală a ştiinţei* (editor René Taton), vol. IV, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, 1976.

Capitolul I reflectă această grijă de a înarma pe cititor cu instrumente și metode de rezolvare a problemelor de algebră, ținînd seama de conținutul programelor analitice în vigoare, și de manualele din învățămîntul nostru. La rîndul său acest învățămînt a fost restructurat și modernizat pe linia algebrei moderne; de aceea vom găsi probleme care corespund cerințelor aprofundării capitolelor de algebră, dar în același timp se vor urmări și aplicațiile algebrei în alte discipline matematice, ca și aplicațiile acestora în algebră.

Caracterul modern al învățămîntului nostru matematic se reflectă în introducerea elementelor de logică matematică și de teoria mulțimilor în primele două paragrafe. Elementele de logică matematică sînt reprezentate numai prin cinci probleme în §. 1, dar se vor regăsi și în paragrafele următoare, aplicate în rezolvarea altor probleme, cum sînt de exemplu **I.2.3, I.1.20** sau **I. 2.31,** algebra Booleană fiind exemplificată permanent prin algebra teoriei mulțimilor. Elementele de teoria mulțimilor sînt amplu dezvoltate prin 32 exerciții și probleme, dintre care unele dificile, altele instructive, altele complexe, interdisciplinare, dovedind atît temeiurile alegerii acestei teorii deosebit de generale ca bază pentru matematica modernă și în particular pentru algebră, unde simbolismul se cere de la sine axiomatizat, ca și operațiile specifice.

Vom exemplifica determinarea unor mulțimi definite prin relații caracteristice apartenenței prin **1.2.4.** în care elementele sînt din $\mathbb{N}$ sau $\mathbb{Z}$, **1.2.9.** în care relația de apartenență este dată prin două ecuații de gradul II și prin reuniunea celor două mulțimi corespunzătoare, cu elemente din $\mathbb{R}$, **I.2.10.** în care apare o familie $A$ de mulțmi definite printr-o familie de relații și care coincid cu $\mathbb{R}$. Problema **I.2.12.** privește mulțimea $D(a)$ a divizorilor lui $a$ număr naural, iar **I.1.15,** o mulțime $A$ formată pornind de la un număr natural $a$ prin relația $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}$ despre care se arată că $A - \mathbb{Q}$ este infinită. Problemele **I.2.23** și **I.2.28** privesc diferența simetrică, iar **I.2.29** cere rezolvarea unei ecuații cu diferențe simetrice de forma $A \Delta X = B$, unde $A$ și $B$ sînt mulțimi oarecare. Avînd în vedere caracterul deosebit al ecuației, se dau două soluții, cea de a doua folosind *funcția caracteristică* a mulțimilor.

După cum am menționat, unele probleme sînt dificile, dar atractive prin faptul că arată bogăția de rezultate ce se pot extrage din studiul mulțimilor și submulțimilor. Astfel de exemple sînt: **I.2.30**, une se cer submulțimile $A$ și $B$ ale unei mulțimi ale mulțimii $E$ a primelor 10 numere naturale,dîndu-se pe rînd, $\Delta$ și $C_E$ ca operatori, **I.2.31**, care cere rezolvarea unui sistem de ecuații avînd ca necunoscute o familie finită de părți ale unei mulțmi $T$ sau **I.2.32** în care apare o familie finită de $n$ mulțimi finite $A_i$ și reuniunea lor $S$, înzestrată cu proprietatea că pentru un indice $k$ fixat reuniunea a $k$ dintre $A_i$ este egală cu $S$, iar reuniunea a mai puține mulțimi decît $k$ este o parte proprie a lui $S$, cerîndu-se numărul minim de elemente ale lui $S$ în fucție de $n$ și $k$, precm și alte estimări privitoare la mulțimile $A_i$.

Am insistat în prezentarea problemelor privitoare la mulțimi deoarece caracterul lor algebric pare mai puțin reliefat. Paragraful următor, 3, este consacrat expresiilor algebrice, funcțiilor și inegalităților. În ceea ce privește expresiile algebrice, exemplele sînt puține și au caracter de exerciții de clasă ca **I.3.15—I.3.18.** Dimpotrivă, funcțiile a căror încadrare în algeră se justifică prin faptul că sînt *corespondente* funcționale între două mulțimi pe care le tratăm ca operații definite pe o mulțime cu valori în alta, iar inegalitățile sînt relații definite pe mulțimi ordonate, relația de ordine conducînd la cea de a doua structură matematică fundamentală, *structura de ordine*. În cadrul colecției inegalitățile sînt definite pe mulțimea numerelor reale sau pe părți ale acesteia, iar funcțiile au în general valori numerice, conform cu programele analitice în vigoare. ceasta nu împiedică însă ca unele probleme să fie grele și complexe. Problema **I.3.2** evaluează numărul funcțiilor definite pe o mulțime finită $M$ cu valori în altă mulțime finită $N$ prin aplicarea unui raționament prin inducție. Problemele **I.3.3.** și **I.3.4.** consideră funcții definite prin restul împărțirii cu 6, respectiv printr-o expresie de forma $f(x) = x^2 + m$, definită pe mulțimea 1, 2, 3 cu valori în aceeași mulțime și se întreabă dacă există un număr întreg astfel ca funcția $f$ să existe. Răspunsul este negativ, cu toată aparența simplă a expresiei. Următoarele probleme se referă la proprietăți de injectivitate, surjectivitate, bijectivitate, cum ar fi **I.3.5. — I.3.8.** și **I.3.11., I.3.12** și **I.3.14,** proprietăți deosebit de instructive, ca și **I.3.9, I.3.10, I.3.12** care privesc compunerea funcțiilor.

Inegalitățile funcționale sînt combinaate cu egalități funcționale, fiind de fapt inecuații și ecuații funcționale. Ca atare, problemele respective prezintă un grad de dificultate, care cere o stăpînire bună a tehnicilor elementare și a inegalităților numerice, precum și a trecerii de la numerele raționale la iraționale. Vom exemplifica aceste precauțiuni și exigențe prin **I.3.19** unde se aplică inducția matematică sub forma completă și trecerea la numere iraționale, prin **I.3.20**, unde un sistem de inecuații fucționale trebuie să aibă soluții bijective și unde găsirea soluției impune estimarea unor inegalități numerice prin care se stabilesc altele funcționale, care de fapt conduce la echivalența sistemului inițial cu sistemul în care inegalitățile devin egalități. Principiul inducției matematice complete și o trecere la limită de la rationale la iraționale, arată că unica soluție este $f(x) = x$. Această problemă arată că nu ne putem dispensa complet în algebră de procese de trecere la limită, cînd intervin soluții exprimate prin numere iraționale; problema **I.3.20** și-ar găsi locul tot atît de bine și în analiza matematică, dar folosind numai raționamente bazate pe inegalități numerice și proprietăți generale ale funcțiilor, cu excepția convergenței unor șiruri de umere raționale către un $x \in \mathbf{R}$ își justifică prezența și în capitolul „*Algebră*".

Cele 36 probleme ale §. 3 acoperă o arie largă de proprietăți generale ale funcțiilor și prezintă variate aplicații ale inegalităților funcționale, cu grade de dificultate care îl recomandă în special pentru pregătirea cursurilor și olimpiadelor.

**6. Funcții elementare și algoritmi numerici**

Paragraful tratează „*Funcția de gradul al doilea și ecuații și inecuații de gradul al doilea*", deci o tematică universală în manualele școlare. ceea ce caracterizează acest paragraf este modul atractiv și interesant în care sînt evidențiate proprietăți elementare ale funcției de gradul II ca egalitate, forme canonice, maxime și minime, monotonie, semnul, graficul, apoi inecuații de diverse forme cu sau fără parametru, familii de funcții de gradul II și înfășurătoarele lor. Trecînd apoi la aplicații geometrice se dau cîteva exemple de maxime și minime de arii, la care se adaugă problema **I.4.19** cu caracter cinematic, de găsire a unui drum de timp minim.

Ecuația de gradul II se bucură de o atenție deosebită, avînd în vedere prezența ei în diverse situații în tematica multor concursuri, relații între coeficienți și rădăcini, funcții simetrice de rădăcini, grafice realitatea rădăcinilor, ecuații în complex, expresii ale rădăcinilor-complexe, apoi inecuații cu module și probleme de sinteză completează lotul de 52 probleme ale acestui paragraf.

Următorul paragraf, 5, este consacrat radicalilor și operațiilor cu aceștia: probleme de domenii de existență, de simplificare, de evaluare, raționalizare pregătesc abordarea temei principale și de bază a ecuațiilor cu radicali, căreia i se acordă o atenție specială și minuțioasă. Probleme ca **I.5.21** primesc mai multe soluții cu raționamente deosebite, **I.5.22** tratează o inegalitate cu radicali suprapuși care cere în final aplicarea inducției matematice, altele cer maxime sau minime fără deriate.

Cele 27 probleme ale acestui paragraf aduc numeroase cunoștințe și strategii de raționament în tratarea radicalilor.

Sistemele de ecuații fac obiectul **§.6**. Vom găsi probleme cu sisteme de graul II și chiar de gradul III, care sugerează cîteva artificii utile, precum și sisteme liniare a căror rezolvare necesită tehnici speciale ca **I.6.12** sau **I.6.14** care încheie paragraful.

*Numerele complexe* au exercitat totdeauna reacții variate asupra celor care luau cunoștință de ele. Secole întregi au constituit un mister și au fost respinse ca „imaginare". Efecte asemănătoare pot produce și astăzi, de aceea manualele și mai ales culegerile de probleme au misiuni delicate de implementare a acestor numere indispensabile în nenumărate teorii și aplicații.

În **§.7** se prezintă tematica relativă la aceste numere în 37 de probleme, care ocupă 19 pagini, ceea ce evidențiată atît amploarea enunțurilor, cît și minuțiozitatea soluțiilor. Unele conduc la sisteme liniare, altele la separarea părților reale și imaginare prin calcule algebrice și interpretări geometrice, altele conduc la rezolvarea unor ecuații algebrice de diverse grade. O atenție deosebită este acordată formelor canonice și formulei lui ***Moivre***, ca și calculului diferitelor expresii în care intervin direct sau indirect numere complexe, precum și interpretărilor geometrice.

*Funcția exponențială* și inversa ei, *funcția logaritmică* au prilejuit în special lui *Euler* gloria de a fi înzestrat analiza matematică în secolul al XVIII-lea cu două funcții speciale de o importanță capitală și perenă. Implicațiile și extensiunile lor sînt deosebit de numeroase și de eficiente în toate domeniile matematicii, fizicii, tehnicii, statisticii matematice, științelor biologice etc. De aceea, **§.8**, consacrat acestor funcții, conține 56 probleme variate în conținut și aplicabilitate.

Începînd cu puterile raționale se compară exponențiale cu baze numerice, apoi se trece la inegalități exponențiale și aceeași tematică se propune pentru logaritmii unor expresii. Rezolvarea ecuațiilor exponențiale și logaritmice, ca și a inecuațiilor corespunzătoare este bine reprezentată prin exemple, care cer strategii diverse. Semnalăm în special **I.8.49** care este o ecuație funcțională avînd ca soluție exponențiala $a^x$, **I.8.50** care este o inegalitate exponențială și **I.8.54** care cere determinarea unei mulțimi definită printr-o inecuație exponențială, pentru dificultățile pe care le prezintă în schimbul unor tehnici subtile pe care le oferă rezolvitorilor.

Funcțiile polinomiale și ecuațiile algebrice de grad superior ocupă 60 pagini din capitolul *Algebră* din cele 130 probleme rezolvate. Este greu de semnalat conținutul lor într-o trecere rapidă în revistă, totuși vom evidenția diversele aspecte remarcabile ale tematicii problemelor Proprietăți generale ale funcțiilor polinomiale, ca cele ce pun în evidență inelul polinoamelor sau inversabilitatea unora dintre acestea în complex sînt binevenite, ca și determinarea unora prin diverse condiții ce acționează asupra coeficienților sau împărțirea polinoamelor, unde intervine și schema lui *Horner*, precum și problemele de divizibilitate polinomială. O altă direcție de studiu este cea a polinoamelor prime între ele sau admițînd un c.m.m.d.c., căreia i se atribuie problemele **I.9.29—I.9.39** cu folosirea algoritmului lui *Euclid* și a teoremei lui *Bézout*. Problemele următoare se referă în general tot la divizibilitate, dar introduce în joc rădăcinile, apoi urmează o serie de probleme de rezolvare a unor ecuații algebrice de diverse grade, de stabilire de relații între coeficienți și rădăcini pornind de la relațiile lui VIETE, cum sînt **I.9.48—I.9.61**, de rezolvare a unor ecuații trinoame sau reciproce, cum sînt **I.9.63—I.9.70**. Urmează probleme de rezolvare a unor ecuații care admit anumite rădăcini, cum sînt cele notate **I.9.71—I.9.90**. Se trece în continuare la probleme cu caracter teoretic, cum sînt **I.9.91**, care privește ireductibilitatea, folosind criteriul lui *Eisenstein* sau **I.9.92** în care se cere să se arate că un anumit polinom cu coeficienți întregi nu se poate descompune în două polinoame neconstante cu coeficienți întregi, **I.9.93**, care conduce la descompnerea unei fracții trigonometrice în fracții simple la rezolvarea unor ecuații de gradul $n$, sau **I.9.94** unde o funcție de polinoame definită prin recurență dă loc la ecuații binome.

Ecuațiile în complex ocupă de asemenea un loc important în capitol, făcînd să intervină formula lui *Moivre*, reprezentări în planul complex, estimații de module, rădăcinile unității și altele tehnici privind numerele complexe.

O problemă ciudată este **I.9.98** în care se cere determinarea numărului de rădăcini reale a unei ecuații trigonometrice; fără folosirea analizei matematice, bineînțeles în afară de proprietățile generale ale funcțiilor admise prin teoria mulțimilor, ca monotonie, injectivitate etc. Tehnica revine la separarea acestora în intervale de lungime $2\pi$, unde se află cîte o singură rădăcină și conduce la 1251 rădăcini reale.

Semnalăm în introducerea acestei treceri în revistă probleme de inecuații, precum și problema **I.9.130** de rezolvare a unei ecuații de gradul IV, care primește trei soluții fiind, ca și multe altele, o problemă dată la consursurile de treapta a II-a. De altfel, cititorul va descoper în acest bogat paragraf numeroase probleme care îl pot pregăti pentru înfruntarea cu succes a acestui concurs important pentru cariera sa viitoare sau, dacă este profesor, inspiratoare pentru alcătuirea de probleme adecvate acestui concurs.

Aceeași observație se cuvine și ultimului paragraf, § 10, care prezintă algoritmul șirurilor numerice. Acestea pot fi finite sau infinite, dar nu se cere sumarea lor, care ar necesita noțiunea de convergență.

Șirurile sînt date fie prin termenii lor generali, fie printr-o succesiunea de termeni a cărei lege de formare trebuie determinată, fie printr-o relație de recurență, în care caz se cere termenul general.

În particular este tratat cazul progresiilor aritmetice și geometrice, pentru a rămîne în cadrul programelor analitice.

După două exerciții de acomodare **I.10.1**, și **I.10.2**, se pune problema posibilității integrării unui număr într-un șir, ceea ce conduce la rezolvarea unor ecuații de gradele întîi sau doi în raport cu indicele general $n$, care este număr natural. Semnalăm **I.10.4**, unde ecuația este de gradul II, de asemenea **I.10.6**, unde șirul este definit prin recurență, ambele probleme fiind culese din manuale, ca și cele ce urmează privitoare la progresii aritmetice sau geometrice.

**7. Concluzii metodologice** : Capitolul I, Algebra, are o întindere de peste 200 pagini, deci amploarea unui volum. Prezentarea sumară a tematicii diferitelor sale paragrafe a avut un dublu scop : primul de a se compara expunerea cu caracter istoric a evoluției algebrei, cel de al doilea, de a arăta cititorului că noțiunile și metodele clasicilor sînt încă actuale, cel puțin în măsura în care s-au păstrat cu numele autorilor. Dar, multe dintre algoritmele şi metodele de analiză algebrică s-au transmis cu pierderea pe drum a numelui celui care le-a introdus, printr-o lege de ingratitudine a generaţiilor succesive sau pentru a nu se încărca memoria cititorilor cu nume din trecut despre care nu se ştie prea mult.

Se poate urmări prezenţa problemelor şi exerciţiilor legate de noţiuni, instrumente şi metode, pe care le datorăm înaintaşilor, dar ceea ce este mai important este faptul că prin adîncirea acestora şi folosirea limbajului şi notaţiilor moderne se pot rezolva probleme grele şi chiar găsi rezultate noi, ceea ce dorim cititorilor pasionaţi şi întreprinzători.

## §. 1. Elemente de logică matematică

**I.1.1**$^{\text{PT}}$. Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiei:

$$P \equiv (p \vee q) \to (p \wedge \bar{q})$$

dacă $p$ este falsă, iar $q$ este adevărată.

**R.** Valoarea de adevăr a propoziţiei $P$ este:

$$(0 \vee 1) \to (0 \wedge \bar{1}) = 1 \to (0 \wedge 0) = 1 \to 0 = 0.$$

**I.1.2**$^{\text{PT}}$. Se consideră propoziţiile $A$ şi $B$ şi tabelul:

| $A$ | $B$ | $\bar{A}$ | $\bar{B}$ | $\overline{A \wedge B}$ | $\overline{A \vee B}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | |
| 1 | 0 | | | | |
| 0 | 1 | | | | |
| 0 | 0 | | | | |

Să se completeze tabelul.

**R.** Tabelul completat arată astfel:

| $A$ | $B$ | $\bar{A}$ | $\bar{B}$ | $\overline{A \wedge B}$ | $\overline{A \vee B}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**I.1.3**$^{\text{PT}}$. Fie predicatele:

$$P[x, y] \equiv „x - y - 2 = 0";$$

$$Q[x, y] \equiv „x + 2y - 5 = 0",$$

$x$ şi $y$ fiind elemente ale mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

a). Să se determine $x$ şi $y$ astfel încît propoziţia „$P[x, y]$ sau $Q[x, y]$" să fie adevărată;

b). Să se determine $x$ și $y$ astfel încît propoziția „$P\ [x, y]$ și $Q\ [x, y]$" să fie adevărată.

**R.** a). Satisfac dubletele (3, 1), (4, 2), (5, 3), (1, 2).

b). $x = 3, y = 1$.

**I. 1.4**[PO]**.** Care din propozițiile :

a). $(A \to B) \vee (B \to A)$ ;

b). $(A \to \bar{B}) \vee (B \to \bar{A})$ ;

c). $(A \vee B) \wedge (A \vee \bar{B})$

sînt tautologii (adică sînt adevărate oricare ar fi valorile de adevăr ale propozițiilor $A$ și $B$) ?

**R.** Numai a). În adevăr, avem tabelul :

| $A$ | $B$ | $A \to B$ | $B \to A$ | $(A \to B) \vee (B \to A)$ | $A \to \bar{B}$ | $B \to \bar{A}$ | $(A \to \bar{B}) \vee (B \to \bar{A})$ | $(A \vee B) \wedge (A \vee \bar{B})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

**I. 1.5**[PO]**.** Să se scrie negațiile următoarelor predicate :

$$p(x, y) \equiv „x = -1 \text{ sau } y = 3" ;$$

$$q(x, y) \equiv „x \geqslant 2 \text{ și } y \neq 3" ;$$

$$r(x, y) \equiv „x = 2 \text{ sau } y \geqslant 5" ;$$

$$s(x, y) \equiv „x^2 - 5x + 4 = 0" ;$$

$$t(x, y) \equiv „x - \frac{1}{2} < 5",$$

unde $x, y \in \mathbb{R}$.

**R.** Negația lui „sau" este „și", a lui „și" este „sau", a lui „=" este „$\neq$" etc., astfel că negațiile predicatelor date sînt predicatele :

$$\neg\, p(x, y) \equiv „x \neq -1 \text{ și } y \neq 3" ;$$

$$\neg\, q(x, y) \equiv „x \leqslant 2 \text{ sau } y = 3" ;$$

$$\neg\, r(x, y) \equiv „x \neq 2 \text{ și } y < 5" ;$$

$$\neg\, s(x, y) \equiv „x \neq 1 \text{ și } x \neq 4" ;$$

$$\neg\, t(x, y) = „x \in \left[\frac{11}{2}, \infty\right)".$$



18 2 — c. 629

## §.2. Elemente de teoria mulțimilor

**1.2.1^M.** Să se verifice egalitățile :

a). $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4x + 3 = 0\} = \{1, 3\}$ ;

b). $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + x - 2 = 0\} = \{1\}$ ;

c). $\{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 - 3x + 1 = 0\} = \{1\}$ ;

d). $\{x \in \mathbb{Q} \mid 2x^2 - 3x + 1 = 0\} = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ ;

e). $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 1| = 2\} = \{-1, 3\}$.

**R.** a) Rădăcinile ecuației de gradul II, $x^2 - 4x + 3 = 0$, sînt $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = 2 \pm 1$, deci $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, și se observă că $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, deci a) este adevărată.

b). Rădăcinile ecuației $x^2 + x - 2 = 0$ sînt $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, și numai $x_2 \in \mathbb{N}$, deci b) este adevărată.

Cazurile c), d) se tratează analog.

e). Relația :

$$|x - 1| = 2$$

este echivalentă cu $x-1 = 2$ sau $x - 1 = -2$ de unde $x=3$ sau $x = -1$.

Cum ambele soluții găsite sînt numere întregi, egalitatea e) este adevărată.

**1.2.2^M.** Să se determine mulțimea :

$$M = \{x \in \mathbb{Z} \mid mx^2 - (m^2 + 1)x + m = 0\}.$$

*Discuție.*

**R.** Pentru $m = 0$, ecuația are soluția $x = 0 \in \mathbb{Z}$, deci $M = \{0\}$. Dacă $m \neq 0$, ecuația din enunț are soluțiile $x_1 = \frac{1}{m}$, $x_2 = m$. Dacă $m = 1$, atunci $M = \{1\}$ ; dacă $m = -1$, atunci $M = \{-1\}$ ; dacă $m \in \mathbb{Z}^* - \{-1, 1\}$, atunci $M = \{m\}$. Dacă $m = \frac{1}{q}$, $q \in \mathbb{Z}^*$, atunci $M = \{q\}$, iar dacă $m \notin \mathbb{Z}$ și $m \neq \frac{1}{q}$, $q \in \mathbb{Z}^*$, atunci $M = \emptyset$.

**I. 2.3**[M]. Care din următoarele propoziții sînt adevărate sau false :

a) $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$ ; b) $\{4, 5, 6\} = \{6, 4, 5\}$ ;
c) $\{8 + 1, 5\} = \{5, 9\}$ ; d) $3 \in \{3\}$ ; e) $3 \notin \{3\}$ ;
f) $3 \subset \{3\}$ ; g) $\{3\} = \{4\}$ ; h) $\{3\} = \{\{3\}\}$ ;
i) $\Phi \subset \{1\}$ ; j). $\Phi \in \{1\}$.

**R.** Folosind proprietatea că două mulțimi sînt egale, dacă sînt formate din aceleași elemente, obținem că relațiile a), b), c), d) și i) sînt adevărate, celelalte fiind false. Relația e) este falsă căci $3 \in \{3\}$, f), de asemenea, căci $3 \not\subset \{3\}$, g), de asdmenea, căci $3 \neq 4$, h), de asemenea, căci $3 \neq \{3\}$ etc.

**I. 2.4**[M]. Să se determine mulțimile :

a) $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x = \dfrac{4n}{n + 2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$

b) $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x = \dfrac{6n + 7}{3n + 1},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $C = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x = \dfrac{2n^2 + 4n + 2}{n^2 + 1},\ n \in \mathbb{N}\right\}$

**R.** a) Scriem pe $x$, succesiv :

$$x = \frac{4n}{n + 2} = \frac{4n + 8}{n + 2} - \frac{8}{n + 2} = 4 - \frac{8}{n + 2}.$$

Impunînd condiția $x \in \mathbb{N}$, trebuie să determinăm $n \in \mathbb{N}$ pentru care :

$$\text{i) } \frac{8}{n + 2} \leqslant 4 \ ; \quad \text{ii) } \frac{8}{n + 2} \in \mathbb{N}.$$

Condițiile sînt îndeplinite pentru $n \in \{0, 2, 6\}$, deci :

$$A = \{0, 2, 3\}.$$

b). Scriem pe $x$ sub forma :

$$x = \frac{6n + 7}{3n + 1} = \frac{6n + 2}{3n + 1} + \frac{5}{3n + 1} = 2 + \frac{5}{3n + 1}.$$

Condiția $x \in \mathbb{Z}$ revine la a determina $n \in \mathbb{Z}$ pentru care $\dfrac{5}{3n + 1} \in \mathbb{Z}$. După calcule, obținem $B = \{1, 7\}$, căci $3n + 1$ trebuie căutat printre divizorii lui 5, adică $-5$, $-1$, $1, 5$.

c) Să observăm că :

$$x = \frac{2n^2 + 4n + 2}{n^2 + 1} = 2 + \frac{4n}{n^2 + 1}$$

Condiția $x \in \mathbb{N}$ revine la a găsi $n \in \mathbb{N}$ pentru care $\dfrac{4n}{n^2 + 1} \in \mathbb{N}$.

Cum $4n < n^2 + 1$ pentru $n \leqslant 4$, căutăm pe $n$ în mulțimda $\{0, 1, 2, 3\}$. Găsim $n = 0$ și $n = 1$, de unde $C = \{2, 4\}$.

**I.2.5$^M$.** Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{2, 3, 7, 11\}$. Să se determine $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$. Dacă $E = A \cup B$, să se determine $\complement_E A$, $\complement_E B$.

**R.** Avem $E = \{1, 2, 3, 4, 7, 11\}$ și:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 11\}; \quad A \cap B = \{2, 3\};$$

$$A - B = \{1, 4\}; \complement_E A = E - A = \{7, 11\}; \complement_E B = E - B = \{1, 4\}.$$

**I.2.6$^M$.** Dacă $A$, $B$, $C$ sînt trei mulțimi astfel încît $A \cup B = A \cup C$ și $A \cap B = A \cap C$, atunci $B = C$.

**R.** Folosim faptul că:

$$(A \cup B) - C = (A \cup C) - C = A - C$$

(conform ipotezei). Dar, pe de altă parte:

$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C).$$

deci:

$$(A - C) \cup (B - C) = A - C. \qquad (1)$$

Pe de altă parte:

$$(A \cap B) - C = (A \cap C) - C = A \cap (C - C) = \Phi$$

Dar, altfel:

$$(A \cap B) - C = A \cap (B - C).$$

deci:

$$A \cap (B - C) = \Phi. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) obținem că $B - C = \Phi$ deci $B \subset C$. Analog $C \subset B$ deci $B = C$. ∎

**I. 2.7$^M$.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încît:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + m = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} \neq \Phi.$$

**R.** Determinăm pe $m$ astfel încît elementele primei mulțimi să se găsească printre elementele celei de-a doua. Aceasta revine la a rezolva ecuațiile:

$$\frac{4 \pm \sqrt{16 - 4m}}{2} = 1; \quad \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4m}}{2} = 2.$$

Se obține $m \in \{3, 4\}$.

**I.2.8$^M$.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încît:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + m = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 = 0\} = \Phi.$$

**R.** Condiția revine la a determina $m \in \mathbb{R}$ pentru care: $3 \pm \frac{\sqrt{9 - 4m}}{2} \neq$ $\neq 1$ sau $3 \pm \frac{\sqrt{9 - 4m}}{2} \neq 4$.

Efectuînd, după calcule găsim $m \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 2\}$.

**I. 2.9**[M]. Să se determine $m$ astfel încît :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + mx - 1 = 0\} - \left\{-2, \frac{1}{2}\right\} = \Phi$$

**R.** Raționînd analog cu problema precedentă se obține $m = \frac{3}{2}$.

**I.2.10**[M]. Să se arate că mulțimea :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + mx + 1 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4x + m^2 = 0\}$$

are două elemente oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

**R.** Calculînd discriminantul celor două ecuații de definiție a mulțimilor, găsim :

$$\Delta_1 = m^2 - 4 ; \Delta_2 = 16 - 4m^2.$$

Din faptul că $\Delta_1 \geqslant 0$ este echivalent cu $m \in (-\infty, -2[ \cup [2, \infty)$

și $\Delta_2 \geqslant 0$ este echivalent cu $m \in [-2, 2]$;

avem cazurile :

i) Cînd $m \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ mulțimea din enunț are într-adevăr 2 elemente pentru că mulțimea a doua din reuniune este vidă.

ii) Cînd $m \in (-2, 2)$, prima mulțime este vidă, cea de-a doua avînd 2 elemente.

iii) Cînd $m = -2$ sau $m = 2$, fiecare din mulțimile date are cîte un singur element, deci reuniunea lor este o mulțime cu două elemente.

**I. 2.11**[M]. Pentru fiecare număr real $m \in \mathbb{R}$, considerăm mulțimea $A_m$ deginită astfel :

$$A_m = \left\{x \in \mathbb{R} \mid (\exists) a \in \mathbb{R},\ x = \frac{a^2 + a + m}{a + 1}\right\}.$$

a). Să se arate că pentru orice $m < 0$, $A_m = \mathbb{R}$.

b). Să se arate că mulțimile $A_m (m \in \mathbb{R})$ nu au nici un element comun.

**R.** a). Evident că $A_m \subset \mathbb{R}$. Să se demonstrăm că și $\mathbb{R} \subseteq A_m$.

Fie $x \in \mathbb{R}$ și un $m \in \mathbb{R}^*$ și să demonstrăm că în acest caz există un $a \in \mathbb{R}$ astfel încît $x = \frac{a^2 + a + m}{a + 1}$, deci că $x \in A_m$.

Dacă $x = \frac{a^2 + a + m}{a + 1}$, atunci $xa + x = a^2 + a + m$, deci :

$$a^2 + (1 - x)a + (m - x) = 0 \tag{1}$$

În acest caz $\Delta = 1 + 2x + x^2 - 4m$. Să studiem semnul lui $\Delta$ în cazul cînd $m < 0$. Avem :

$$\Delta = (1 + x)^2 - 4m > 0.$$

Ecuația (1) are întotdeauna soluții reale și diferite de $-1$, căci dacă $a = -1$ ar fi soluție, ar rezulta $m = 0$.

b). Dacă $m > 0$, $x \in A_m$; în cazul în care $\Delta \leqslant 0$ avem :

$$x \in [-1 - 2\sqrt{m}, \ -1 + 2\sqrt{m}].$$

deci :

$$A_m \subseteq [-1 - 2\sqrt{m}, \ -1 + 2\sqrt{m}].$$

Reluînd rezolvarea în sens invers, demonstrăm că :

$$[-1 - 2\sqrt{m}, \ -1 + 2\sqrt{m}] \subseteq A_m,$$

și deci, dacă $m > 0$, atunci $A_m = [-1 - 2\sqrt{m}, \ -1 + 2\sqrt{m}]$.

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Să demonstrăm că există $m_0 \in \mathbb{R}$, cu $m_0 > 0$ astfel încît $\alpha \notin A_{m_0}$ și deci $\alpha \notin \bigcap\limits_{m \in \mathbb{R}} A_m$.

Dacă $\alpha \notin A_{m_0}$, deci $\alpha \notin [-1 - 2\sqrt{m_0}, \ -1 + 2\sqrt{m_0}]$ atunci :

$$\alpha \in (-\infty, -1 - 2\sqrt{m}) \text{ sau } \alpha \in (-1 + 2\sqrt{m}, \ \infty).$$

Să demonstrăm spre exemplu că dacă $\alpha < 0$ atunci $(\exists)\ m_0 \in \mathbb{R}^*$ astfel încît :

$$\alpha \in (-\infty, -1 - 2\sqrt{m_0})$$

adică $\alpha < -1 - 2\sqrt{m_0}$, sau :

$$\frac{(\alpha + 1)^2}{4} > m_0$$

$$\text{deci } m_0 < \frac{(\alpha + 1)^2}{4}.$$

Deci se poate lua pentru $m_0$ orice valoare din intervalul $\left(0, \left(\frac{\alpha + 1}{2}\right)^2\right)$.

Analog se demonstrează că dacă $\alpha > 0$ atunci :

$$m \in \left(0, \left(\frac{\alpha + 1}{2}\right)^2\right).$$

*Observație.* i) Dacă $m = 0$, atunci $A_0 = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

ii). Dacă $m = 1$, atunci :

$$A_1 = (-\infty, -3] \cup [1, \infty).$$

**I. 2.12$^M$.** Fie $a$ un număr natural. Vom nota cu $D(a)$ mulțimea:

$$D(a) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ divide } a\}.$$

i) Arătați că $D(a)$ are cel puțin două elemente $(a > 1)$;

ii). Pentru care numere naturale $a$, $D(a)$ are exact 2 elemente?

iii) Pentru care numere naturale $a$, $D(a)$ are exact patru elemente?

iv) Determinați mulțimile $D(8)$, $D(160)$, $D(120)$.

**R.** i) Orice număr natural $a > 1$ admite întotdeauna doi divizori și anume pe 1 și pe el însuși. Deci $D(a)$ are cel puțin 2 elemente.

ii) Dacă $a$ este prim, atunci singurii săi divizori sînt 1 și $a$.

iii) Dacă $a = p^3$, cu prim $p$, atunci divizorii săi sînt $1, p, p^2, p^3$; sau, dacă $a = p \cdot q$, cu $p$ și $q$ numere prime diferite, căci în acest caz divizorii lui $a$ sînt $1, p, q, p \cdot q$.

iv) Avem:

$D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$; $D(160) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 80, 160\}$.

**I. 2.13$^M$.** Să se determine $m$ astfel încît mulțimea:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - mx + 2 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - mx + 1 = 0\},$$

să conțină trei elemente. Poate avea $A$ două elemente?

**R.** Mulțimea are două elemente atunci cînd, notînd cu $\Delta_1$, respectiv $\Delta_2$, discriminantul ecuațiilor celor două mulțimi, avem:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 0$$

sau, echivalent:

$$m \in \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}.$$

În continuare, din:

$$\frac{m - \sqrt{m^2 - 8}}{2} = \frac{m + \sqrt{m^2 - 8}}{4}$$

sau:

$$\frac{m + \sqrt{m^2 - 8}}{2} = \frac{m - \sqrt{m^2 - 8}}{4}$$

găsim că pentru $m \in \{-3, 3\}$, mulțimea $A$ are 3 elemente. Mulțimea $A$ nu poate avea două elemente.

**I. 2.14$^M$.** Fie $r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots$, numere naturale.

Fie, de asemenea, $a$ un număr natural. Pentru orice număr $k$, notăm:

$$A_k = \{a + r_k m \mid m = 1, 2, \ldots\}.$$

Dovediți că nu există nici un element comun tuturor mulțimilor $A_k$ $(k \geqslant 1)$.

**R.** Presupunem, prin absurd, că ar exista un element $x_0 \in \bigcap\limits_{k \geqslant 1} A_k$

Atunci:

$$x_0 = a + r_1 m_1 = a + r_2 m_2 = a + r_3 m_3 = \ldots = a + r_n m_n = \ldots$$

Dar din $r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots$ se obține că:

$$m_1 > m_2 > m_3 > \ldots > m_n > \ldots$$

Am obținut astfel un șir strict descrescător $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de numere naturale infinit, imposibil, deoarece $\mathbb{N}$, mulțimea numerelor naturale, este o mulțime bine ordonată, adică o mulțime cu un prim element, și deci șirul $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ar trebui să fie finit. Contradicția provine din faptul că am presupus că $A_k$ nu sînt disjuncte.

**I. 2.15**[M]**.** Fie $a_0$ un număr natural. Definim mulțimea:

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$

unde $a_1 = \sqrt{a_0^2 + 1}, \ldots, a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}$.

Arătați că mulțimea $A - \mathbb{Q} \neq \Phi$ este nevidă.

**R.** Vom arăta chiar că $A - \mathbb{Q}$ este infinită. Avem:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}^2 + 1} = \sqrt{a_{n-2}^2 + 2} = \ldots = \sqrt{a_0^2 + n}.$$

Dacă $a_0 = 0$, obținem șirul:

$$\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n},$$

ce conține subșirul infinit $\{\sqrt{p}\}_{p \text{ prim}}$, în care toate elementele sînt numere iraționale. Dacă $a_0 \neq 0$, considerăm subșirul $a_{n_p}$ cu indicele $n_p$ dat de $n_p = (p - 1)a_0^2$ cu $p$ prim, în care toate elementele sale sînt numere iraționale.

**I. 2.16**[T]**.** Se dau mulțimile:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}; \; B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, -1 < x < 4\};$$

$$C = \left\{x \mid x \in \mathbb{N}, \frac{2x + 5}{x + 1} \in \mathbb{N}\right\}.$$

a). Să se determine mulțimile $B$ și $C$.

b). Să se determine $A \cup B$; $A \cap B$; $A - B$; $A \times B$.

c). Cîte submulțimi de două elemente are mulțimea $A$?

**R.** a). Deoarece $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, rezultă că singurele numere naturale cuprinse între $-1$ și 4 sînt 0, 1, 2, 3, deci $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Deoarece, pe de altă parte, $\frac{2x + 5}{x + 1} = 2 + \frac{3}{x + 1}$, rezultă că numărul $(2x + 5) : (x + 1)$ este natural cînd $x + 1$ este un divizor al lui 3 adică sau $x + 1 = 1$, deci $x = 0$, sau $x + 1 = 3$, deci $x = 2$. Numărul $x + 1$ nu poate fi un divizor negativ al lui 3, deoarece dacă, de exemplu, $x + 1 = -1$, am avea $x = -2$, soluție care nu este număr natural. Deci $C = \{0, 2\}$.

b). Avem, potrivit definiției, $A \cup B = \{x \mid x \in A$ sau $x \in B\}$, deci, în cazul nostru, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{0, 1, 2, 3\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. De asemenea potrivit definiţiei, $A \cap B = \{x \mid x \in A$ şi $x \in B\}$ deci $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{0, 1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$ şi, încă, cum $A - B = \{x \mid x \in A$ şi $x \notin B\}$, găsim că $A - B = \{1, 2, 3, 4\} - \{0, 1, 2, 3\} = \{4\}$. În sfîrşit, deoarece $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A$ şi $y \in B\}$, găsim că $A \times B = \{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4,0), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.

c). Deoarece cu $n$ elemente se pot forma $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ grupe de $k$ obiecte, două grupe cu aceleaşi obiecte dar în altă ordine fiind socotite identice, rezultă că numărul submulţimilor lui $A$ cu două elemente este egal cu $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6$. Reamintim că:

$$n! = 1 \cdot 2 \ldots n.$$

**I.2.17**$^{\mathrm{r}}$. Fie mulţimile:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leqslant 2\}.$$

a). Să se determine mulţimile $A$ şi $B$.

b). Să se afle: $A \cup B$; $A \cap B$; $B - A$; $A \times B$.

**R.** a). Avem $A = \{1, 2\}$; $B = \{-1, 0, 1, 2\}$.

b). Avem $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2\}$; $A \cap B = \{1, 2\}$; $B - A = \{-1, 0\}$; $A \times B = \{(1, -1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$.

**I. 2.18**$^{\mathrm{r}}$. Fie mulţimile:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, x = 3m + 1, m \in \mathbb{N}^*\}$;

$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, x = 405 - 7n, n \in \mathbb{N}^*, n \leqslant 57\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, x = 391 - 21p, p \in \mathbb{N}^*, p \leqslant 18\}$.

Să se demonstreze că $A \cap B = C$.

**R.** Fie $x \in A \cap B$. Aceasta înseamnă că există $m \in \mathbb{N}^*$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încît $x = 3m + 1$ şi $x = 405 - 7n$, cu $n \leqslant 57$. Deci, pentru aceşti $m$ şi $n$, avem egalitatea:

$$3m + 1 = 405 - 7n$$

sau $m = \dfrac{404 - 7n}{3} = 134 - 2n - \dfrac{n-2}{3}$. Pentru ca $m$ să fie întreg, este necesar ca să existe $k \in \mathbb{N}$, aşa ca $n - 2 = 3k$, adică $n = 3k + 2$. Deoarece $n \leqslant 57$, rezultă $3k + 2 \leqslant 57$, adică $3k \leqslant 55$ deci $k \leqslant \dfrac{55}{3} < 19$ deci $k \leqslant 18$. Deci orice $x \in A \cap B$ se scrie sub forma $x = 391 - 21k$, cu $k \leqslant 18$, deci $A \cap B = C$.

**I. 2.19**$^{\mathrm{r}}$. Să se determine următoarele mulţimi:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\};$$
$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 9 = 0\};$$
$$C = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x-2}{x+2} \leqslant 3\right\};$$
$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid |x - 1| + |x - 2| = 3\}.$$

şi apoi să se calculeze: $A \cup C$; $B \cap D$.

**R.** Mulțimea $A$ este mulțimea vidă pentru că rădăcinile ecuației date în definiția lui $A$ sînt complexe. Avem $B = \{-3, 3\}$, $C = \{x \mid x \in \in (-\infty, -4] \cup (-2, \infty)\}$ iar $D = \{0, 3\}$.

În continuare avem :

$$A \cup C = C,\ B \cap D = \{3\}.$$

**I. 2.20**[T]**.** Fie $\pi$ un plan dat și fie $P$ mulțimea poligoanelor din planul $\pi$, $T$ mulțimea triunghiurilor, $A$ mulțimea triunghiurilor ascuțitunghice, $B$ mulțimea triunghiurilor echilaterale, $C$ mulțimea triunghiurilor dreptunghice din planul $\pi$. Care din următoarele relații :

a). $A \cup B \cup C \subset T \subset P$; b). $A \cap B = B$; c). $B \cap C = \emptyset$;

d). $C \cap A = C$; e). $T \cap P = T$; f). $(B \cap P) \cup (T \cap C) = \emptyset$

sînt adevărate și care sînt false?

**R.** Relațiile d) și f) sînt false, celelalte fiind adevărate.

**I. 2.21**[T]**.** Să se determine mulțimile $A$ și $B$ care satisfac condițiile :

a). $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ b). $A \cap B = \{1, 2\}$;
c). $A - B = \{5\}$.

**R.** După cîteva raționamente se obține :

$$A = \{1, 2, 4\},\ B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\},$$

**I.2.22**[T]**.** Să se determine mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + x - 2 = 0\}$.

**R.** Rădăcinile ecuației sînt $x_1 = 1$ și $x_2 = -2$, de unde mulțimea $A$ este $A = \{1\}$, căci singura soluție naturală este $x_1 = 1$.

**I.2.23**[PT]**.** Să se determine mulțimile $A$, $B$, $C$ care satisfac simultan condițiile :

a). $A \Delta B = \{1, 2, 6, 8, 9\}$;

b). $A \cap C = \{4\}$;

c). $B \Delta C = \{2, 6, 8\}$;

d). $\{1, 9\} \not\subset B$.

**R.** Din condiția b) rezultă $\{1, 4\} \subset A$, $\{1, 4\} \subset C$. Din condiția d) rezultă că 1 și 9 nu pot aparține simultan lui $B$. Rezultă, în definitiv, că soluțiile cerute sînt $A = \{1, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 9\}$, $C = \{4, 9\}$, sau $A = \{4, 9\}$, $B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 4\}$ sau $A = \{1, 4, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{4\}$.

**I. 2.24**[PT]**.** Să se arate că :

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C),$$

$A$, $B$ și $C$ fiind mulțimi oarecare.

**R.** Avem șirul de echivalențe :

$$x \in A - (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \text{ și } x \notin B \cup C \Leftrightarrow x \in A \text{ și } (x \notin B \text{ și } x \notin C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \text{ și } x \notin B) \text{ și } (x \in A \text{ și } x \notin C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \text{ și } x \in (A - C) \Leftrightarrow x \in$$
$$\in (A - B) \cap (A - C).$$

**I. 2.25**[PO]**.** Fie $\mathcal{P}(T)$ familia submulţimilor lui $T$. Să se determine cîte elemente are mulţimea $A$, dacă $\mathcal{P}(A)$ şi $A^2$ au acelaşi număr de elemente.

**R.** Fie $n$ numărul de elemente al mulţimii $A$. Se ştie că $\mathcal{P}(A)$ are $2^n$ elemente, iar $A^2$, $n^2$ elemente, astfel că obţinem ecuaţia $2^n = n^2$. Se constată că această ecuaţie are, în numere naturale, soluţiile $n_1 = 2$ şi $n_2 = 4$, iar pentru $n > 4$ avem $2^n < n^2$, afirmaţie ce se poate dovedi prin inducţie matematică.

**I. 2.26**[PT]**.** Să se demonstreze echivalenţele :

a). $A \cap B = A - B \Leftrightarrow A = \Phi$,

b). $A \cup B = A - B \Leftrightarrow B = \Phi$.

**R.** Dacă $A \neq \Phi$ şi $A = B \neq \Phi$ atunci $A \cap B = A$, $A - B = \Phi$, deci $A = \Phi$, absurd. Fie $A \neq B$, deci există $x \in A$, $x \notin B$. Atunci $x \notin A \cap B$ şi $x \in A - B$, absurd. Deci $A = \Phi$.

Implicaţia $\Leftarrow$ este evidentă.

Analog pentru b).

**I. 2.27**[PT]**.** Să se determine toate mulţimile finite $X \subset \mathbb{R}$ cu proprietatea :

$$(\forall)\ x \in X \Rightarrow x + |x| \in X.$$

**R.** Evident, nu pot exista în $X$ elemente strict pozitive. În adevăr, dacă $a > 0$ ar aparţine lui $X$, am avea şi $a + |a| = 2a \in X$, deci $4a \in X$ şi, prin inducţie, $2^k a \in X$, $(\forall)$ $k \in \mathbb{N}$, adică $X$ n-ar fi finită, contrar ipotezei. Rămîne atunci că familia tuturor mulţimilor ce satisfac enunţul este formată din toate mulţimile finite care au cel mai mare element egal cu 0.

**I. 2.28**[PO]**.** Să se arate că dacă notăm :

$$A \Delta B \overset{\text{not}}{=} (A - B) \cup (B - A),$$

atunci :

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C),$$

oricare ar fi mulţimile $A$, $B$, $C$.

**R.** Avem, succesiv :

$x \in (A \Delta B) \Delta C \Leftrightarrow x \in (A \Delta B - C)$ sau $x \in (C - A\Delta B) \Leftrightarrow (x \in A\Delta B$ şi $x \notin C)$ sau $(x \in C$ şi $x \notin A \Delta B) \Leftrightarrow [(x \in A - B$ sau $x \in B - A)$ şi $x \notin C)$ sau $(x \in C$ şi $x \notin A\Delta B) \Leftrightarrow [(x \in A - B$ sau $x \in B - A)$ şi $x \notin C]$ sau $(x \in C$ şi $x \notin A - B$ şi $x \notin B - A) \Leftrightarrow (x \in A - B$ şi $x \notin C)$ sau $(x \in B - A$ şi $x \notin C)$ sau $[x \in C$ şi $(x \notin A$ sau $x \in B)$ şi $(x \notin B$ sau $x \in A)] \Leftrightarrow (x \in A$ şi $x \notin B$ şi $x \notin C)$ sau $(x \in B$, $x \notin A$ şi $x \notin C)$ sau $\{x \in C$ şi $[(x \notin A$ şi $x \notin B)$ sau $(x \notin A$ şi $x \in A)$ sau $(x \in B$ şi $x \notin B)$ sau $(x \in B$ şi $x \in A)]\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in A$ şi $x \notin B$ şi $x \notin C)$ sau $(x \in B$ şi $x \notin A$ şi $x \notin C)$ sau $(x \in C$ şi $x \notin A$ şi $x \notin B)$ sau $(x \in A$ şi $x \in B$ şi $x \in C)$.

Notînd această ultimă propoziţie cu $P[A, B, C]$ am demonstrat că :

$$x \in (A \Delta B) \Delta C \Leftrightarrow P[A, B, C].$$

Să observăm că înlocuind în $P[A, B, C]$ pe $A$ cu $B$, pe $B$ cu $C$ și pe $C$ cu $A$, obținem o propoziție echivalentă cu $P[A, B, C]$, pe care o notăm prin $P[B, C, A]$ deci $P[A, B, C] \Leftrightarrow P[B, C, A]$.

Avem $x \in (B \Delta C)\Delta A \Leftrightarrow P(B, C, A]$ și deoarece $P[B, C, A] \Leftrightarrow P[A, B, C]$, avem $x \in (B \Delta C)\Delta A \Leftrightarrow P[A, B, C] \Leftrightarrow x \in (A \Delta B) \Delta C$, și deci $x \in (A \Delta B) \Delta C \Leftrightarrow x \in A \Delta(B \Delta C)$, adică $(A \Delta B) \Delta C \subset A \Delta(B \Delta C)$ și $A \Delta(B \Delta C) \subset (A\Delta B)\Delta C$, deci $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

Dacă vreuna din mulțimile care au intervenit mai înainte este vidă, egalitatea din enunț este, de asemenea, adevărată.

**I. 2.29ro.** Să se rezolve ecuația :

$$A \Delta X = B,$$

$A$ și $B$ fiind mulțimi oarecare.

**R.** *Soluția I.* Avem, evident :

$$A \Delta (A \Delta X) = A \Delta B,$$

deci :

$$(A \Delta A) \Delta X = A \Delta B.$$

Dar $A \Delta A = (A - A) \cup (A - A) = \Phi$ și $\Phi \Delta X = (\Phi - X) \cup \cup (X - \Phi) = X$, deci ecuația devine :

$$\Phi \Delta X = A \Delta B,$$

de unde $X = A \Delta B$.

*Soluția a II-a.* Fie $T$ o mulțime oarecare și $\mathscr{P}(T)$ familia submulțimilor sale.

Definim funcția $\lambda : T \times \mathscr{P}(T) \to \{0, 1\}$ astfel :

$$\lambda((x ; A)) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } x \notin A, \\ 1 \text{ dacă } x \in A, \end{cases}$$

numită *funcție caracteristică.* Se verifică imediat următoarele proprietăți :

a°). $\lambda((x ; \Phi)) = 0$, $(\forall)$ $x \in T$ ;

b°). $\lambda((x ; T)) = 1$, $(\forall)$ $x \in T$ ;

c°). $\lambda^2((x ; A)) = \lambda((x ; A))$, $(\forall)$ $x \in T$, $A \in \mathscr{P}(T)$ ;

d°). $\lambda((x ; A \cup B)) = \lambda((x ; A)) + \lambda((x ; B)) - \lambda((x ; A)) \lambda((x ; B))$,
$(\forall)$ $x \in T$, $A$, $B \in \mathscr{P}(T)$ ;

e°). $\lambda((x ; A \cap B)) = \lambda((x ; A)) \cdot \lambda((x ; B))$, $(\forall)$ $x \in T$, $A$, $B \in \mathscr{P}(T)$ ;

f°). $\lambda((x ; A\Delta B)) = \lambda((x ; A)) + \lambda((x ; B)) - 2\lambda((x ; A)) \cdot \lambda((x ; B))$,
$(\forall) x \in T$, $A$, $B \in \mathscr{P}(T)$ ;

g°). $\lambda((x ; A)) = \lambda((x ; B))$, $(\forall)$ $x \in T \Leftrightarrow A = B$ ;

h°). $\lambda((x ; A - B)) = \lambda((x ; A)) - \lambda((x ; A)) \cdot \lambda((x ; B))$, $(\forall) x \in T$,
$A$, $B \in \mathscr{P}(T)$.

În adevăr, a°) și b°) rezultă conform definiției. Afirmația c°) rezultă din următorul raționament:

1°). Dacă $x \in A$ și $x \in B$ atunci $\lambda((x; A \cup B)) = \lambda((x; A)) = \lambda((x; B)) = 1$ și formula se verifică;

2°). Dacă $x \notin A$ și $x \notin B$ atunci: $\lambda((x; A \cup B)) = \lambda((x; A) = \lambda((x; B)) = 0$ și, de asemenea, formula se verifică;

3°). Dacă $x \in A$ și $x \notin B$ atunci $\lambda((x; A \cup B)) = \lambda((x; A)) = 1$, $\lambda((x; B)) = 0$ și formula se verifică;

4°). Dacă $x \notin A$ și $x \in B$ atunci $\lambda((x; A \cup B)) = \lambda((x; B)) = 1$, $\lambda((x; A)) = 0$ și formula se verifică.

Celelalte formule se verifică analog.

Pentru a trece la rezolvarea problemei propuse, să demonstrăm în prealabil asociativitatea diferenței simetrice:

$$A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta)B\Delta C$$

În acest sens, vom nota în loc de $\lambda((x; A))$, prin $\lambda(A)$. Avem:

$$\lambda((A\Delta B)\Delta C) = \lambda(A\Delta B) + \lambda(C) - 2\lambda(A\Delta B)\cdot\lambda(C) =$$
$$= \lambda(A) + \lambda(B) + \lambda(C) - 2\,\lambda(A)\cdot\lambda(B) - 2\lambda(A)\cdot\lambda(C) -$$
$$- 2\lambda(B)\lambda(C) + 4\,\lambda(A)\cdot\lambda(B)\cdot\lambda(C),$$

și:

$$\lambda(A\Delta(B\Delta C)) = \lambda(A) + \lambda(B\Delta C) - 2\lambda(A)\lambda(B\Delta C) =$$
$$= \lambda(A) + \lambda(B) + \lambda(C) - 2\lambda(A)\lambda(B) - 2\lambda(A)\lambda(C) - 2\lambda(B)\lambda(C) +$$
$$+ 4\lambda(A)\lambda(B)\lambda(C),$$

deci:

$$\lambda((A \Delta B) \Delta C) = \lambda(A \Delta (B \Delta C)),$$

adică:

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C).$$

Încă:

$$A\Delta A = \emptyset,\ (\forall)\ A \in \mathscr{P}(T).$$

Din egalitatea:

$$A\Delta X = B$$

rezultă, evident:

$$A\Delta(A\Delta X) = A\Delta B$$

deci și:

$$(A\Delta A)\Delta X = A\Delta B$$

sau, cum $\emptyset\Delta X = X$:

$$X = A\Delta B.$$

**I. 2.30**$^{\mathrm{ro}}$. Să se determine mulțimile $A$ și $B$ incluse în $E$, astfel ca:

a). $A\Delta B = \{2, 4, 5, 8, 9, 10\}$.

b). $A \cup B = \{1, 3\}$.

c). $\complement_E A = \{5, 6, 7, 9, 10\}$.

d). $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

**R.** Ţinînd seama de condiţiile c), d) şi de faptul că $A \subset E$, obţinem $A = \{1, 2, 3, 4, 8\}$. Din $A = \{1, 2, 3, 4, 8\}$, şi $A \cap B = \{1, 3\}$, rezultă $A - B = \{2, 4, 8\}$ şi deci $2 \notin B, 4 \notin B, 8 \notin B$. Avem:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{2, 4, 8\} \cup (B - A) = \{2, 4, 5, 8, 9, 10\}.$$

Din $5 \in \{2, 4, 8\} \cup (B - A)$ rezultă $5 \in B - A$, deci $5 \in B$ şi, analog, $9 \in B$, $10 \in B$.

Deoarece $6 \notin A$ avem şi $6 \notin B$ căci dacă $6 \in B$ atunci $6 \in B - A$ şi ar rezulta $6 \in \{2, 4, 8\} \cup (B - A) = \{2, 4, 5, 8, 9, 10\}$, deci $6 \in \{2, 4, 5, 8, 9, 10\}$, ceeea ce este fals. La fel, $7 \notin B$.

Astfel: $1 \in B$, $2 \in B$, $3 \in B$, $4 \notin B$, $5 \in B$, $6 \notin B$, $7 \notin B$, $8 \notin B$, $9 \in B$, $10 \in B$ şi deci $B = \{1, 3, 5, 9, 10\}$.

**I. 2.31**PO. a). Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se rezolve sistemul:

$$\bigcap_{i=1}^{n} X_i = A\,; \left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right) - A = B,$$

necunoscutele fiind mulţimile $X_i \in \mathcal{P}(T)$, $(\forall) i \in \overline{1, n}$, cunoscînd $A$, $B \in \mathcal{P}(T)$, $T$ fiind o mulţime totală, că $B$ şi $N_n = \{m \mid m \in \mathbb{N}^*, m \leqslant n\}$, respectiv $A$ şi $N_m = \{n \mid n \in \mathbb{N}^*, n \leqslant m\}$ şi $X_i$, respectiv $X_j$ sînt echipotente, oricare ar fi $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2$.

b). Să se rezolve sistemul de mai sus, înlocuind condiţia ca $B$ să fie echipolentă cu $N_n$, cu aceea ca $B$ să fie echipolentă cu $N_{nk}$.

**R.** a). Fie:

$$A = \{a_1, \ldots, a_m\}, \ B = \{b_1, \ldots, b_n\}.$$

Are loc, aplicînd de exemplu, relaţiile lui De Morgan:

$$B = \left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right) - A = \bigcup_{i=1}^{n} (X_i - A).$$

Deoarece:

$$\bigcup_{i=1}^{n} (X_i - A) = \emptyset,$$

iar $X_i$ este echipotent cu $X_j$, rezultă că $X_i - A$ este echipotentă cu $X_j - A$, oricare ar fi $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$; cum $B$ este echipotentă cu $N_n$, rezultă că $X_i - A$ este echipotentă cu $N_1$, oricare ar fi $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Prin urmare, soluţiile sistemului sînt:

$$X_i = A \cup \{b_{\pi(i)}\}, \ i = \overline{1, n},$$

unde:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

este o permutare arbitrară aparţinînd grupului simetric $S_n$ al permutărilor de $n$ obiecte.

b). Fie:

$$A = \{a_1, \ldots, a_m\}, \ B = \{b_1, \ldots, b_{nk}\}.$$

Avem, de asemenea :

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} (X_i - A)$$

deci rezolvarea sistemului revine la găsirea mulţimilor :

$$X_i - A, \ i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Dar :

$$\bigcap_{i=1}^{n} (X_i - A) = \emptyset, \quad \bigcup_{i=1}^{n} (X_i - A) = B,$$

deci $X_i - A$ este echipotentă cu $X_j - A$, oricare ar fi $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, deci $X_i - A$ este echipotentă cu $N_k$, oricare ar fi $i \in \{1, \ldots, n\}$. Considerăm mulţimea $\mathscr{P}_k(B)$ a tuturor părţilor cu $k$ elemente ale mulţimii $B$, mulţime care va avea $C_{nk}^{k}$ elemente.

Cu ajutorul lui $\mathscr{P}_k(B)$ formăm sistemele :

$$(C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

de cîte $n$ mulţimi $C_i \in \mathscr{P}_k(B)$, cu proprietăţile :

$$C_i \cap C_j = \emptyset, \ (\forall) i, \ j \in \{1, \ldots \ n\}, \ i \neq j,$$

şi :

$$\bigcup_{i=1}^{n} C_i = B.$$

Pentru fiecare sistem $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$, punînd :

$$X_i - A = C_i, \ i \in \{1, \ldots, n\}$$

rezultă :

$$X_i = A \cup C_i, \ i \in \{1, \ldots, n\}.$$

**I. 2.32**[ro]. Se dau mulţimile finite $A_1, A_2, \ldots, A_n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, care au acelaşi număr de elemente şi se notează :

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Pentru un indice $k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, fixat, orice reuniune de $k$ mulţimi dintre $A_1, A_2, \ldots, A_n$ este egală cu $S$, iar orice reuniune de mai puţin de $k$ mulţimi este o submulţime proprie a lui $S$.

Să se exprime în funcţie de $n$ şi $k$ :

a). Numărul minim de elemente din $S$ ;

b). Numărul elementelor din fiecare mulţime $A_j$, cînd numărul elementelor lui $S$ este minimal ;

c). Numărul elementelor comune la $j$ dintre mulţimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$, cînd $S$ are un număr minim de elemente.

**R.** a). Fie :

$$N_1 = \{1, 2, 3, \ldots, n\},$$

şi pentru orice $x \in S$ notăm :

$$M(x) \overset{\text{def.}}{=} \{i \mid i \in N_1, x \in A_i\}.$$

Fie $T$ o submulţime a lui $N_1$ cu $n+1-k$ elemente. Numărul de elemente din $\complement_T N_1$ este $k-1$ deci:

$$\bigcup_{i \notin T} A_i = S.$$

Fie $x \in S$ şi $x \in \bigcup_{i \notin T} A_i$. Conform enunţului:

$$(\bigcup_{i \notin T} A_i) \cup A_j = S,$$

pentru orice $j \in T$ deoarece reuniunea din membrul stîng conţine $k$ mulţimi. În concluzie $x \in A_j$ şi:

$$M(x) = T.$$

Aşadar, oricărui $T$ cu $n+1-k$ elemente cu proprietatea că $T \subset N_1$, am asociat un element $x \in S$ cu proprietatea că:

$$M(x) = T.$$

Această aplicaţie este injectivă. În adevăr, dacă $T_1 \neq T_2$, atunci pentru elementele corespunzătoare are loc $x_1 \neq x_2$. În caz contrar are loc $x_1 = x_2 = x$ şi avem $x \notin \bigcup_{i \notin T_1} A_i$ şi $x \in A_j$ pentru orice $j \in T_1$, şi, de asemenea, $x \notin \bigcup_{i \in T_2} A$ şi $x \in A_j$ pentru orice $j \in T_2$. Cum mulţimile cu $n+1-k$ elemente $T_1$ şi $T_2$ sînt diferite, rezultă că există un element $t \in T_1$ şi $t \notin T_2$, deci $x \in A_i$ şi $x \notin \bigcup_{i \notin T_2} A_i$, deci $x \in A_t$, contradicţie.

Rezultă că numărul elementelor din $S$, pe care îl notăm cu $|S|$, este mai mare sau egal cu $C_n^{n+1-k} = C_n^{k-1}$, fiind numărul de submulţimi, ale lui $N_1$ cu $n+1-k$ elemente.

b) Avem, evident, $|S| = C_n^{k-1}$ cînd aplicaţia de mai înainte este surjectivă, deci bijectivă. Cu alte cuvinte:

$$|M(x)| = n+1-k, \ (\forall) \ x \in S.$$

Deci:

$$|A_i| = |\{x | i \in M(x)\}| = C_{n-1}^{k-1},$$

adică numărul submulţimilor lui $N_1$ cu $n+1-k$ care conţin elementul $i$.

c) Cînd mulţimea $S$ are un număr minim de elemente, egal cu $C_n^{k-1}$, fiecare $x \in S$ aparţine la $n+1-k$ mulţimi $A_i$. Elementul $x$ aparţine la $j$ dintre mulţimile $A_i$ cînd indicii corespunzători aparţin toţi lui $M(x)$.

Deci, numărul elementelor comune la $j$ dintre mulţimile $A_i$, este egal cu numărul submulţimilor lui $N_1$ cu $n+1-k$ elemente, care conţin $j$ elemente date, adică cu:

$$C_{n-j}^{n+1-k-j} = C_{n-j}^{k-1}.$$

## §.3. Expresii algebrice, funcţii, inegalităţi

**I.3.1^M.** Fie funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} 3x-4, & \text{dacă } x < -1 \\ -7, & \text{dacă } -1 \leqslant x < 3 \\ -3x+2, & \text{dacă } \quad x \geqslant 3 \end{cases}$$

Să se determine : $f(-2)$ ; $f(-1)$ ; $f(2)$ ; $f4)$.

**R.** Evident, avem :

$$f(-2) = 3(-2)-4 = -10 \; ; \; f(-1) = f(2) = -7 \; ; \; f(4) = -3(4)+2 = -10.$$

**I.3.2$^{\mathrm{M}}$.** Să se determine numărul tuturor funcţiilor definite pe mulţimea $\{1, 2\}$ cu valori în mulţimea $\{3, 5\}$.

**R.** Vom demonstra enunţul în cazul general, şi anume, vom arăta că, considerînd două mulţimi finite $M$ şi $N$, avînd $m$, respectiv $n$ elemente, atunci numărul funcţiilor definite pe $M$ cu valori în $N$ este $m^n$. Astfel, demonstrăm afirmaţia prin inducţie după $m$. Dacă $m = 1$, atunci mulţimea $M$ se reduce la un element şi este clar că există $n$ funcţii de la $M$ la $N$. Presupunem că afirmaţia este adevărată şi pentru mulţimile $M$ care au cel mult $m-1$ elemente. Fie $M$ o mulţime cu $m$ elemente şi fie $x_0 \in M$. Atunci putem scrie :

$$M = M' \cup \{x_0\},$$

unde $M'$ are $m - 1$ elemente.

Oricărei funcţii $f: M \to N$ îi putem asocia restricţia sa la $M'$, şi anume funcţia $g: M' \to N$, dată de :

$$g(x) = f(x).$$

Dacă $g: M' \to N$ este o funcţie, obţinem pentru fiecare $y \in \mathbb{N}$ o funcţie $f_g^y: M \to N$, astfel :

$$f_g^y(x) = \begin{cases} g(x), & \text{dacă } x \in M', \\ y, & \text{dadă } x = x_0. \end{cases}$$

Aşadar, oricărei funcţii $g: M' \to N$ îi putem asocia $n$ funcţii distincte de la $M$ la $N$, ale căror restricţii la $M'$ sînt egale cu $g$. Deci, numărul funcţiilor de la $M$ la $N$ este $n \cdot n^{m-1} = n^m$. Pentru cazul $n = m = 2$, se obţine $2^2 = 4$ funcţii.

**I.3.3$^{\mathrm{M}}$.** Fie funcţia $f: \mathbb{Z} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ definită după legea : $f(x)$ este restul împărţirii lui $x$ la 6. Să se determine $f(-12)$, $f(-9)$, $f(3)$, $f(9)$, $f(272)$.

**R.** Folosind teorema împărţirii cu rest pentru numerele $x$ şi 6, există $q \in \mathbb{Z}$ pentru care :

$$x = 6q + f(x),$$

cu $0 \leqslant f(x) < 6$.

De aici, pentru $x = -12$, se obţine $q = -2$ şi deci $f(-12) = 0$. Pentru $x = -9$, pentru $q = -2$ şi deci $f(-9) = 3$.

Analog, $f(3) = f(9) = 3$ ; $f(272) = 2$.

**I.3.4$^{\mathrm{M}}$.** Există un număr întreg $m$, astfel încît să existe o funcţie $f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ definită prin formula :

$$f(x) = x^2 + m?$$

**R.** Presupunem că există o astfel de funcţie Atunci :

$$f(1) = 1 + m \; ; \; f(2) = 4 + m \; ; \; f(3) = 9 + m.$$

Dar $\{f(1), f(2), f(3)\} = \{1 + m, 4 + m, 9 + m\} = \{1, 2, 3\}$.

Atunci dacă $1 + m = 1$, avem $m = 0$, și astfel:

$$\{1, 4, 9\} = \{1, 2, 3\},$$

imposibil. Dacă $1 + m = 2$, atunci $m = 1$, și am avea:

$$\{2, 5, 10\} = \{1, 2, 3\},$$

imposibil. În sfîrșit, dacă $1 + m = 3$, atunci $m = 2$ și:

$$\{3, 6, 11\} = \{1, 2, 3\},$$

imposibil. Deci nu există un întreg $m$ cu proprietățile din enunț.

**I.3.5$^M$.** Să notăm cu $A$ mulțimea oamenilor de pe glob. Definim funcția $f : A \to \mathbb{R}$ după legea" $f(x)$ = înălțimea lui $x$". Este $f$ injectivă? Dar surjectivă?

**R.** Funcția $f$ nu este injectivă pentru că întotdeauna se pot găsi două persoane distincte care să aibă aceeași înălțime; $f$ nu este nici surjectivă pentru că $f(x) \geqslant 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

**I.3.6$^M$.** Fie $A$ o mulțime cu $m$ elemente. Să se construiască toate funcțiile de la $A$ la $A$ și să se precizeze care sînt bijective, injective, surjective. Caz particular $A = \{0, 1\}$.

**R.** Am văzut că mulțimea tuturor funcțiilor de la $A$ în $A$ este, dacă $A$ are $m$ elemente, $m^m$.

Vom arăta că numărul funcțiilor bijective de la $A$ la $A$ este $m!$, și vom folosi principiul inducției după $m$. Dacă $m = 1$, există o singură funcție bijectivă de la $A = \{x\}$ la $A = \{x\}$. Să presupunem că am demonstrat afirmația pentru toate mulțimile $A$ avînd $m - 1$ elemente.

Fie $A$ o mulțime cu $m$ elemente. Să alegem un element $m \in A$. Atunci putem scrie: $A = A' \cup \{x\}$, unde $A'$ are $m - 1$ elemente. Orice funcție bijectivă $f$ este perfect determinată de valoarea $f(x) \in A$ și de o funcție bijectivă $g : A' \to A''$ unde $A'' = A - \{f(x)\}$. Putem alege pe $f(x)$ în $m$ moduri, iar pe $g$ în $(m - 1)!$ moduri, conform ipotezei de inducție.

Deci putem defini $m(m - 1)! = m!$ funcții bijective de la $A$ la $A$.

Pentru cazul $m = 2$, se construiesc $2! = 2$ funcții bijective.

**I.3.7$^M$.** Să se determine numărul funcțiilor injective de la mulțimea $A = \{1, 2\}$ în mulțimea $B = \{3, 5, 7\}$. Există funcții surjective de la $A$ la $B$?

**R.** Vom determina numărul funcțiilor injective definite pe o mulțime $A$ cu $m$ elemente cu valori în mulțimea $B$ cu $n$ elemente, unde $m \leqslant n$, și să arătăm că ele sînt în număr de $A_n^m$. Astfel, fie $f : A \to B$ o funcție injectivă. Atunci elementele $f(x)$, $x \in A$, determină o submulțime $f(A)$ cu $m$ elemente a lui $B$, iar $f$ determină o aplicație bijectivă $g : A \to f(A)$, dată de $g(x) = f(x)$.

Reciproc, dacă luăm în $B$ o parte $P$ avînd $m$ elemente, atunci putem stabili $m$ funcții bijective $g : A \to P$, care sînt de fapt funcții injective $f : A \to B$.

Cum avem $C_n^m$ astfel de submulțimi $P$ ale lui $B$, rezultă că putem construi $m!\, C_n^m = A_n^m$ funcții injective de la $A$ la $B$.

Pentru cazul nostru $n = 3$, $m = 2$, avem $A_3^2 = 6$ funcții injective, și nu există funcții surjective.

**I.3.8^M.** Notăm cu $A$ mulțimea orașelor țării noastre, iar $B$ mulțimea județelor țării noastre. Definim funcția $f: A \to B$, după legea „$f(a)$ = județul pe teritoriul căreia se află $a$' ',și funcția $g: B \to A$, după legea „$g(b)$=orașul care este reședința județului $b$".

i) Cine este $f$ (*Galați*) și $f$(*Făgăraș*)? Cine este $g$(*Teleorman*) și $g$(*Mehedinți*)?

ii) Să se arate că $f$ este surjectivă și $g$ injectivă.

iii) Să se arate că $f \circ g = \mathbf{1}_B$ și $g \circ f \neq \mathbf{1}_A$.

**R.** i) Avem :

$f$(*Galați*) = *Galați* ; $f$(*Făgăraș*) = *Brașov* ; $g$(*Teleorman*) = *Alexandria*, $g$(*Mehedinți*) = *Drobeta-Turnu-Severin*.

ii) $f$ este surjectivă pentru că fiecare județ are cel puțin un oraș si anume reședința județului.

$g$ este injectivă deoarece la județe diferite corespund reședințe de județ diferite.

iii) Avem :

$(f \circ g): B \to B$ ; $(f \circ g)$(*județul X*) = $f(g$(*județul X*)) = $f$(*reședidța județului X*) = *județul X* ; deci :

$$f \circ g = \mathbf{1}_B.$$

**I.3.9^M.** Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite respectiv prin formulele :

$$f(x) = x^2 + x - 1 \; ; \; g(y) = y^2 - y + 1.$$

Să se determine $g \circ f$, $f \circ g$.

**R.** Avem :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f^2(x) - f(x) + 1 = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 3;$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g^2(x) + g(x) - 1 = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 3.$$

**I.3.10^M.** Considerăm funcțiile: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{dacă } x \leq 0 \\ 7x & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$

și :

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leq -2, \\ 2x - 1, & \text{dacă } x > -2. \end{cases}$$

Să se determine $g \circ f$ si $f \circ g$.

**R.** Pentru $x \leq 0$, avem $f(x) < -2$, și deci :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 = (2x - 3)^2.$$

Pentru $x > 0$, avem $f(x) > 0$ și deci :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) - 1 = 14x - 1.$$

Pentru $x \leq -2$, avem $g(x) = x^2 > 0$ și deci :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 7g(x) = 7x^2.$$

Pentru $x \in \left(-2, \dfrac{1}{2}\right]$, avem $g(x) = 2x - 1 \leq 0$ și deci :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) - 3 = 2(2x - 1) - 3 = 4x - 5.$$

Pentru $x > \dfrac{1}{2}$, avem $g(x) > 0$ și deci :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 7g(x) = 7(2x - 1) = 14x - 7.$$

Deci :

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}(2x-3)^2, & \text{dacă } x\leq 0,\\ 14x-1, & \text{dacă } x>0;\end{cases}$$

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}7x^2, & \text{dacă } x\leq -2,\\ 4x-5, & \text{dacă } -2<x\leq \dfrac{1}{2},\\ 14x-7, & \text{dacă } x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

**I.3.11$^{\mathrm{M}}$.** Fie $A$ o mulțime finită și $f: A \to A$ o funcție. Să se arate că următoarele afirmații sînt echivalente :

i) $f$ este injectivă ;

ii) $f$ este surjectivă ;

iii) $f$ este bijectivă.

**R.** i) $\Rightarrow$ ii). Demonstrăm mai întîi că dacă $f$ este injectivă, atunci $f$ este și surjectivă. Fie $n$ numărul de elemente ale mulțimii $A$. Avem că $f: A \to f(A)$ este bijecție. Deci, numărul elementelor lui $f(A)$ este tot $n$. Dar din $f(A) \subseteq A$, rezultă $f(A)= A$.

ii) $\to$ iii) Rămîne să dovedim doar că $f$ este injectivă.

Să presupunem, prin absurd, că $f$ nu este injectivă. Atunci există $x \neq y$ din $A$, astfel încît $f(x) = f(y)$. Așadar, în mulțimea $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ există cel mult $n - 1$ elemente, ceea ce este în contradicție cu faptul că $f(A) = A$.

iii) $\Rightarrow$ i). Evident.

**I. 3.12$^{\mathrm{M}}$.** Considerăm funcțiile $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Să se arate că :

i) dacă $g\circ f$ este injectivă, atunci $f$ este injectivă ;

ii) dacă $g\circ f$ este surjectivă, atunci $g$ este surjectivă.

**R.** i) Fie $x, y \in A$, astfel ca $f(x) = f(y)$. Atunci, rezultă $(g\circ f)(x) = (g\circ f)(y)$, și, deoarece $g\circ f$ este injectivă, rezultă $x = y$.

ii) Deoarece $g\circ f$ este funcție surjectivă, pentru $z \in C$, există $x \in A$ astfel încît $(g\circ f)(x) = z$ ; atunci se observă că $y = f(x)$ are proprietatea că $g(y) = z$.

*Observație.* Analog se arată că dacă $f$ și $g$ sînt injective, atunci $g\circ f$ este injectivă, iar dacă $f$ și $g$ sînt surjective, atunci $g\circ f$ este surjectivă.

**I. 3.13$^{\mathrm{M}}$.** Fie $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funcția definită prin :
$f(0) = 1$ ; dacă $n \geq 1$, atunci $f(n)$ este ultima cifră a numărului $7^n$.

i) Calculați $f(1), f(2), \ldots, f(7)$.

ii) Să se arate că $f(n + 4) = f(n)$, $(\forall) n \geq 1$,

**R.** i) Avem :
$f(1) = 7$ ; $f(2) = 9$ ; $f(3) = 3$ ; $f(4) = 1$ ;
$f(5) = 7$ ; $f(6) = 9$ ; $f(7) = 3$.

Să observăm că $7^{4k+t}=(7^4)^k 7^t$, $t \in \{0, 1, 2, 3\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Cum $7^4$ se termină cu cifra 1, $(7^4)^k$ se va termina tot în 1, și deci $7^{4k+t}$ se termină în aceeași cifră cu $7^t$, cu $t \in \{0, 1, 2, 3\}$. Deci $f(n + 4) = f(n)$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

**I. 3.14**$^{M}$. Fie funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de :

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \geqslant 0, \\ 3x, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Să se arate că $f$ este bijectivă şi să se determine inversa sa.

**R.** Evident, pentru $x \geqslant 0$, funcţia $g_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $g_1(x) = 2x$ este bijectivă, iar pentru $x < 0$, funcţia $g_2 : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}_-^*$, dată de $g_2(x) = 3x$ este bijectivă, deci $f$ este bijectivă. Inversa sa este : $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x, & x \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{3}x, & x < 0. \end{cases}$$

**I.3.15**$^{T}$. Să se simplifice fracţia :

$$\frac{6x^2 - 13ax + 6a^2}{3x^2 - 5ax + 2a^2}.$$

**R.** Fracţia devine, succesiv :

$$\frac{(2x - 3a)(3x - 2a)}{3x(x - a) - 2a(x - a)}.$$

sau :

$$\frac{2x - 3a}{x - a}.$$

**I. 3.16**$^{T}$. Să se simplifice fracţia :

$$F(x) = \frac{8x^2 + 2x - 3}{4x^2 - x - 3}.$$

**R.** Se ştie că descompunerea trinomului $ax^2 + bx + c$ în factori liniari este $a(x - x_1)(x - x_2)$, $x_1$ şi $x_2$ fiind rădăcinile ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$. Aşadar :

$$F(x) = \frac{8\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{4}\right)}{4(x - 1)\left(x + \frac{3}{4}\right)} = \frac{2x - 1}{x - 1}.$$

**I. 3.17**$^{T}$: a). Să se simplifice fracţia :

$$F(a\,;x) = \frac{ax - 6 + 3x - 2a}{ax + 6 - 3x - 2a};$$

b) Să se determine valorile întregi ale lui $a$ pentru care $F(a, x)$ este un număr întreg.

c) Să se determine valorile lui $a$ pentru care $F(a\,;x) < 3$.

**R.** a) Fracția are forma echivalentă:

$$F(a, x) = \frac{a+3}{a-3}.$$

b) Condiția revine la $(a+3)/(a-3) \in \mathbb{Z}$ sau $(a-3)|6$, de unde:

$$a \in \{-3, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 9\}.$$

c) Condiția revine la $\frac{a+3}{a-3} < 3$, sau:

$$a \in (-\infty, 3) \cup (6, \infty).$$

**I.3.18**$^{\mathrm{T}}$. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E(x) = \frac{(m+1)\,x^2-2(m-1)x-8}{2x^2+(m-4)\,x-2m}.$$

**R.** Transformînd în produse atît numărătorul cît și numitorul expresiei, obținem:

$$E = \frac{(m+1)\,x+4}{2x+m}$$

**I.3.19**$^{\mathrm{Po}}$. Să se determine toate funcțiile $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, care verifică proprietățile:

a) $f(x) \geqslant 0$, $(\forall)$ $x \in [1, \infty)$;

b) $f(xy) = f(x) + f(y)$, $(\forall)$ $x, y \in (0, \infty)$.

**R.** Dacă în relația:

$$f(xy) = f(x) + f(y),\ (\forall)\ x, y \in (0, \infty) \tag{1}$$

facem $x = y$, obținem:

$$f(x^2) = 2f(x),\ (\forall)\ x \in (0, \infty) \tag{2}$$

de unde, folosind metoda inducției matematice complete, avem:

$$f(x^n) = nf(x),\ (\forall)\ x \in (0, \infty),\quad (\forall)\ n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Făcînd, în (2), $x = 1$, obținem $f(1) = 0$. Deoarece:

$$f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) = 0,$$

obținem:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x),$$

și, deci:

$$f(x^{-n}) = nf(x^{-1}) = -nf(x).$$

Deoarece:

$$q \cdot f(x^{\frac{p}{q}}) = f(x^p) = pf(x), (\forall)\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0,\quad (\forall)\ x \in (0, \infty),$$

rezultă:

$$f(x^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q} f(x).$$

Dar funcția $f$ este strict crescătoare. În adevăr, dacă $0 < x < y$, atunci există $k > 1$ astfel încît:

$$y = kx,$$

și deci:

$$f(y) = f(kx) = f(x) + f(k) > f(x),$$

deoarece, prin ipoteză, $f(k) \geqslant 0$.

Fie acum $\alpha$ irațional. Presupunem că:

$$f(x^\alpha) < \alpha f(x).$$

Rezultă atunci că există $r \in \mathbb{Q}$ astfel încît:

$$f(x^\alpha) < rf(x) < \alpha f(x)$$

deci:

$$f(x^\alpha) < f(x^r),$$

deci:

$$x^\alpha < x^r,$$

de unde, alegînd $x > 1$ ($0 < x < 1$, analog iar pentru $x = 1$, $f(1^\alpha) = \alpha f(1) = 0$) implică $\alpha < r$. Pe de altă parte, ținînd cont că $f(x) > 0$, rezultă $r < \alpha$ adică în contradicție cu $\alpha < r$.

Analog se arată că nu putem avea:

$$f(x^\alpha) > \alpha f(x).$$

Rezultă deci:

$$f(x^\alpha) = \alpha f(x),\ (\forall)\ x \in \mathbb{R},\ (\forall) \alpha \in \mathbb{R}.$$

Fie, în final, $x = 10$; atunci pentru orice $t \in \mathbb{R}$ există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încît $t = 10^\alpha$. De aici, $\alpha = \lg t$, deci $f(t) = f(10) \cdot \lg t$.

**I.3.20$^{Po}$.** Să se afle funcția bijectivă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ așa încît:

a) $f(x + y) \geqslant f(x) + f(y)$;

b) $f(xy) \geqslant f(x)\ f(y)$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

**R.** Punînd în relațiile date în enunț $x = y = 0$, rezultă:

$$f(0) \leqslant 0,\ f(0) \geqslant [f(0)]^2,$$

sau, din a doua relație anterioară :

$$f(0)\ [1 - f(0)] \geqslant 0,$$

de unde :

$$1 - f(0) \leqslant 0,$$

sau $f(0) \geqslant 1$. Cum relațiile $f(0) \leqslant 0$ și $f(0) \geqslant 1$ sînt contradictorii, rezultă cu necesitate $f(0) = 0$.

Făcînd în a doua relație din enunț $x = y = 1$, obținem :

$$f(1) \geqslant [f(1)]^2 \geqslant 0,$$

și, în același timp :

$$f(1)\ [1 - f(1)] \geqslant 0.$$

Dacă $f(1) = 0$, din a doua relație din enunț rezultă, făcînd $y = 1$, că $f(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$. Dacă în prima relație punem $x + y = 1$, obținem :

$$f(x) + f(1 - x) \leqslant 0,\ (\forall)\ x \in \mathbb{R},$$

de unde, cum $f(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, rezultă că $f(x) = 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$ conform faptului că $f$ este bijectivă.

Deci $f(1) \neq 0$, adică $f(1) > 0$. Așadar, revenind la relațiile obținute anterior, găsim că :

$$0 < f(1) \leqslant 1.$$

Fie acum $x = 1$, $y = -1$, în prima relație, și $x = y = -1$ în a doua relație. Rezultă :

$$0 = f(0) = f(-1 + 1) \geqslant f(1) + f(-1),$$

deci :

$$f(-1) \leqslant -f(1) < 0,$$

adică $f(-1) < 0$ și :

$$1 \geqslant f(1) = f[(-1)(-1)] \geqslant [f(-1)]^2,$$

de unde :

$$-1 \leqslant f(-1) \leqslant 1.$$

Punînd acum $x = -1$, $y = 1$ în a doua relație găsim :

$$f(-1) \geqslant f(1)f(-1)$$

adică :

$$f(-1)\ [1 - f(1)] \geqslant 0.$$

Însă $f(-1) < 0$, deci $1 - f(1) \leqslant 0$, adică $f(1) \geqslant 1$, deci, cum am arătat că $f(1) \leqslant 1$, rezultă $f(1) = 1$. Făcînd în prima relație din enunț $x = 1$, $y = -1$, rezultă:

$$0 = f(0) \geqslant f(1) + f(-1),$$

adică $f(-1) \leqslant -1$. Cum avem şi $f(-1) \geqslant -1$, rezultă :

$$f(-1) = -1$$

Punînd în prima relaţie din enunţ $y = -x$, iar în a doua $y = -1$, obţinem :

$$0 \geqslant f(-x) + f(x),$$

$$f(-x) \geqslant f(x)f(-1) = -f(x),$$

deci :

$$f(x) = -f(-x).$$

Să arătăm acum că oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$, are loc :

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

$$f(xy) = f(x)\ f(y).$$

În adevăr, punînd în prima relaţie din enunţ $x \to x + y$, $y \to -y$, obţinem :

$$f(x) \geqslant f(x + y) + f(-y),$$

de unde :

$$f(x) + f(y) \geqslant f(x + y),$$

deci :

$$f(x) + f(y) = f(x + y)$$

(căci inegalitatea contrară este dată de enunţ). Punînd în a doua relaţie din enunţ $x \to -x$, rezultă :

$$f(-xy) \geqslant f(-x)\,f(y),$$

sau :

$$-f(xy) \geqslant -f(x)f(y),$$

deci :

$$f(xy) \leqslant f(x)f(y),$$

adică, împreună cu a doua relaţie din enunţ :

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

Aşadar :

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \tag{1}$$

$$f(xy) = f(x)f(y), \tag{2}$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

Cum $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$, rezultă, folosind principiul inducţiei matematice complete, că $f(z) = z$, $(\forall)\ z \in \mathbb{Z}$. De asemenea, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ :

$$1 = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = f(n) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right),$$

de unde:

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n},$$

și deci:

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(m\cdot\frac{1}{n}\right)=f(m)\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)=m\cdot\frac{1}{n}=\frac{m}{n},\quad (\forall)\ m\in\mathbb{Z}.$$

Așadar:

$$f(q)=q,\ (\forall)\ q\in\mathbb{Q}.$$

Pentru orice $\varepsilon>0$, are loc:

$$f(\varepsilon)=f(\sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{\varepsilon})=[f(\sqrt{\varepsilon})]^2,$$

deci $f(\varepsilon)\geqslant 0$. Rezultă de aici că, dacă $x-y\geqslant 0$, atunci:

$$f(x-y)=f(x)-f(y)\geqslant 0,$$

deci $f$ este crescătoare.

Fie acum $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, iar $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri de numere raționale convergente către $x$, așa încît:

$$p_n<x<q_n,\ (\forall)n\in\mathbb{N}.$$

Atunci:

$$p_n=f(p_n)\leqslant f(x)\leqslant f(q_n)=q_n,$$

deci, trecind la limită:

$$x=\lim_{n\to\infty}p_n\leqslant f(x)\leqslant\lim_{n\to\infty}q_n=x,$$

adică $f(x)=x$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

**1.3.21**$^{\text{ro}}$. Să se demonstreze că pentru perechea arbitrară de funcții $f$ și $g$, definite pe $[0,1]$, există $x,y\in[0,1]$ astfel încît:

$$|f(x)+g(y)-xy|\geqslant\frac{1}{4}.$$

**R.** Fie:

$$a=f(0)+g(0),\quad b=f(0)+g(1),\quad c=f(1)+g(0),\quad d=f(1)+g(1)-1.$$

Evident:

$$b+c-a-d=1,$$

și deci:

$$1=|b+c-a-d|\leqslant|b|+|c|+|a|+|d|\leqslant 4\max\{|a|,|b|,|c|,|d|\},$$

adică:

$$\max\{|a|,|b|,|c|,|d|\}\geqslant\frac{1}{4}.$$

Fie $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin :

$$h(x, y) = f(x) + g(y) - xy.$$

Evident :

$$h(0, 0) = a, \ h(0, 1) = b, \ h(1, 0) = c, \ h(1, 1) = d.$$

Am obţinut deci că :

$$\max \{|h(0, 0)|, |h(0, 1)|, |h(1, 0)|, |h(1, 1)|\} \geqslant \frac{1}{4},$$

adică există cel puţin o pereche $(x, y) \in \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ astfel încît :

$$|h(x, y)| \geqslant \frac{1}{4},$$

adică :

$$|f(x) + g(y) - xy| \geqslant \frac{1}{4},$$

adică tocmai ce cerea enunţul.

**I.3.22**PO. Să se găsească toate funcţiile $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, pentru care :

$$g(x)\ g(x + 1) = g(x) - g(x + 1), \ (\forall)\ x \in \mathbb{R}.$$

**R.** Observăm că funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$, nu verifică egalitatea dată. Dacă există $x$ astfel ca $g(x) = 1$, rezultă $g(x + 1) = 1 - g(x + 1)$ deci $g(x + 1) = 1/2$ şi, prin inducţie, $g(x + n - 1) = \frac{1}{n}$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$. În ipoteza că $g$ există — şi o astfel de funcţie există, anume $g = 0$ — există deci cel puţin un $x_0$ astfel încît $g(x_0 + 1) \neq 1$. În acest caz relaţia dată se mai poate scrie :

$$g(x_0 - 1) = \frac{g(x_0)}{1 - g(x_0)}$$

(obţinută din relaţia din enunţ în care am făcut schimbarea $x \to x - 1$). Este clar că $g(x_0 - 1) \neq 1$ $\left(\text{deoarece îl putem alege pe } x_0 \text{ astfel, dată fiind relaţia } g(x + n - 1) = \frac{1}{n}\right)$ şi deci vom avea şi :

$$g(x_0 - 2) = \frac{g(x_0)}{1 - 2g(x_0)}.$$

În final, dat fiind că $g$ ia numai valori pozitive şi $g(x_0 - n) < 0$ $\left(\text{unde am luat } n \in \mathbb{N} \text{ astfel încît } n > \frac{1}{g(x_0)}\right)$, obţinem $g = 0$, care verifică enunţul.

**1.3.23**[PO]. Să se determine funcțiile $f:[-1, 1]\to[-1, 1]$ care satisfac relația :

$$|xf(y) - yf(x)| \geqslant |x - y|, \ (\forall) \ x, y \in [-1, 1].$$

**R.** Fie $y = -x$ în relația din enunț. Obținem :

$$|xf(-x) + xf(x)| \geqslant |x + x|,$$

echivalent cu :

$$|f(x) + f(-x)| \geqslant 2. \qquad (*)$$

Folosim relația cunoscută :

$$|f(x) + f(-x)| \leqslant |f(x)| + |f(-x)| \qquad (1)$$

și faptul că $|f(x)| \leqslant 1$ (din ipoteză), deci :

$$|f(x)| = |f(-x)| = 1, \ (\forall) \ x \in [-1, 1] - \{0\},$$

și :

$$f(x) = f(-x), \ (\forall) \ x \in [-1, 1] - \{0\}.$$

În relația din enunț fie $x = 1$, $y = 0$. Obținem $|f(0)| \geqslant 1$, și deci $|f(0)| = 1$. Așadar, funcțiile $f$ au forma :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } x \in A \\ -1 & \text{pentru } x \in B, \end{cases}$$

unde $A \subset [-1, 1]$ și $B = [-1, 1] - A$.

Avem următoarele cazuri :

a) $A = \Phi$, de unde obținem funcția :

$$f(x) = -1, \ (\forall) \ x \in [-1, 1],$$

care verifică, evident, relația din enunț.

b) $A = [-1, 1]$, de unde obținem funcția :

$$f(x) = 1, \ (\forall) \ x \in [-1, 1].$$

c) $A \neq \Phi$ și $A \neq [-1, 1]$. Dacă $x, y \in A$ sau $x, y \in B$, relația din enunț devine :

$$|x - y| \geqslant |x - y|,$$

evident adevărată.

Dacă $x \in A$ și $y \in B$, relația din enunț devine :

$$|x + y| \geqslant |x - y|,$$

ceea ce este tot una cu $xy \geqslant 0$.

Dacă $x \in B$ și $y \in A$, prin simetrie se obține aceeași idee.

Fie $0 \in A$ și $a \in A$, $a \neq 0$.

Fără a restrînge generalitatea, fie $a > 0$. Atunci $[-1, 0] \subset A$, căci altfel ar exista $b < 0$, $b \in B$, și am avea $ab < 0$. Ținînd seama de faptul că $f(x) = f(-x)$ ar rezulta că $f$ e constantă pe $[-1, 1]$, și deci $A = [-1, 1]$, contrar ipotezei făcute. În concluzie, în afară de funcțiile găsite anterior, mai avem funcțiile:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } x = 0 \\ -1 & \text{pentru } x \in [-1, 1] - \{0\} \end{cases}$$

și:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pentru } x = 0 \\ 1 & \text{pentru } x \in [-1, 1] - \{0\}. \end{cases}$$

**I.3.24**[PO]. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că ecuația:

$$\sum_{i=0}^{n} |a_i x + b_i| + a_0 x + b_0 = 0$$

admite cel mult $n$ rădăcini reale, în ipoteza că $n \geqslant 2$, și încă:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \neq 0,$$

respectiv:

$$\sum_{m=0}^{i-1} a_m - \sum_{m=i}^{n} a_m \neq 0, \ (\forall) \ i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

**R.** Fără a restrînge generalitatea, putem presupune că:

$$\frac{b_1}{a_1} > \frac{b_2}{a_2} > \ldots > \frac{b_n}{a_n}.$$

Să observăm că putem presupune $a_i > 0$, $(\forall)$ $i \in \overline{1, n}$, deoarece:

$$|a_i x + b_i| = |-a_i x - b_i|, \ (\forall) \ i \in \overline{1, n}.$$

Numerele:

$$-\frac{b_i}{a_i},$$

împart dreapta reală în $n + 1$ intervale, și deci, în general, ecuația din enunț poate avea cel mult $n + 1$ soluții. deoarece, considerînd că $x$ aparține fiecărui interval în parte, avem $n + 1$ explicitări diferite ale modulilor.

De exemplu, dacă $x \in \left(-\infty, -\frac{b_1}{a_1}\right)$, atunci:

$$x < -\frac{b_i}{a_i}, \quad (\forall) \ i \in \overline{1, n},$$

deci:

$$a_i x + b_i < 0, \ (\forall) \ i \in \overline{1, n}$$

și ecuația se scrie :

$$-\sum_{i=1}^{n}(a_i x + b_i) + a_0 x + b_0 = 0,$$

Dacă :

$$-\frac{b_1}{a_1} \leqslant x \leqslant -\frac{b_2}{a_2},$$

atunci :

$$a_1 x + b_1 \geqslant 0, \quad a_2 x + b_2 \leqslant 0$$

și cum :

$$-\frac{b_2}{a_2} \leqslant -\frac{b_k}{a_k}, \quad (\forall)\ k \in \overline{3, n}$$

rezultă :

$$a_k x + b_k \leqslant 0, \quad (\forall)\ k \in \overline{3, n},$$

astfel că ecuația ia forma :

$$a_1 x + b_1 - \sum_{i=2}^{n}(a_i x + b_i) + a_0 x + b_0 = 0,$$

etc. Fie :

$$k_i \overset{\text{def}}{=} \left[-\frac{b_{i-1}}{a_{i-1}}, \quad -\frac{b_i}{a_i}\right], \quad i \in \overline{2, n},$$

și intervalele nemărginite :

$$I_1 \overset{\text{def}}{=} \left(-\infty, -\frac{b_1}{a_1}\right], \quad I_2 = \left[-\frac{b_n}{a_n}, +\infty\right).$$

Pentru ca ecuația să admită $n + 1$ rădăcini reale, este necesar ca în fiecare din aceste intervale să aibă cîte o rădăcină (dacă ar exista două, explicitarea modulelor fiind aceeași, obținem aceleași ecuații, deci, oricum, o singură rădăcină).

Fie $x_i \in k_i$, $i \in \overline{2, n}$, rădăcină a ecuației. Ecuația se scrie :

$$x_i = -\frac{\sum\limits_{m=0}^{i-1} b_m - \sum\limits_{m=i}^{n} b_i}{\sum\limits_{m=0}^{i-1} a_m - \sum\limits_{m=i}^{n} a_m}, \quad i = \overline{2, n}.$$

Rezultă deci că:

$$-\frac{b_{i-1}}{a_{i-1}} < -\frac{\sum_{m=0}^{i-1} b_m - \sum_{m=i}^{n} b_m}{\sum_{m=0}^{i-1} a_m - \sum_{m=i}^{n} a_m} < -\frac{b_i}{a_i}, \quad i \in \overline{2,\ n}$$

inclusiv:

$$x_1 < -\frac{b_1}{a_1},$$

și:

$$x_{n+1} > -\frac{b_n}{a_n},$$

și intervalele $I_1$ și $I_2$ sînt nemărginite. Inegalitățile de mai sus se mai scriu:

$$\frac{b_0 - b_1 - \ldots - b_n}{a_0 - a_1 - \ldots - a_n} > \frac{b_1}{a_1}, \tag{1'}$$

$$\frac{b_2}{a_2} < \frac{b_0 + b_1 - \ldots - b_n}{a_0 + a_1 - \ldots - a_n} < \frac{b_1}{a_1}, \tag{2'}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{b_{i+1}}{a_{i+1}} < \frac{b_0 + \ldots + b_i - b_{i+1} - \ldots - b_n}{a_0 + \ldots + a_i - a_{i+1} - \ldots - a_n} < \frac{b_i}{a_i}, \tag{i'}$$

. . . . . . . . . . .

$$\frac{b_0 + b_1 + \ldots + b_n}{a_0 + a_1 + \ldots + a_n} < \frac{b_n}{a_n}. \tag{n'}$$

Grupăm aceste inegalități astfel:

$$\frac{b_0 - b_1 - \ldots - b_n}{a_0 - a_1 - \ldots - a_n} > \frac{b_1}{a_1};$$

$$\frac{b_0 + b_1 - \ldots - b_n}{a_0 + a_1 - \ldots - a_n} < \frac{b_1}{a_1}, \tag{1''}$$

. . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{b_0 + \ldots + b_{n-1} - b_n}{a_0 + \ldots + a_{n-1} - a_n} > \frac{b_n}{a_n}$$

$$\frac{b_0 + \ldots + b_n}{a_0 + \ldots + a_n} < \frac{b_n}{a_n} \tag{n''}$$

Relația (i″) se mai scrie:

$$[a_i b_0 + \ldots + a_i b_{i-1} - a_i b_i - \ldots - a_i b_n - a_0 b_i - \ldots - a_{i-1} b_i + a_i b_i + \ldots + a_n b_i] : [a_i (a_0 + \ldots + a_{i-1} - a_i - \ldots - a_n)] > 0,$$

$$[a_i b_0 + \ldots + a_i b_i - a_i b_{i+1} - \ldots - a_i b_n - a_0 b_i - \ldots - a_i b_i + a_{i+1} b_i + \ldots + a_n b_i] : [a_i (a_0 + \ldots + a_i - a_{i+1} - \ldots - a_n)] < 0$$

Dar $a_i b_i$ are în ambele expresii coeficientul zero, deci numărătorii fracțiilor de mai sus sînt identici.

Vom nota expresiile de la numărător cu $A_i$, $i \in \overline{1, n}$, deci grupele de inegalități (1''), (2''), ..., (n'') se scriu :

$$\frac{A_1}{a_0 - \ldots - a_n} > 0 ; \quad \frac{A_1}{a_0 + a_1 - \ldots - a_n} < 0, \qquad (1''')$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{A_i}{a_0 + \ldots + a_{i-1} - \ldots - a_n} > 0 ; \\ &\frac{A_i}{a_0 + \ldots + a_i - a_{i-1} - \ldots - a_n} < 0, \end{aligned}\right. \qquad (i''')$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{A_n}{a_0 + \ldots + a_{n-1} - a_n} > 0 ; \quad \frac{A_n}{a_0 + \ldots + a_n} < 0. \qquad (n''')$$

Pentru ca inegalitățile să aibă loc, este necesar, potrivit relației (i''') :

$$(a_0 + \ldots + a_{i-1} - \ldots - a_n)(a_0 + \ldots + a_i - \ldots - a_n) < 0,$$

$$(\forall) \; i \in \overline{1 \; n}.$$

Dacă în ultima relație am avea :

$$a_0 + \ldots + a_{n-1} - a_n > 0,$$

$$a_0 + \ldots + a_n < 0,$$

atunci, schimbînd semnul primei inegalități și adunînd :

$$2a_n < 0,$$

contrar ipotezei, și deci :

$$a_0 + \ldots + a_{n-1} - a_n < 0,$$

$$a_0 + \ldots + a_n > 0.$$

Cu necesitate, din relația $(n - 1)'''$, obținem că :

$$a_0 + \ldots + a_{n-2} - a_{n-1} - a_n > 0.$$

Schimbînd sensul ultimei inegalități și adunînd cu antepenultima, găsim :

$$2a_{n-1} < 0,$$

contrar ipotezei, deci nici varianta a doua nu este posibilă.

Rezultă că, în definitiv, presupunerea că ecuația admite $n + 1$ rădăcini este absurdă, astfel că enunțul este demonstrat.

**I.3.25PO.** (CEBÎȘEV). Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $a_i \leqslant a_j \Leftrightarrow b_i \leqslant b_j$, $(\forall)$ $i, j \in \overline{1, n}$. Atunci $(\forall)$ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ avem inegalitatea:

$$\frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n} \cdot \frac{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\lambda_1 a_1 b_1 + \lambda_2 a_2 b_2 + \ldots + \lambda_n a_n b_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n},$$

cu egalitate dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ sau $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$.

**R.** Evident, avem:

$$\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geqslant 0,$$

deci:

$$\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j (a_i b_i - a_i b_i - a_j b_i + a_j b_j) \geqslant 0$$

și deci:

$$\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j (a_i b_j + a_j b_i) \leqslant \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j (a_i b_i + a_j b_j).$$

Notăm cu $s$ (respectiv $S$) suma din stînga (respectiv dreapta). Atunci:

$$s = \sum_i \sum_j (\lambda_i \lambda_j a_i b_j + \lambda_i \lambda_j a_j b_i) =$$

$$= \left(\sum_i \lambda_i a_i\right)\left(\sum_j \lambda_j b_j\right) + \left(\sum_i \lambda_i b_i\right)\left(\sum_j \lambda_j a_j\right) = 2\left(\sum_i \lambda_i a_i\right)\left(\sum_i \lambda_i b_i\right);$$

$$S = \sum_i \sum_j (\lambda_i \lambda_j a_i b_i + \lambda_i \lambda_j a_j b_j) =$$

$$= \left(\sum_i \lambda_i a_i b_i\right)\left(\sum_j \lambda_j\right) + \left(\sum_i \lambda_i\right)\left(\sum_j \lambda_j a_j b_j\right) = 2\left(\sum_i \lambda_i\right)\left(\sum_i \lambda_i a_i b_i\right),$$

deci:

$$\left(\sum_i \lambda_i a_i\right)\left(\sum_i \lambda_i b_i\right) \leqslant \left(\sum_i \lambda_i\right)\left(\sum_i \lambda_i a_i b_i\right).$$

Înmulțim mai departe prin $\left(\sum_i \lambda_i\right)^2$ și obținem enunțul.

**I. 3.26PO.** (JENSEN). Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție definită pe intervalul $I$ și cu valori reale.

a) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, orice $x_i \in I$ și orice $\lambda_i \in [0, 1]$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, astfel încît $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, atunci $\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i \in I$.

b). Să presupunem că $f$ este convexă pe $I$ adică pentru orice $x_1, x_2 \in I$ și orice $\lambda_1$ $\lambda_2 \in [0, 1]$ astfel ca $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ este satisfăcută inegalitatea:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Să se arate că :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ și orice submulțime $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset I$ și orice $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset [0, 1]$, cu $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

c) Să se arate că :

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}\right) \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}$$

pentru orice $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset I$ și orice sistem $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ de numere negative nu toate nule.

**R.** a) Proprietatea este evidentă pentru $n = 1$.

Pentru $n = 2$, fie $x_1, x_2 \in I$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$. Să presupunem $x_1 \leqslant x_2$. Atunci :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) x_2 = x_2 + \lambda_2(x_1 - x_2) \leqslant x_2$$

și la fel se arată că $x_1 \geqslant \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, deci $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in I$.

Să presupunem acum că proprietatea este adevărată pentru $n$ oarecare și să arătăm că dacă $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$, sînt puncte din $I$ și $\lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ sînt astfel ca :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1,$$

atunci :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \in I.$$

Observînd că putem presupune $\lambda_{n+1} \neq 1$, rezultă :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} =$$

$$= (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}.$$

Dar deoarece, prin ipoteză :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} = 1,$$

rezultă :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i \in I$$

deci :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \in I.$$

b) Pentru $n = 2$, proprietatea este evidentă, rezultînd din definiție. Presupunînd-o adevărată pentru $n$ să o demonstrăm și pentru $n + 1$. Avem :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) =$$

$$= f\left[(1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right] \leqslant$$

$$\leqslant (1 - \lambda_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}}\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \leqslant$$

$$\leqslant (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

c) Putem lua $\lambda_i = \dfrac{\mu_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i}$ și aplicăm rezultatele obținute la punctul b).

*Observație.* 1) Dacă funcția $f$ este concavă, adică dacă :

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

pentru orice $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $x_1\, x_2 \in I$, sensul inegalităților se schimbă.

2) Se poate arăta că funcția logaritm este concavă (cînd baza este supraunitară). Așadar, pentru funcția $f$: $(0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, inegalitatea lui JENSEN devine :

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln x_i$$

sau :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \geqslant \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i},$$

cu $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$, $x_i > 0$, $(\forall)\ i \in \{1, \ldots, n\}$. În cazul particular $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$, inegalitatea stabilită mai sus devine:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

adică inegalitatea mediilor.

**I. 3.27**$^{PO}$**.** Suma pătratelor a cinci numere reale $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$ este 1. Să se arate că cea mai mică dintre valorile :

$$(a_i - a_j)^2, \; i, \; j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \; i \neq j$$

nu este mai ~~mică~~ decît 1/10.

**R.** Fără a restrînge generalitatea, putem presupune că :

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant a_5.$$

Fie $m^2$, $m > 0$, cea mai mică valoare a expresiei :

$$(a_i - a_j)^2,$$

unde $i \neq j$. Atunci, pentru $i \in \overline{1, 4}$ avem :

$$a_{i+1} - a_i \geqslant m$$

și deci, pentru $i > j$ avem :

$$a_i - a_j > (i - j)\, m.$$

De aici urmează :

$$\sum_{\substack{i,\, j=1 \\ i>j}}^{5} (a_i - a_j)^2 \geqslant m^2 \sum_{\substack{i,\, j=1 \\ i>j}}^{5} (i - j)^2 = 50\, m^2$$

de unde, folosind relațiile :

$$\sum_{\substack{i,\, j=1 \\ i>j}}^{5} (a_i - a_j)^2 = 5 \sum_{i=1}^{5} a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{5} a_i\right)^2,$$

$$\sum_{i=1}^{5} a_i^2 = 1,$$

obținem că $50m^2 \leqslant 5$ deci $m^2 \leqslant \frac{1}{10}$.

**I. 3.28**$^{PO}$**.** Să se arate că numerele :

$$\{10\sqrt{2}\}_*, \; \{10^2\sqrt{2}\}_*, \; \ldots, \; \{10^n\sqrt{2}\}_*$$

sînt diferite între ele, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

**R.** Întrucît $\sqrt{2}$ este număr irațional, numărul $\{10^n\sqrt{2}\}_*$ va fi, de asemenea, irațional, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Zecimalele de orice ordin ale unui număr irațional sînt unic determinate. Fie $d_n$ cea de-a $n$-a zecimală din dezvoltarea lui $\sqrt{2}$ și, în consecință :

$$\{10^p\sqrt{2}\}_* = 0, d_{n+1}\, d_{n+2} \ldots$$

Fie :

$$\{10^p\sqrt{2}\}_* = \{10^q\sqrt{2}\}_*, \; p \neq q.$$

Pe baza unicității zecimalelor de orice ordin ale unui număr irațional, egalitatea este satisfăcută numai dacă :

$$d_{n+p} = d_{n+q}, \ (\forall) \ n \in \mathbb{N}^*$$

deci dacă dezvoltarea zecimală a lui $\sqrt{2}$ este periodică cu perioada $|p - q|$, absurd căci $\sqrt{2}$ este irațional.

**I. 3.29**PO. Să se găsească maximul și minimul expresiei :

$$z(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

în ipoteza că $x, y \in \mathbb{R}$ și :

$$1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2.$$

**R.** Fie $r \in \mathbb{R}^*$ și $\alpha \in [0, 2\pi]$ astfel încît :

$$x = r \sin \alpha$$

$$y = r \cos \alpha$$

(un astfel de $r$ și un astfel de $\alpha$ există, anume $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\alpha = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, întrucît $x^2 + y^2 \neq 0$. Expresia $z$ devine :

$$z(r \sin\alpha, r \cos\alpha) = Z(r, \alpha) = r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha +$$

$$+ r^2 \sin \alpha \cos \alpha = r^2 + \frac{1}{2} r^2 \sin 2\alpha = r^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha\right)$$

iar condiția :

$$1 \leqslant r^2 \leqslant 2.$$

De aici :

$$\max z = 2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3,$$

$$\min z = 1 \cdot (1 + 0) = 1,$$

realizate pentru $r^2 = 2$, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, respectiv $r^2 = 1$, $\alpha = 0$.

**I. 3.30**PO. a) Fie $a > 1$, $a \in \mathbb{R}$ și $r, s \in \mathbb{Q}$ cu $r > s > 0$ ; atunci :

$$\frac{a^r - 1}{r} > \frac{a^s - 1}{s}.$$

b) Dacă $a < 1$, $a \in \mathbb{R}$ și $r, s \in \mathbb{Q}$, cu $r > s > 0$, atunci :

$$\frac{1 - a^r}{r} < \frac{1 - a^s}{s}.$$

**R.** a) Se demonstrează că, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, avem :

$$\frac{a^{n+1}-1}{n+1} > \frac{a^n-1}{n}.$$

În adevăr, împărţind prin numărul pozitiv $a-1$ şi efectuînd calculele, inegalitatea este demonstrată dacă :

$$na^n > a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + 1$$

care este adevărată pentru $a > 1$ căci $a^n > a^i$, $(\forall) i \in \overline{1, n-1}$.

Urmează că, dacă $m > n$, atunci :

$$\frac{a^m-1}{m} > \frac{a^n-1}{n}.$$

Trecînd la indici raţionali, fie :

$$r = \frac{m}{p}; \quad s = \frac{n}{p}, \ (m, n, p \in \mathbb{N}^*).$$

Punînd $a^{\frac{1}{p}} = b$, avem enunţul.

b). Acelaşi raţionament ca în a).

**I. 3.31**$^{PO}$. O mulţime $X$ este, prin definiţie, *echipotentă* cu o mulţime $Y$, dacă există o funcţie bijectivă $f$, $f: X \to Y$.

O mulţime se numeşte *numărabilă* dacă este echipotentă cu mulţimea numerelor naturale, $\mathbb{N}$.

Arătaţi că orice submulţime $A$ de numere naturale, $A \subseteq \mathbb{N}$, este finită sau numărabilă.

**R.** Să presupunem că $A \subset \mathbb{N}$ este infinită.

Definim prin recurenţă o aplicaţie $f$, $f: \mathbb{N} \to A$, astfel :

$f(0)$ este cel mai mic element al lui $A$, $f(m)$ este cel mai mic element al mulţimii $A - \{f(0), f(1), \ldots, f(n-1)\}$, care, prin ipoteză, este nevidă. Aceasta arată că :

$$f(i) \neq f(n),$$

pentru $i < n$, şi de aici avem că $f$ este injectivă.

Să arătăm că :

$$f(i) < f(n),$$

pentru $i < n$. Raţionăm prin recurenţă după $i$, pentru $n$ fixat.

Avem $f(0) < f(n)$ din definirea lui $f(n)$ şi presupunînd că avem $f(j) < f(n)$, pentru $j < i$, atunci $f(i) \leqslant f(n)$, din definiţia lui $f(i)$.

De aici, dearece $f(i) \neq f(n)$, avem imediat că :

$$f(i) < f(n).$$

În continuare, prin recurenţă după $n$, se deduce imediat că :

$$f(i) < f(n)$$

pentru $i < n$ pentru că $n$ este mai mic sau egal cu $f(n)$, pentru orice $n$, de unde, dacă $a \in A$, atunci $a \leqslant f(a)$.

Fie $m$ cel mai mare întreg mai mic decît $a$, astfel încît :

$$f(m) < a.$$

Dacă există un întreg $b \in A$, astfel încît :

$$f(m) < b < a,$$

vom avea :

$$f(m + 1) \leqslant b < a$$

prin definiție, contradicție cu definirea lui $m$.

Deci $a$ este cel mai mic element din $A - \{f(0), \ldots, f(m)\}$, sau :

$$a = f(m + 1),$$

și, de aici, aplicația $f$ este bijecție.

Astfel de mulțimi, finite sau numărabile, se numesc cel mult numărabile.

**I. 3.32**^PO^. Fie $A$ o mulțime numărabilă și $f$ o funcție surjectivă peste o mulțime $B$, $f : A \to B$.

Arătați că mulțimea $B$ este cel mult numărabilă.

**R.** Fie $\varphi : \mathbb{N} \to A$, o funcție surjectivă, definită prin :

$$\varphi(n) = a_n.$$

Atunci funcția $\xi$, $\xi : \mathbb{N} \to B$, definită prin :

$$\xi(n) = f(a_n)$$

este o aplicație surjectivă. Putem presupune chiar $A = \mathbb{N}$.

Pentru fiecare $b \in B$, $f^{-1}(b)$ nu este o mulțime vidă prin ipoteză și fie $m(b)$ cel mai mic element al său. Atunci :

$$f(m(b)) = b,$$

ceea ce arată imediat că $m$ este o aplicație injectivă de la $B$ în $\mathbb{N}$ ; $m$ putînd fi considerată ca o bijecție de la $B$ în $m(B) \cup \mathbb{N}$, și conform problemei precedente, $m(B)$ este cel mult numărabilă.

**I. 3.33**^PO^. Arătați că mulțimea $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă, unde $\mathbb{N}$ este mulțimea numerelor naturale.

**R.** Vom defini funcția $f$, $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, astfel :

$$f(x, y) = \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2} + y.$$

Arătăm că $f$ este injectivă.

Să observăm că se poate arăta ușor că $f$ este de fapt o bijecție, dar nu avem nevoie de acest rezultat.

Astfel, avem :

$$\frac{(a + 1)(a + 2)}{2} = a + 1 + \frac{a(a + 1)}{2},$$

de unde, dacă :

$$a = x + y < x' + y',$$

cum $y \leqslant a$, atunci :

$$f(x, y) \leqslant a + a\frac{(a+1)}{2} < f(x', y');$$

şi, dacă :

$$x + y = x' + y'$$

şi $y' < y$, atunci :

$$f(x, y) - f(x', y') = y - y',$$

de unde, avem că $(x, y) \neq (x', y')$ implică $f(x, y) \neq f(x', y')$.

Este suficient în continuare să aplicăm problema I.3.31.

**I. 3.34**$^{\text{PO}}$**.** Arătaţi că mulţimea numerelor raţionale, $\mathbb{Q}$, este o mulţime numărabilă.

**R.** Mulţimea $\mathbb{Q}$ se poate scrie :

$$\mathbb{Q} \equiv (\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+) \cup (\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_-),$$

şi este suficient să demonstrăm că $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$ este numărabilă.

Dar există o aplicaţie surjectivă :

$$(m, n) \to \frac{m}{n},$$

definită pe o submulţime a lui $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, formată din cupluri $(m, n)$, cu $n \neq 0$, peste $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$, de unde, aplicînd rezultatele precedentelor două probleme, rezultă enunţul.

**I. 3.35**$^{\text{PO}}$**.** Să se arate că toate intervalele deschise, $(a, b)$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, conţin o infinitate de numere raţionale.

**R.** Este suficient să arătăm că $(a, b)$ conţine un număr raţional, $c$, deoarece, atunci, $(a, c)$ conţine un număr raţional, şi, prin inducţie, se ajunge la rezultatul final.

Fie $x = b - a > 0$ ; atunci există un întreg $n$, astfel încît $n > \frac{1}{x}$, de unde $\frac{1}{n} < x$.

Putem presupune $b > 0$ (astfel, este suficient să considerăm intervalul $(-b, -a)$, cu $-a > 0$).

Atunci, există un întreg $k > 0$, astfel încît $b \leqslant \frac{k}{n}$.

Fie $h$ cel mai mic număr întreg cu proprietatea că :

$$b \leqslant \frac{h}{n}.$$

Atunci :

$$\frac{(h-1)}{n} < b.$$

Avem, de asemenea :

$$\frac{(h-1)}{n} > a,$$

deoarece, altfel, am avea :

$$b - a = x \leqslant \frac{1}{n}$$

ceea ce contrazice definiția lui $n$.

**I. 3.36**PO**.** Arătați că, mulțimea numerelor reale, $\mathbb{R}$, nu este numărabilă.

**R.** Raționăm prin reducere la absurd. Presupunem că există o bijecție $n \to x_n$, de la $\mathbb{N}$ la $\mathbb{R}$.

Definim un șir $n \to p(n)$ de întregi $p_n$ prin recurență, astfel :

$p(0) = 0$ ; $p(1)$ este cea mai mică valoare a lui $n$ pentru care $x_n > x_0$.

Să presupunem că $p(n)$ este definit pentru $n \leqslant 2m - 1$, și că :

$$x_{p(2m-2)} < x_{p(2m-1)} .$$

Atunci mulțimea $(x_{p(2m-2)}, x_{p(2m-1)})$ este infinită, și definim $p(2m)$ ca cel mai mic întreg $k > p\ (2m-1)$ pentru care :

$$x_{p(2m-2)} < x_k < x_{p(2m-1)} ;$$

apoi definim $p(2m+1)$ ca cel mai mic întreg $k > p(2m)$ pentru care :

$$x_{p(2m)} < x_k < x_{p(2m-1)}.$$

Este evident că șirul $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ este strict crescător, deci :

$$p(n) \geqslant n, \quad (\forall)\ n \in \mathbb{N}.$$

Pe de altă parte, din construcția făcută, rezultă că intervalul închis $[x_{p(2m)}, x_{p(2m+1)}]$ este conținut în intervalul deschis $(x_{p(2m-2)}, x_{p(2m-1)})$. Atunci există un număr real $y$, conținut în toate intervalele închise $[x_{p(2m)}, x_{p(2m+1)}]$, și $y$ nu poate coincide cu nici un capăt de interval. Fie $q$ numărul întreg pentru care :

$$y = x_q,$$

și fie $n$ cel mai mare întreg pentru care :

$$p(n) \leqslant q,$$

de unde :

$$q < p\ (n+1).$$

Să presupunem că $n = 2m$ ; atunci relația :

$$x_{p(2m)} < x_q < x_{p(2m+1)} < x_{p(2m-1)}$$

contrazice definiția lui $p(2m+1)$. Dacă, în mod contrar, $n = 2m - 1$, atunci relația :

$$x_{p(2m-2)} < x_{p(2m)} < x_q < x_{p(2m-1)}$$

contrazice definirea lui $p(2m)$, ceea ce termină demonstrația.

## §.4. Funcția de gradul al doilea. Ecuații și inecuații de gradul al doilea

**I. 4.1**[M]. Fie $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două funcții de gradul al doilea, definite prin $f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ și $g(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$. Să se arate că $f = g$ dacă și numai dacă $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$.

**R.** Două funcții sînt egale dacă au același domeniu de definiție, același codomeniu și sînt date de aceeași lege, adică $f(x) = g(x)$, $(\forall)\ x \in D$, unde cu $D$ am notat domeniul comun de definiție. În cazul nostru, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, și cum $f(x) = g(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$ avem și $f(0) = g(0)$, sau $c_1 = c_2$, apoi în continuare, $f(1) = g(1)$, sau $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ și $f(-1) = g(-1)$, sau $a_1 - b_1 = a_2 - b_2$, de unde se obține sistemul:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = a_2 + b_2 \\ a_1 - b_1 = a_2 - b_2 \end{cases}$$

Prin adunarea celor două ecuații, obținem $a_1 = a_2$, de unde, imediat, avem $b_1 = b_2$. Invers, dacă $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, atunci evident pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $a_1x^2 = a_2x^2$, $b_1x = b_2x$ de unde, prin adunare, obținem $a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$, adică $f(x) = g(x)$.

**I. 4.2**[M]. Să se aducă la forma canonică următoarele funcții de gradul al doilea:

a) $f(x) = x^2 - x + 11$ d) $f(x) = 0{,}51x^2 - 0{,}1x + 1$

b) $f(x) = -2x^2 - 7x + 1$ e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$

c) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ f) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x + 1$

**R.** Fiind dată funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, prin $f(x) = ax^2 + bx + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, ea poate fi scrisă sub forma, numită canonică:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

unde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Avînd în vedere această scriere, funcțiile date devin:

a) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{43}{4}$; b) $-2\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{57}{8}$;

c) $3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$; d) $0{,}51\left(x - \frac{5}{51}\right)^2 + \frac{203}{204}$;

e) $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{7}{36}$; f) $-\frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{28}{25}$.

**I. 4.3**[M]. Să se stabilească maximul sau minimul următoarelor funcții:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 10$ d) $f(x) = -12x^2 + 31x - 1$

b) $f(x) = -x^2 + 2x - 12$ e) $f(x) = -x^2 - 2x + 1$

c) $f(x) = x^2 - 5$ f) $f(x) = 0{,}5x^2 + 0{,}7x - 0{,}31$.

**R.** Să observăm că, din scrierea canonică a expresiei funcției de gradul doi, dacă $a > 0$, avem $f(x) \geqslant \frac{-\Delta}{4a}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, deci funcția atinge un minim egal cu $\frac{-\Delta}{4a}$, minim obținut atunci cînd $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, sau $x = -b/2a$.

Dacă $a < 0$, atunci $f(x) \leqslant \frac{-\Delta}{4a}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, valoarea maximă $\frac{-\Delta}{4a}$ fiind atinsă tot cînd $x = -\frac{b}{2a}$.

Avînd în vedere aceste considerente, în cazul nostru se obține:

a) funcția are un minim, $f_{min}(1) = 9$; b) $f$ are un maxim dat de $f_{max}(+1) = -11$; c) $f$ are un minim dat de $f_{min}(0) = -5$, d) $f$ are un maxim, $f_{max}\left(\frac{31}{24}\right) = \frac{913}{48}$; e) $f$ are un maxim, $f_{max}(-1) = 2$; f) $f$ are un minim, $f_{min}(-0,7) = \frac{-111}{200}$.

**I. 4.4**[M]. Să se stabilească intervalele de monotonie pentru următoarele funcții de gradul al doilea:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 1$; c) $f(x) = 0,5x^2 - 7x$;
b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$; d) $f(x) = -2x^2 + x + 1$.

**R.** O funcție $f: A \to B$, cu $A, B \subseteq \mathbb{R}$ este monoton crescătoare pe $A$, dacă $(\forall)\ x_1, x_2 \in A$, cu $x_1 < x_2$, implică $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, iar $f$ se numește monoton descrescătoare, dacă $x_1 < x_2$ implică $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Astfel, intervalele de monotonie ale funcțiilor date sînt:

a) Pentru $x \in (-\infty, 1]$, funcția $f$ este strict descrescătoare, iar pentru $x \in [1, \infty)$ funcția este strict crescătoare.

b) Avem $f(x) = (x-1)^2$, deci $f$ este strict descrescătoare pentru $x \in (-\infty, 1]$ și $f$ strict crescătoare pentru $x \in [1, \infty)$.

c) $f(x) = x(0,5x - 7)$, de unde $f$ este strict descrescătoare pentru $x \in (-\infty, 7]$ și strict crescătoare pentru $x \in [7, \infty)$.

d) Pentru $x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$, funcția este strict crescătoare, iar pentru $x \in \left[\frac{1}{4}, \infty\right)$ funcția este strict descrescătoare.

**I. 4.5**[M]. Să se stabilească semnul următoarelor funcții:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$; c) $f(x) = 0,5x^2 - 7x$
b) $f(x) = 0,3x^2 - x + 0,1$; d) $f(x) = -2x^2 + x + 1$

**R.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = ax^2 + bx + c$. Atunci, dacă $a > 0$, $(a < 0)$ notînd cu $x_1$ și $x_2$ cu $x_1 \leqslant x_2$ rădăcinile reale ale ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, avem: $f(x) \geqslant 0\ (\leqslant 0)\ (\forall)\ x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$ și $f(x) \leqslant 0$, $(\geqslant 0)$ $(\forall)\ x \in [x_1, x_2]$.

Astfel:

a) $f(x) \leqslant 0$, dacă $x \in [-1, 3]$; $f(x) \geqslant 0$, dacă $x \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$.

b) Să observăm că discriminantul funcției este pozitiv, deci $f(x) \geqslant$

$\geqslant 0$ pentru $x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{0,88}}{0,6}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{0,88}}{0,6}, \infty\right)$. De asemenea, $f(x) \leqslant$ $\leqslant 0$ pentru $x \in \left[\frac{1-\sqrt{0,88}}{0,6}, \frac{1+\sqrt{0,88}}{0,6}\right]$

c) $f(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in (-\infty, 0] \cup [14, \infty)$ și $f(x) < 0$, $(\forall)\ x \in (0, 14)$.

d) $f(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ și $f(x) \leqslant 0$, $(\forall)\ x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, \infty)$.

**I. 4.6**[M]**.** Să se arate că orice funcție de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nu este nici injectivă și nici surjectivă.

**R.** Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = ax^2 + bx + c$. Dacă $x_1$, $x_2$ sînt rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ și $x_1 \neq x_2$, avem $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Dacă $x_1 = x_2 = \alpha$, atunci $f(x) = a(x - \alpha)^2$, și punînd $x' = \alpha + 1$, $x'' = \alpha - 1$, obținem $f(x') = f(x'') = a$, deci $f$ nu este injectivă. În plus $f$ nu este nici surjectivă, deoarece, dacă $a > 0$, avem $f(x) \geqslant \frac{-\Delta}{4a}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$ și luînd $y = -\frac{\Delta}{4a} - 1$ obținem $f(x) > -\frac{\Delta}{4a} - 1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, iar dacă $a < 0$, avem $f(x) \leqslant \frac{-\Delta}{4a}$, și luînd $y = \frac{-\Delta}{4a} + 1$ avem $f(x) < -\frac{\Delta}{4a} + 1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$ deci $f$ nu ia valoarea $y$ respectivă.

**I. 4.7**[M]**.** Să se determine funcția de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$, astfel încît graficul acestei funcții să treacă prin punctele $A(1, -8)$, $B(-1, -10)$ și să taie axa $Oy$ în punctul $C(0, -10)$.

**R.** Avem evident relațiile:

$$-8 = f(1) = a + b + c; \quad -10 = f(-1) = a - b + c;$$
$$-10 = f(0) = c.$$

Din relațiile de mai sus se obține $a = 1$, $b = 1$, $c = -10$ deci funcția de gradul al doilea cerută are expresia:

$$f(x) = x^2 + x - 10.$$

**I. 4.8**[M]**.** Să se determine funcția de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$ astfel încît graficul acestei funcții să aibă vîrful în punctul $V(1, 2)$ și să taie axa $Oy$ în punctul $B(0, -3)$.

**R.** Avem, evident, relațiile:

$$-\frac{b}{2a} = 1; \quad \frac{-\Delta}{4a} = 2; \quad -3 = f(0) = c,$$

de unde se obține $a = -5$, $b = 10$, $c = -3$, deci funcția cerută are expresia:

$$f(x) = -5x^2 + 10x - 3.$$

**I. 4.9**[M]**.** Fie familia de funcții de gradul al doilea $f_m(x) = x^2 - 2(m-1)\,x + m - 2$, unde $m$ este parametru real. Să se arate că vîrfurile parabolelor asociate acestor funcții se găsesc pe o parabolă.

**R.** Vom calcula coordonatele $x_v, y_v$ ale vîrfurilor familiei $f_m$ de parabole date. Avem: $x_v = -\frac{b}{2a} = m - 1$; $y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -m^2 + 3m - 3$. Deci vîrfurile parabolelor sînt date de mulțimea punctelor

$V_m(m-1, -m^2+3m-3)$. Deci, eliminînd pe $m$, se obține că aceste vîrfuri $V_m$ sînt puncte aflate pe parabola de ecuație $y = -x^2 + x - 1$.

**I. 4.10**[M]. Să se determine funcția de gradul al doilea, $f$, dată de $f(x) = ax^2 + bx + c$, știind că admite un minim egal cu 9, și graficul funcției trece prin punctele $A(-1, 13)$ și $B(2, 10)$.

**R.** Avem, evident, relațiile :

$$13 = f(-1) = a - b + c; \quad 10 = f(2) = 4a + 2b + c; \quad 4ac - b^2 = 36a,$$

de unde, rezolvînd, se obține :

$$a = \frac{1}{9}; \quad b = -\frac{10}{9}; \quad c = \frac{106}{9},$$

deci funcția $f$ este dată de $f(x) = \frac{1}{9}x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{106}{9}$.

**I. 4.11**[M]. Să se rezolve inecuațiile :

a) $2x^2 - 3x + 1 > 0$;

b) $x^2 - 3x + 4 \geqslant 3x + 2$;

c) $2x^2 - 2x < -\frac{1}{2}$;

d) $-x^2 - 3x + 5 < x^2 - 1$;

e) $x^2 + x + 7 \leqslant 0$;

f) $-x^2 + 2x > x + \frac{1}{4}$;

g) $\frac{x+1}{x+2} \geqslant \frac{2x-1}{x-2}$;

h) $\frac{x-1}{x^2-3x+2} > 2$;

i) $|x^2 - 3x + 2| < |x + 2|$;

j) $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \leqslant 1$;

k) $\frac{x^2-6x-16}{-x^2+8x-12} > 0$;

l) $-1 < \frac{x^2+3x+2}{x^2-4x+3} \leqslant 2$.

**R.** a) Rădăcinile ecuației $2x^2 - 3x + 1 = 0$ sînt $x_1 = \frac{1}{2}$ și $x_2 = 1$, și ținînd cont de semnul funcției de gradul II, avem $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, \infty)$.

b) Inecuația se mai scrie $x^2 - 6x + 2 \geqslant 0$, de unde, calculînd rădăcinile ecuației $x^2 - 6x + 2 = 0$, găsim $x_1 = 3 - \sqrt{7}$, $x_2 = 3 + \sqrt{7}$, deci inecuația are loc dacă $x \in (-\infty, 3 - \sqrt{7}] \cup [3 + \sqrt{7}, \infty)$.

c) Inecuația se mai scrie $4x^2 - 4x + 1 < 0$ sau $(2x-1)^2 < 0$, care nu are soluții în mulțimea numerelor reale.

d) Inecuația se mai scrie $2x^2 + 3x - 6 > 0$, de unde se obține, calculînd rădăcinile ecuației $2x^2 + 3x - 6 = 0$, că $x_1 = \frac{-3-\sqrt{57}}{4}$, $x_2 = \frac{-3+\sqrt{57}}{4}$, deci inecuația este verificată pentru :

$$x \in \left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{57}}{4}, \infty\right).$$

e) Să observăm că discriminantul ecuației $x^2 + x + 7 = 0$ este negativ, deci $x^2 + x + 7 > 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$, și deci inecuația nu are soluții în $\mathbb{R}$.

f) Inecuația se mai scrie $4x^2 - 4x + 1 < 0$ sau $(2x - 1)^2 < 0$, fără soluții în $\mathbb{R}$.

g) Inecuația are forma echivalentă :

$$\frac{-x^2 - 4x}{x^2 - 4} \geqslant 0 \quad \text{sau} \quad \frac{x(x+4)}{(x-2)(x+2)} \leqslant 0,$$

de unde se poate face următorul tabel de variație :

| | |
|---|---|
| $x$ | $-\infty \quad -4 \quad -2 \quad 0 \quad +2 \quad 4 \quad \infty$ |
| $x$ | $- \; - \; - \; - \; - \; 0 \; - \; -0 \; + \; + \; + \; + \; + \; +$ |
| $x + 4$ | $- \; - \; - \; 0 \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; +$ |
| $x - 2$ | $- \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; 0 \; + \; + \; +$ |
| $x + 2$ | $- \; - \; - \; - \; - \; 0 \; + \; + \; + \; + \; + \; +$ |
| $\frac{x(x+4)}{(x-2)(x+2)}$ | $+ \; + \; + \; 0 \; - \; - \mid + \; 0 \; - \; - \; - \mid + \; + \; + \; +$ |

de aici, soluția este $x \in [-4, -2) \cup [0, 2)$.

h) Inecuația se scrie $\frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 3x + 2} < 0$, de unde, procedînd la fel ca mai sus, se obține $x \in \left(2, \frac{5}{2}\right)$.

i) Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = |x^2 - 3x + 2| - |x + 2|$, care se mai scrie :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 + x + 2 = x^2 - 2x + 4, & \text{dacă } x \in (-\infty, -2] \\ x^2 - 3x + 2 - x - 2 = x^2 - 4x, & \text{dacă } x \in (-2, 1] \\ -x^2 + 3x - 2 - x - 2 = -x^2 + 2x - 4, & \text{dacă } x \in (1, 2] \\ x^2 - 3x + 2 - x - 2 = x^2 - 4x, & \text{dacă } x \in (2, \infty) \end{cases}$$

de unde, studiind semnul ca mai sus, se obține $x \in (0, 4)$.

j) Inecuația se mai scrie $-1 \leqslant \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \leqslant 1$, sau echivalent :

$$\frac{x(2x-5)}{(x-2)(x+2)} \geqslant 0 \quad \text{și} \quad \frac{-5x + 8}{(x-2)(x+2)} \leqslant 0$$

de unde, făcînd tabelul de variație pentru fiecare dintre cele două inecuații și intersectînd mulțimea soluțiilor găsite, se obține :

$$(-2, 0] \cup (2, \infty).$$

k) Studiind semnul numărătorului și numitorului se obține că $\frac{x^2 - 6x - 16}{-x^2 + 8x - 12} > 0$, cînd $x \in (-2, 2) \cup (6, 8)$.

l) Analog cu j), de unde se obține:

$$x \in \left(-\infty, \frac{11 - \sqrt{105}}{2}\right) \cup \left(\frac{11 + \sqrt{105}}{2}, \infty\right).$$

**I. 4.12^M^.** Pentru ce valori reale ale lui $m$, următoarea inecuație este verificată pentru orice $x \in \mathbb{R}$:

$$(m - 1)x^2 - (m + 1)x + (m + 1) > 0?$$

**R.** Punînd condiția ca discriminantul ecuației, $b^2 - 4ac = (m + 1)^2 - 4(m^2 - 1)$ să fie negativ, iar coeficientul lui $x^2$, $a = m - 1$, pozitiv, și intersectînd soluțiile găsite se obține:

$$m \in \left[\frac{5}{3}, \infty\right).$$

**I. 4.13^M^.** Să se determine valorile reale ale lui $m$, așa încît inecuația:

$$mx^2 + (m - 1)\,x - (m - 2) > 0$$

să nu aibă nici o soluție.

**R.** Este suficient să determinăm $m$ real astfel încît inecuația $-mx^2 - (m - 1)x + (m - 2) \geqslant 0$ să fie verificată pentru orice $x$ real. Condiția revine la $-m > 0$ și $\Delta = (m - 1)^2 + 4m\,(m - 2) \leqslant 0$. Obținem $m \in \left[\frac{5 - \sqrt{20}}{5}, 20\right)$.

**I. 4.14^M^.** Să se determine valorile reale ale lui $m$ astfel încît ecuația:

$$(m - 3)x^2 - 2(3m - 4)x + 7m - 6 = 0$$

să aibă rădăcini reale.

**R.** Trebuie ca $-3 \neq 0$ și $\Delta = 4(3m - 4)^2 - 4(m-3)(7m - 6) \geqslant 0$ sau, echivalent $2m^2 + 3m - 2 \geqslant 0$, de unde $m \in (-\infty, -2] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right) - \{3\}$.

**I. 4.15^M^.** Fie fracția $E = \frac{x^2 + (m + 1)x + m + 2}{x^2 + x + m}$. Să se determine $m$ astfel încît fracția $E$ să aibă sens și să fie pozitivă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

**R.** Pentru ca fracția $E$ să aibă sens pentru orice $x$ real, discriminantul ecuației $x^2 + x + m = 0$ trebuie să fie strict negativ, adică $1 - 4m < 0$; apoi din condiția ca $x^2 + (m+1)x + m+2 > 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$, echivalentă cu $(m+1)^2 - 4(m + 2) < 0$, intersectînd soluțiile obținute, avem $m \in \left(\frac{1}{4}, 1 + 2\sqrt{2}\right)$.

**I. 4.16^M^.** Fie familia de funcții de gradul al doilea:

$$f_m(x) = mx^2 + 2(m + 1)x + m + 2, \tag{1}$$

unde $m \in \mathbb{R} - \{0\}$.

a) Să se arate că vîrfurile parabolelor asociate acestor funcții se găsesc pe dreapta $y = x + 1$.

b) Fie $A$, $B$ punctele de intersecţie ale unei parabole oarecare cu axa $Ox$ şi $F$ proiecţia vîrfului $V$ al parabolei pe $Ox$. Să se arate că oricare ar fi $m$ real, $\|AB\| = 2\ \|FV\|$.

c) Să se arate că toate parabolele definite prin (1) trec printr-un punct fix.

**R.** a) Aflăm coordonatele $x_V$, $y_V$ ale vîrfurilor $V_m$ ale familiei de parabole date. Avem $x_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{m+1}{m}$, $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{1}{m}$. Deci vîrfurile parabolelor sînt $V_m\left(-\dfrac{(m+1)}{m};\ -\dfrac{1}{m}\right)$. Eliminînd pe $m$ în relaţiile care dau pe $x_V$ şi $y_V$ $\left(\text{de exemplu scriem } -mx_V = m + 1, \text{ de unde } m = -\dfrac{1}{1+x_V}, \text{ care se înlocuieşte în } y_V = -\dfrac{1}{m}\right)$, se obţine $y_V = x_V + 1$, ecuaţia dreptei pe care se găsesc punctele $V_m$.

b) Notînd cu $x_1$, $x_2$ rădăcinile ecuaţiei $mx^2 + 2(m+1)x + m + 2 = 0$, se observă că $\|AB\| = |x_1 - x_2| = \dfrac{2}{|m|}$, iar $\|FV\| = \left|\dfrac{-\Delta}{4a}\right| = \left|-\dfrac{1}{m}\right| = \dfrac{1}{|m|}$, deci $\|AB\| = 2\ \|FV\|$.

c) Punct fix pentru familia $f_m$ de parabole este punctul prin care trec toate parabolele, $(\forall)\ m \in \mathbb{R}$. Scriem pe $f_m$ sub forma $f_m(x) = m(x+1)^2 + 2x + 2$, de unde pentru $x = -1$, $f_m$ devine $f_m(-1) = 0$, independent de $m$. Deci punctul $F(-1, 0)$ este punct fix al parabolei.

**I. 4.17^M.** Fie $\mathscr{C}$ un cerc avînd diametrul de lungime $\|AB\| = 2a$. Pe acest diametru considerăm un punct variabil $M$. Construim două cercuri $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{C}_2$ avînd segmentele $|AM|$ şi $|BM|$ ca diametre. Să se determine punctul $M$ astfel încît aria cuprinsă între cele trei cercuri să fie maximă.

**R.** Să notăm cu $x$ mărimea segmentului $|AM|$ şi cu $\mathscr{S}$ aria cuprinsă între cele trei cercuri. Avem:

$$\mathscr{S} = a^2\pi - \left(\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi(2a-x)^2}{4}\right) = \frac{\pi}{2}(-x^2 + 2ax)$$

Se vede că $\mathscr{S}$ are valoare maximă cînd $x = a$, deci cînd $M$ se află în centrul cercului $\mathscr{C}$.

**I. 4.18^M.** Fie $ABC$ un triunghi dreptunghic în vîrful $A$, avînd catetele de lungimi $\|AB\| = a$ şi $\|AC\| = b$. Se înscrie în acest triunghi un dreptunghi $MNPQ$, avînd vîrfurile $P$ şi $Q$ pe ipotenuza triunghiului, $M$ pe $|AB|$ şi $N$ pe $|AC|$. Să se determine lungimile laturilor acestui dreptunghi astfel încît aria sa să fie maximă.

**R.** Să notăm $x = \|NP\| = \|MQ\|$, şi cu $\mathscr{S}$ aria dreptunghiului. Fie $D$ piciorul înălţimii din $A$ pe ipotenuză. Atunci, triunghiurile $AMN$ şi $ABC$ sînt asemenea şi scriind raportul de proporţionalitate, avem:

$$\frac{\|AD\| - x}{\|AD\|} = \frac{\|MN\|}{\|BC\|}.$$

Dar $\|AD\|\cdot\|BC\| = \|AB\|\cdot\|AC\|$, deci :

$$\|AD\| = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

şi deci :

$$\|MN\| = \frac{\|BC\|}{\|AD\|}(\|AD\| - x) = \frac{a^2+b^2}{ab}\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} - x\right).$$

Dar :

$$\mathscr{S} = \|MN\|\cdot x = \frac{a^2+b^2}{ab}\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} - x\right)\cdot x = -$$

$$= -\frac{a^2+b^2}{ab}x^2 + \sqrt{a^2+b^2}\,x.$$

Maximul lui $\mathscr{S}$ se obţine atunci cînd funcţia de gradul doi în $x$ care dă expresia lui $\mathscr{S}$ este maximă, adică pentru $x = \dfrac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$.

**I. 4.19**$^{\mathrm{M}}$. Un călător merge cu automobilul pe o şosea rectilinie $AB$ din oraşul $A$ pînă într-un punct $C$, de unde pleacă mai departe pe jos peste cîmp într-un sat $D$. Se ştie că viteza automobilului este $v_1$ km/h, iar pe jos călătorul face $v_2$ km/h. Cum trebuie ales punctul $C$ astfel ca tot drumul să se facă în timpul minim?

**R.** Să notăm cu $a$, $x$, $y$, lungimile lui $|AD|$, $|AC|$, $|DC|$. Să punem în continuare $b = \|DE\|$, unde $E$ este proiecţia lui $D$ pe $|AB|$. Avem :

$$x = \sqrt{a^2-b^2} - \sqrt{y^2-b^2}.$$

Timpul total pe care îl face călătorul este :

$$t = \frac{x}{v_1} + \frac{y}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{v_1} - \frac{\sqrt{y^2-b^2}}{v_1} + \frac{y}{v_2}.$$

Acest timp este minim dacă $m = \dfrac{y}{v_2} - \dfrac{\sqrt{y^2-b^2}}{v_1}$ este minim. Eliminînd radicalul obţinem ecuaţia de gradul al doilea în $y$ :

$$(v_1^2 - v_2^2)\,y^2 - 2\,v_1^2 v_2 m y + (v_1^2 m^2 + b^2)\,v_2^2 = 0.$$

Condiţia este ca discriminantul acestei ecuaţii să fie pozitiv şi se obţine că $m \geqslant \dfrac{b\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}{v_1 v_2}$.

Deci timpul minim este $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{v_1} - \dfrac{b\sqrt{v_1^2-v_2^2}}{v_1 v_2}$.

**I. 4.20**$^{\mathrm{M}}$. Să se găsească maximul ariei unui dreptunghi înscris într-un cerc dat.

**R.** Dacă $x$ şi $y$ sînt lungimile laturilor dreptunghiului iar $R$ lungimea razei cercului atunci $x^2 + y^2 = 4R^2$. Dacă $\mathscr{S}$ este aria dreptunghiului, atunci $\mathscr{S} = xy$.

Atunci $\mathscr{S}$ este maximă cînd expresia:

$$f(x) = x^2y^2 = x^2(4R^2 - x^2)$$

este maximă. Să spunem $x^2 = t$. Obținem funcția de gradul II, $f$, dată de:

$$f(t) = -t^2 + 4R^2t.$$

Maximul lui $f$ se atinge pentru $t = \frac{4R^2}{2} = 2R^2$, de unde se obține $x = R\sqrt{2}$, și deci $y = \sqrt{2}R$, adică dreptunghiul de arie maximă înscris în cerc este un pătrat cu latura de lungime $R\sqrt{2}$.

**I. 4.21$^{\mathrm{M}}$.** Să se găsească minimul perimetrului unui trapez circumscris unui cerc dat.

**R.** Dacă $R$ este lungimea razei cercului și $x, y$ semilungimile bazelor trapezului, atunci perimetrul său $p$ are lungimea $p = 4(x + y)$, (deoarece am folosit proprietatea că lungimile tangentelor duse dintr-un punct exterior la cerc sînt egale). În plus, se obține:

$$(2R)^2 = (x + y)^2 - (x - y)^2,$$

sau $xy = R^2$, și deci perimetrul are o valoare minimă pentru $x = y = R\sqrt{2}$.

**I. 4.22$^{\mathrm{M}}$.** Să se calculeze lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic cunoscînd lungimea ipotenuzei $a$ și înălțimea de lungime $h$.

*Discuție.*

**R.** Fie $x$ și $y$ lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză. Avem evident sistemul de ecuații: $x + y = a$ și $xy = h^2$.

Rezolvînd sistemul (unde $x, y$ sînt soluțiile ecuației $t^2 - at + h^2 = 0$) se obține $x, y$, iar apoi, imediat $b$ și $c$, lungimile catetelor triunghiului.

**I. 4.23$^{\mathrm{M}}$.** Într-un semicerc cu raza de lungime $R$ să se înscrie un trapez isoscel de perimetru dat $2p$. *Discuție.*

**R.** Se ia ca necunoscută semilungimea bazei inferioare a trapezului, pe care o notăm cu $x$. Înălțimea trapezului va fi $h = \sqrt{R^2 - x^2}$. Se obține ecuația:

$$2x + 2R + 2\sqrt{2R^2 - 2Rx} = 2p$$

sau:

$$x^2 + x(4R - 2p) - 2pR + p^2 - R^2 = 0.$$

Discuția se face după radăcinile acestei ecuații.

**I. 4.24$^{\mathrm{M}}$.** Într-un patrulater $ABCD$ care are unghiurile din vîrfurile $A$ și $C$ cu măsura de 90°, se dau laturile $\|AB\| = a$, $\|BC\| = b$, aria egală cu $k^2$. Să se calculeze lungimile celorlalte laturi ale patrulaterului.

**R.** Fie $\|AD\| = x$, $\|DC\| = y$. Avem sistemul:

$$\begin{cases} ax + by = 2k^2 \\ x^2 + a^2 = y^2 + b^2 \end{cases}$$

Scoțînd din prima ecuație pe $x = \frac{2k^2 - by}{a}$ și înlocuind în a 2-a ecuație, se obține ecuația de gradul II în $y$:

$$y^2(b^2 - a^2) - 4k^2by + a^4 + 4k^4 - a^2b^2 = 0.$$

**I. 4.25^T.** Considerînd ecuația:

$$x^2 + mx + m - 1 = 0,$$

să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel ca $x_1^2 + x_2^2 = 17$; în cazul $m = -3$ să se calculeze rădăcinile $x_1$ și $x_2$, apoi să se verifice relațiile de la punctul precedent.

**R.** Obținem $m = -3$ și $m = 5$, iar pentru $m = -3$, avem $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, iar pentru $m = 5$, avem $x_1 = -1$, $x_2 = -4$.

**I. 4.26^T.** Să se formeze ecuația de gradul al II-lea ale cărei rădăcini $x_1$ și $x_2$ satisfac relațiile:

$$x_1 + x_2 + x_1x_2 + 1 = 0,$$

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 2m; \ m \in \mathbb{R}.$$

**R.** Să observăm că suma și produsul rădăcinilor sînt:

$$x_1 + x_2 = -m; \ x_1x_2 = m - 1,$$

de unde ecuația este:

$$x^2 + mx + m - 1 = 0.$$

**I. 4.27^T.** Să se reprezinte grafic funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$g(x) = |x^2 + x - 4|, (\forall)\, x \in \mathbb{R}.$$

**R.** Notînd $f(x) = x^2 + x - 4$, se va ține cont că:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ pentru } x \in \left(-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \\ \qquad \cup \left[\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}, \infty\right). \\ -f(x), \text{ pentru } x \in \left(\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\right). \end{cases}$$

**I. 4.28^T.** Fie ecuația:

$$x^2 - mx + m - 1 = 0, \ m \in \mathbb{R}.$$

Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel ca ecuația dată să admită rădăcini reale egale.

**R.** Condiția necesară și suficientă ca ecuația să admită rădăcini reale egale este ca discriminantul $\Delta$ să fie nul. Așadar:

$$\Delta = m^2 - 4(m - 1) = 0$$

adică $(m - 2)^2 = 0$ de unde $m = 2$.

**I. 4.29^T.** Se dă funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = |ax^2 - 3x + c|$, cu $0 < a < 2$ și $c < 0$.

a). Să se determine $a$ și $c$ știind că $f(0) = 4$ și $f(1) = 6$.

b). Să se construiască graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = |x^2 - 3x - 4|$.

c). Să se determine $x \in \mathbb{R}$, știind că $-1 \leqslant x \leqslant 4$ și:

$$|x^2 - 3x - 4| \geqslant \frac{25}{4}.$$

d). Tripletul $\{(-\infty, -1]; [4, \infty); f\}$, unde $f(x) = |x^2 - 3x - 4|$ este o aplicație bijectivă?

**R.** a). Avem $a = 1$, $c = -4$, b). Fie $f(x) = |g(x)|$, unde $g(x) = ax^2 - 3x + c$. Se va ține seama că:

$$|g(x)| = \begin{cases} g(x) \text{ pentru } x \in (-\infty, -1] \cup [4, \infty). \\ -g(x) \text{ pentru } x \in (-1, 4). \end{cases}$$

c) $x = \frac{3}{2}$

d). Nu.

**I. 4.30ᵀ.** Se dă funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de legea $f(x) = (m-1)x^2 - 2mx + m + 2$, unde $m$ este un parametru real. Să se afle pentru ce valori ale lui $m$, funcția este pozitivă oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

**R.** Condiția este $m \geqslant 2$.

**I. 4.31ᴹ.** Să se determine mulțimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$, astfel ca rădăcinile ecuației:

$$(m-2)x^2 - x + (m-2) = 0$$

să fie:

a). Reale și egale;

b). Reale și diferite.

**R.** a). Punînd condiția ca discriminantul ecuației să fie zero, obținem $m \in \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$.

b). $m \in \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$,

**I. 4.32ᵀ.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:

$$0 \leqslant x^2 - 4x + 4 \leqslant 1.$$

**R.** Inecuația dată este echivalentă cu următoarele două inecuații:

$$x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$$

și:

$$x^2 - 4x + 3 \leqslant 0.$$

Rezolvînd cele două inecuații și intersectînd soluțiile lor obținem:

$$x \in [1, 3].$$

**I. 4.33ᵀ.** Se dă ecuația:

$$x^2 + (2 - m)x - m - 3 = 0, \ m \in \mathbb{R}.$$

Se cere:

a). Să se arate că oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$ ecuația dată are rădăcini numai în mulțimea numerelor reale:

b). Considerînd funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x) = x^2 + (2 - m)x - m - 3, \ m \in \mathbb{R},$$

să se reprezinte grafic funcţia dată pentru $m = 3$ şi $m = -3$.

**R.** a). Avem de arătat că discriminantul ecuaţiei este potitiv $(\forall)$ $m \in \mathbb{R}$. Avem :

$$\Delta = (2 - m)^2 + 4(m + 3),$$

sau :

$$\Delta = m^2 + 16,$$

şi, evident, $\Delta > 0$, $(\forall)$ $m \in \mathbb{R}$.

b). Graficul este o parabolă.

**I. 4.34**[T]. Se dă familia de parabole $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin :

$$f(x) = (1 - m^2)x^2 + (m - 1)x - (1 + m), \; m \in \mathbb{R}.$$

Să se determine valorile parametrului real $m$ pentru care :

a). Ecuaţia $f(x) = 0$ are rădăcini reale şi de semne contrare ;

b). Are loc relaţia :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leqslant 2$$

unde $x_1$ şi $x_2$ sînt rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$.

c). Una din parabolele familiei are vîrful pe dreapta $x - 2y + 4 = 0$.

**R.** a). Pentru ca ecuaţia să nu fie degenerată este necesar ca $m \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Pentru ca ecuaţia să aibă rădăcini reale şi de semne contrare este necesar şi suficient ca discriminantul ecuaţiei să fie strict pozitiv şi produsul $P$ al rădăcinilor strict negativ. Efectuînd, obţinem $\Delta = (1 - m) \cdot (4m^2 + 7m + 5)$. Deoarece $4m^2 + 7m + 5 > 0$, $(\forall)$ $m \in \mathbb{R}$ (căci discriminantul trinomului este strict negativ), rezultă că $\Delta > 0$ pentru $m \in (-\infty, 1) - \{-1\}$.

Aşadar, ecuaţia are rădăcini reale şi distincte pentru $m \in A = (-\infty, 1) - \{-1\}$. Deoarece $P = -\dfrac{1 + m}{1 - m^2} = -\dfrac{1}{1 - m}$, pentru ca $P < 0$, trebuie ca $m < 1$, deci $m \in B = (-\infty, 1) - \{-1\}$. Intersecţia mulţimilor $A$ şi $B$ conduce la soluţia $m \in (-\infty, 1) - \{-1\}$.

b). Relaţia mai poate fi scrisă $\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} \leqslant 2$, sau, deoarece $x_1 + x_2 = -\dfrac{m - 1}{1 - m^2}$ şi $x_1 x_2 = -\dfrac{1 + m}{1 - m^2}$, inegalitatea se mai scrie, după cîteva calcule, $\dfrac{-m-3}{m + 1} \leqslant 0$, sau $\dfrac{(m + 3)(m + 1)}{(m + 1)^2} \geqslant 0$. Este necesar ca $(m + 1)(m + 3) \geqslant 0$ şi $m \neq -1$, deci, din studiul semnului funcţiei de gradul 2, $m \in (-\infty, -3] \cup (-1, \infty) - \{1\}$.

c). Coordonatele vîrfului $V$ al familiilor de parabole sînt $x_V = -\dfrac{b}{2a}$, $y_V = \dfrac{-\Delta}{4a}$, cînd funcţia este $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. În cazul nostru, $x_V = \dfrac{1}{2(1 + m)}$, $y_V = \dfrac{-4m^2 - 7m - 5}{4(m + 1)}$. Punînd condiţia ca $x_V$ şi $y_V$ să verifice ecuaţia $x - 2y + 4 = 0$, deci ca $x_V - 2y_V +$

$+ 4 = 0$, după cîteva calcule obținem ecuația $4m^2 + 15m + 14 = 0$, cu soluțiile $m_1 = -2$, $m_2 = \frac{-7}{4}$. Pentru aceste valori obținem parabolele $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = -3x^2 - 3x + 1$ și $f_2' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = -\frac{33}{16}x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{3}{4}$.

**I. 4.35**$^{\mathrm{T}}$. Să se formeze ecuația de gradul al II-lea care admite rădăcinile $x_1 = \frac{1}{i}$ $x_2 = i$, unde $i^2 = -1$ și să verifice rezultatul.

**R.** Să observăm că $1/i = -i$. Atunci ecuația de gradul al II-lea care admite ca rădăcini pe i și pe $-$ i, este $x^2 + 1 = 0$.

**I. 4.36**$^{\mathrm{T}}$. a). Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $a^2 - a + 1 = 0$;

b). Dacă $a$ este una din rădăcinile aflate la punctul precedent, să se calculeze valoarea expresiei:

$$E = a^{14} + \frac{1}{a^{14}},$$

scriind mai întîi pe $a$ sub formă trigonometrică.

**R.** a), b). Scriind rădăcinile ecuației de la punctul a) sub formă trigonometrică avem:

$$a_1 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3};\ a_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}.$$

De aici, înlocuind în expresia lui $E$, obținem:

$$E = a_1^{14} + \frac{1}{a_1^{14}} = a_2^{14} + \frac{1}{a_2^{14}} = 2\cos\frac{14\pi}{3} = 2,\cos\frac{2\pi}{3} = -1.$$

Deci $E = -1$.

**I. 4.37**$^{\mathrm{T}}$. Folosind graficul, să se precizeze dacă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{pentru } x \in (-\infty, 2) \\ 1 & \text{pentru } x = 2 \\ x + 1 & \text{pentru } x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

este sau nu injectivă.

**R.** Funcția nu este injectivă deoarece, de exemplu, dreapta $y = -1/3$ intersectează graficul în două puncte distincte.

**I. 4.38**$^{\mathrm{T}}$. Se dă ecuația:

$$x^2\cos^2 a - x + \sin^2 a = 0,\ a \in \mathbb{R}.$$

a). Să se rezolve în $\mathbb{R}$.

b). Să se deterimine valorile lui $a$ pentru care :

$$x_1^2 + x_1^2 - 10 = 0.$$

**R.** a). Soluțiile ecuației sînt $x_1 = 1$, $x_2 = \mathrm{tg}^2\, a$.

b). Relația conduce la $\mathrm{tg}^2\ a = 3$ sau $\mathrm{tg}^2\ a = -3$, deci :

$$a \in \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + k\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

**I. 4.39**[T]**.** Fie ecuația :

$$x^2 + 2(m - 1)\, x + 8(m^2 - 1) = 0,\ m \in \mathbb{R}.$$

a). Să se determine mulțimea valorilor lui $m$ pentru care ecuația admite rădăcini reale.

b). Pentru ce valori ale lui $m$, produsul rădăcinilor este minim?

c). Pentru ce valori ale lui $m$, suma pătratelor rădăcinilor este maximă?

**R.** a). Pentru ca ecuația să admită rădăcini reale este necesar și suficient ca discriminantul ei să fie pozitiv, adică $\Delta = 4(m-1)^2 - 32(m^2-1) \geqslant \geqslant 0$. Această inecuație este echivalentă cu $7m^2 + 2m - 9 \leqslant 0$, deci trebuie ca $m \in \left[-\frac{9}{7}, 1\right]$

b). Deoarece produsul rădăcinilor este egal cu $8(m^2 - 1)$, minimul acestui produs este $-8$ și se realizează pentru $m = 0$. Minimul este egal cu $-8$.

c). Avem $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(m - 1)^2 - 16(m^2 - 1) = = 4(-3m^2 - 2m + 5)$. Maximul acestei expresii se realizează pentru $m = = -\frac{1}{3}$. Pentru această valoare, $x_1^2 + x_2^2 = \frac{64}{3}$.

**I. 4.40**[T]**.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x^2 - - (m - 1)x + m - 1$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$, unde $m$ este un parametru real.

a). Să se determine mulțimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încît rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ să fie complexe.

b). Pentru $m = 5$, să se reprezinte grafic funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = |f(x) - 1|$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$.

c). Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încît între rădăcinile ecuației $f(x) = 0$, notate $x_1$ și $x_2$, să existe relația :

$$\sqrt[3]{x_1 + x_2} + \sqrt[3]{9 - x_1x_2} = 3.$$

**R.** a). Pentru ca rădăcinile ecuației să fie complexe, trebuie ca $\Delta = (m - 1)^2 - 4(m - 1) < 0$, adică $(m - 1)\ (m - 5) < 0$, deci $m \in (1, 5)$.

b). Pentru $m = 5$, obținem funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$g(x) = |\,x^2 - 4x + 4\,| = (x - 2)^2,$$

al cărei grafic este imediat.

c). Avem $x_1 + x_2 = m - 1$, $x_1 x_2 = m - 1$, deci ecuația devine :

$$\sqrt[3]{m-1} + \sqrt[3]{10-m} = 3$$

sau, prin ridicare la cub :

$$m - 1 + 10 - m + 3\sqrt[3]{m-1}\sqrt[3]{10-m}\sqrt[3]{(m-1} + \sqrt[3]{10-m)} = 27$$

deci :

$$\sqrt[3]{m-1}\cdot\sqrt[3]{10-m} = 2.$$

Notînd $a = \sqrt[3]{m-1}$, $b = \sqrt[3]{10-m}$, obținem ecuația de gradul II care are ca rădăcini pe $a$ și $b$ :

$$z^2 - 3z + 2 = 0$$

cu $z_1 = 1$, $z_2 = 2$, deci $m_1 = 2$ sau $m_2 = 9$.

**I. 4.41**[T]. Să se discute natura rădăcinilor ecuației :

$$x^2 - (m+1)x + m + 4 = 0,$$

$m$ fiind un parametru real.

**R.** Discuția o vom face studiind discriminantul ecuației. Avem :

$$\Delta = (m-5)(m+3).$$

Deci, dacă $m \in (-\infty, -3] \cup [5, \infty)$, rădăcinile ecuației sînt reale, iar dacă $m \in (-3, 5)$, rădăcinile ecuației sînt complexe și conjugate.

**I. 4.42**[T]. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația :

$$|x^2 - 1| + |x^2 - 4| - 1 = 0.$$

**R.** Avem :

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{dacă } x \in (-\infty), -1) \cup (1, \infty) \\ -x^2 + 1 & \text{dacă } x \in [-1, 1] \end{cases}$$

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{dacă } x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty) \\ -x^2 + 4 & \text{dacă } x \in [-2, 2]. \end{cases}$$

În raport cu intervalele de explicitare ale modul lor, avem :

Cazul 1). $x \in (-\infty, -2)$. În acest caz ecuația devine :

$$x^2 - 1 + x^2 - 4 - 1 = 0$$

sau $2x^2 - 6 = 0$ de unde $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$, care nu convin.

Cazul 2). $x = -2$ nu convine.

Cazul 3). $x \in (-2, -1)$, Ecuația devine :

$$x^2 - 1 - x^2 + 4 - 1 = 0,$$

imposibilă.

Cazul 4). $x = -1$. Ecuaţia devine :

$$0 + 3 - 1 = 0,$$

imposibil.

Cazul 5). $x \in (-1, 1)$. Ecuaţia devine :

$$-x^2 + 1 - x^2 + 4 - 1 = 0.$$

sau $-2x^2 + 4 = 0$, adică $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, soluţii care nu convin.

Cazul 6). $x = 1$ nu convine.

Cazul 7). $x \in (1, 2)$. Ecuaţia devine :

$$x^2 - 1 - x^2 + 4 - 1 = 0,$$

imposibil.

Cazul 8). $x = 2$ nu convine.

Cazul 9). $x \in (2, \infty)$. Ecuaţia devine :

$$2x^2 - 6 = 0$$

de unde $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$, care nu convin. Deci ecuaţia nu are soluţii reale.

**I. 4.43<sup>T</sup>.** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de relaţia :

$$f(x) = x^2 + x - 6.$$

a). Să se afle coordonatele punctelor unde graficul funcţiei taie axele de coordonate.

b). Să se afle coordonatele punctului de extrem.

c). Să se traseze graficul funcţiei $f$.

**R.** a). Axa $Oy$ este tăiată de graficul funcţiei în punctul $A(0, f(0))$, adică în punctul $A(0, -6)$. Axa $Ox$ este tăiată de graficul funcţiei în punctele $B(x_1, 0)$ şi $C(x_2, 0)$, unde $x_{1,2}$ sînt rădăcinile ecuaţiei :

$$x^2 + x - 6 = 0,$$

adică obţinem $B(-3, 0)$ şi $C(2, 0)$.

b). Pentru a trasa graficul funcţiei este suficient să mai determinăm coordonatele vîrfului parabolei, adică punctul:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

Calculînd, avem $V(-1/2, -25/4)$.

**I. 4.44<sup>T</sup>.** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin $f(x) = (m - 2)x^2 + 2(m + 1)x + m - 3$, unde $m$ este un parametru real. Să se determine $m$ astfel ca funcţia $f$ să admită ca minim pe $-9$.

**R.** Funcţia admite un minim dacă $m - 2 > 0$, iar punctul de minim are coordonatele $V(-b/2a, -\Delta/4a) = V\left(-\frac{m+1}{m-2}, -\frac{28m-20}{4(m-2)}\right)$.

Obţinem $m = 6{,}5$.

**I.4.45^T.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

a) Determinați pe $a, b, c$, astfel încît $-2$ să fie rădăcină a ecuației $f(x) = 0$, iar vîrful parabolei să fie punctul $V(0, -4)$.

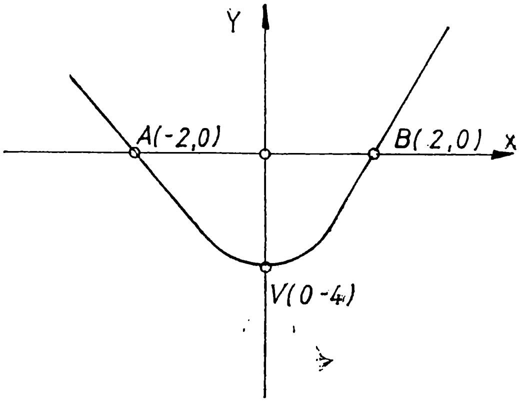
b) Reprezentați grafic funcția $g: (-2, 0] \cup (2, \infty) \to [-4, \infty)$, dată de relația $g(x) = x^2 - 4$. Este această funcție o bijecție? De ce?

**R.** a). Avem sistemul:

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 0, \\ -\dfrac{b}{2a} = 0, \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = -4. \end{cases}$$

Așadar, legea funcției este $f(x) = x^2 - 4$.

b) Graficul funcției este:




**I.4.46^T.** Se dă funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de forma $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

a) Să se calculeze $f(0)$ și $f(1)$, și să se precizeze dacă funcția este o injecție.

b) Să se determine coordonatele punctului de minim și mulțimea valorilor funcției $f$.

**R.** a) Avem $f(0) = 4 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 1 = 1$ și $f(1) = 4 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1 = 1$. Rezultă că $f$ nu este injectivă.

b) Coordonatele punctului de extrem pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, sînt $x_V = -\dfrac{b}{2a}$, $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$. Funcția are minim global dacă $a > 0$, și maxim global dacă $a < 0$. În cazul nostru:

$$x_V = \frac{4}{4 \cdot 2} = \frac{1}{2},\ y_V = f(x_V) = 4 \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 0.$$

Deci mulțimea valorilor lui $f$ este $[0, \infty]$. Să observăm că:

$$f(x) = (2x - 1)^2.$$

**I.4.47**[T]. Se consideră ecuația $(m - 1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile parametrului $m$ pentru care ecuația admite:

a) Rădăcini reale;

b) Rădăcini de același semn;

c) Rădăcini pozitive.

**R.** a) Trebuie ca $\Delta \geqslant 0$, adică $m \geqslant 2/3$.

b) Trebuie ca $m \geqslant 2/3$, iar dacă notăm cu $P$ produsul rădăcinilor, trebuie să avem în plus și $P = (m - 2)/(m - 1) > 0$.

c) Condițiile sînt cele de la punctul precedent și, în plus, dacă notăm cu $S$ suma rădăcinilor, trebuie ca $S > 0$, adică, în final:

$$m \in (2, \infty).$$

**I.4.48**[T]. Se consideră ecuația:

$$x^2 - mx + m + 3 = 0.$$

a) Să se afle mulțimea valorilor reale ale lui $m$ astfel ca rădăcinile ecuației să fie reale.

b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel ca $x_1^2 + x_2^2 = 29$, $x_1$ și $x_2$ fiind rădăcinile ecuației date.

**R.** a) Condiția este echivalentă cu:

$$\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$$

sau $m^2 - 4m - 12 \geqslant 0$, de unde se obține $m \in (-\infty, -2) \cup [6, \infty)$.

b) Relația dată se mai poate scrie:

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 29$$

sau, ținînd cont că $x_1 + x_2 = m$ și $x_1x_2 = m + 3$, avem:

$$m^2 - 2m - 35 = 0,$$

de unde $m \in \{-5, 7\}$.

**I.4.49**[PO]. Să se determine numerele reale $a$, $c$, $b$ pentru care:

$$|ax^2 + bx + c| \leqslant 1,$$

pentru $|x| \leqslant 1$, iar valoarea expresiei:

$$\frac{8}{3} a^2 + 2b^2$$

este maximă.

**R.** În locul maximului expresiei:

$$\frac{8}{3}a^2 + 2b^2.$$

poate fi considerat maximul expresiei :

$$\frac{3}{2}\left(\frac{8}{3}a^2 + 2b^2\right) = 4a^2 + 3b^2.$$

Folosim următoarea :

*Lemă.* Dacă $u, v \in \mathbb{R}$ și $|u| \leqslant 1$, $|v| \leqslant 1$, atunci :

$$|u - v| \leqslant 2,$$

cu egalitate numai dacă $u = 1$, $v = -1$, $u = -1$, $v = 1$.

Demonstrația este evidentă. Aplicînd acest rezultat funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin :

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

obținem:

$$2 \geqslant |f(1) - f(0)| = |a+b+c-c| = |a+b|, \tag{1}$$

deci $(a-b)^2 \leqslant 4$. Pentru $x = -1$, $x$ și $x = 0$, obținem :

$$2 \geqslant |f(-1) - f(0)| = |a - b + c - c| = |a - b|$$

deci :

$$(a - b)^2 \leqslant 4 \tag{2}$$

Din (1) și (2) obținem :

$$4a^2 + 3b^2 = 2(a + b)^2 + 2(a - b)^2 - b^2 \leqslant 16,$$

cu egalitate cînd $b = 0$ și deci :

$$|a + b| = |a - b| = |a| = 2.$$

În acest caz :

$$|f(1) - f(0)| = |(a + c) - c| = |a| = 2,$$

și deci $|c| = 1$ și $|a + c| = 1$ ; astfel, sau $c = 1$, $a = -2$, $b = 0$, sau $c = -1$, $a = 2$, $b = 0$.

În aceste două cazuri, cînd $0 \leqslant |x| \leqslant 1$, se găsește că :

$$0 \leqslant x^2 \leqslant 1, \ -2 \leqslant 2x^2 - 1 \leqslant 1.$$

Astfel :

$$|2x^2 - 1| = |-2x^2 + 1| = |ax^2 + bx + c| \leqslant 1,$$

caz în care:

$$\max\left(\frac{8}{3}a^2 + 2b^2\right) = \frac{32}{3}.$$

**I.4.50**PO. Să se arate că pentru orice $x \geqslant 1/2$, există $n \in \mathbb{Z}$ astfel încît:

$$|x - n^2| \leqslant \sqrt{x - \frac{1}{4}}.$$

**R.** Să considerăm un şir de numere $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin:

$$a_n = \frac{(n-1)^2 + n^2}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Fiecărui număr real $x \geqslant \dfrac{1}{2}$ îi punem în corespondenţă numărul întreg $k(x)$ după cum urmează: dacă:

$$a_n = \frac{(n-1)^2 + n^2}{2} \leqslant x \leqslant \frac{n^2 + (n+1)^2}{2} = a_{n+1},$$

punem $n = k(x)$. Deoarece $a_1 = \dfrac{1}{2}$, numărul $k(x)$ este definit pentru orice $x \geqslant 1/2$.

Cînd $x \geqslant \dfrac{1}{2}$, expresia de sub radicalul care intervine în inegalitatea din enunţ este pozitivă, iar membrul stîng este, de asemenea, pozitiv fiind un modul.

Ridicînd ambii membri ai inegalităţii la pătrat, se obţine inegalitatea echivalentă:

$$x^2 - 2n^2x + n^4 \leqslant x - \frac{1}{4},$$

sau:

$$x^2 - (2n^2 + 1)x + \left(n^4 + \frac{1}{4}\right) \leqslant 0. \qquad (*)$$

Trebuie arătat faptul că atunci cînd $x$ variază între limitele indicate, polinomul de gradul II din membrul întîi al inegalităţii (*) este negativ. Se verifică imediat că rădăcinile polinomului:

$$P = X^2 - (2n^2 + 1)X + \left(n^4 + \frac{1}{4}\right),$$

sînt:

$$x_{1,2} = n^2 + \frac{1}{2} \pm n,$$

şi sînt între limitele $a_n$ şi $a_{n+1}$. Întrucît un polinom de gradul al doilea care are coeficientul dominant pozitiv şi rădăcini reale ia pe intervalul dintre rădăcini numai valori negative, inegalitatea (*) este adevărată şi deci afirmaţia din enunţ este demonstrată.

**I.4.51**[T]**.** Se dă ecuaţia:

$$(m-2)x^2-(3m+2)x+m+1=0.$$

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel ca rădăcinile ecuaţiei să fie reale şi distincte.

b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, ştiind că rădăcinile ecuaţiei satisfac relaţia:

$$x_1^2+x_2^2=7.$$

**R.** a) Se ştie că pentru ca rădăcinile ecuaţiei:

$$ax^2+bx+c=0$$

să fie reale şi distincte este necesar şi suficient (în ipoteza $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$), ca $\Delta = b^2-4ac > 0$. Aplicînd acest rezultat ecuaţiei propuse, găsim că parametrul real $m$ trebuie să satisfacă inegalitatea:

$$(3m+2)^2-4(m-2)(m+1)>0. \qquad (1)$$

Pe de altă parte, pentru ca ecuaţia să nu fie degenerată este necesar ca $m \neq 2$.

După oarecari calcule, inecuaţia devine:

$$5m^2+16m+12>0.$$

Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$, ştim că păstrează pe tot domeniul de definiţie semnul lui $a$, dacă $\Delta \leqslant 0$, iar dacă $\Delta > 0$, între rădăcini are semn contrar lui $a$, iar în afara rădăcinilor semnul lui $a$. În cazul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(m)=5m^2+16m+12$, avem $\Delta = 16^2 - 4\cdot 5\cdot 12=16>0$, iar ecuaţia $5m^2+16m+12=0$ are rădăcinile $m_1=-2$, $m_2=-\dfrac{6}{5}$. Semnul monomului $m^2$ este + deci $f$ va fi pozitivă (deci va păstra semnul lui „$a$") în afara rădăcinilor, adică pentru $m$ aparţinînd mulţimii $(-\infty,-2)\cup\left(-\dfrac{6}{5},\infty\right)$. Aceasta este, aşadar, mulţimea valorilor lui $m$ pentru care ecuaţia are rădăcini reale şi distincte.

b) Vom folosi relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi (relaţiile lui VIÈTE):

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\,;\; x_1x_2=\frac{c}{a}$$

în cazul ecuaţiei $ax^2+bx+c=0$. Pentru ecuaţia din enunţ, $x_1+x_2=\dfrac{3m+2}{m-2}$, $x_1x_2=\dfrac{m+1}{m-2}$. Pe de altă parte, $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-$

$$-2x_1x_2=\left(\frac{3m+2}{m-2}\right)^2-2\frac{m+1}{m-2}=\frac{7m^2+14m+8}{(m-2)^2},$$ astfel ca relația devine:

$$7m^2+14m+8=7(m-2)^2$$

sau, după calcule, $42m=20$, deci $m=\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$.

**I.4.52^T.** Să consideră ecuația:

$$x^2-mx+m+3=0,\quad m\in\mathbb{R}.$$

a) Să se determine mulțimea valorilor lui $m\in\mathbb{R}$, astfel ca rădăcinile ecuației date să fie reale.

b) Să se calculeze valoarea lui $m\in\mathbb{R}$, cunoscînd că:

$$x_1^2+x_2^2=29.$$

c) În cazul $m=7$, fără rezolvarea ecuației, să se determine valoarea expresiei:

$$E=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_1x_2}.$$

**R.** a) Condiția ca rădăcinile ecuației să fie reale este ca discriminantul $\Delta$ al ecuației să fie pozitiv, adică $\Delta\geqslant 0$. Cum $\Delta=m^2-4(m+3)$ condiția devine $m^2-4m-12\geqslant 0$. Rădăcinile ecuației $m^2-4m-12=0$ sînt $m_1=6$, $m_2=-2$, astfel că inecuația de mai sus este verificată pentru $m\in(-\infty,-2]\cup[6,+\infty)$ deoarece funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, cînd $b^2-4ac>0$, este pozitivă în afară rădăcinilor dacă $a>0$.

b) Conform relațiilor lui VIÈTE, $x_1+x_2=m$, $x_1x_2=m+3$ și $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$, deci $x_1^2+x_2^2=m^2-2m-6$, astfel că relația din enunț devine $m^2-2m-6=29$ sau $m^2-2m-35=0$, ecuația de gradul II cu rădăcinile $m_1=7$, $m_2=-5$.

c) Avem, succesiv:

$$E=\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2}+\frac{1}{x_1x_2}=\frac{m^2-2m-6}{(m+3)^2}+\frac{1}{m+3}=\frac{m^2-m-3}{(m+3)^2}.$$

În cazul $m=7$, $E=\frac{39}{100}$.

## §. 5. Radicali

**I.5.1^M.** Să se găsească radicalii:

a) $\sqrt{(x-1)^2}$;

b) $\sqrt{(x+5)^2}$;

c) $\sqrt{(2x^3-3x+1)^2}$;

d) $\sqrt{(-3x^2+x-1)^2}$.

R. Avem:

a) $|x-1|$; b). $|x+5|$; c). $|2x^3-3x+1|$; d). $|-3x^2+x-1|$.

**I.5.2ᴹ.** Să se efectueze suma:

$$\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(5-x)^2}.$$

R. Avem:

$$\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(5-x)^2}=|x-2|+|5-x|$$

Atunci:

a) dacă $x\in(-\infty,\ -2]$, avem:

$$|x-2|+|5-x|=-x+2+5-x=-2x+7;$$

b) dacă $x\in(2,\ 5]$, avem:

$$|x-2|+|5-x|=x-2+5-x=3;$$

c) dacă $x\in(5,\ \infty)$, avem:

$$|x-2|+|5-x|=x-2-5+x=2x-7.$$

**I.5.3ᴹ.** Să se găsească valorile lui $x$ pentru care sînt definite expresiile:

a) $f(x)=\sqrt{x-2}$; b) $f(x)=\sqrt[5]{x-2}$; c) $f(x)=\sqrt[4]{3x^2+5x-2}$;

d) $f(x)=\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[4]{5x-5}$; e) $f(x)=\sqrt[6]{x^2-x+2}$.

R. Avem:

a) $x\geqslant 2$; b) $x\in\mathbb{R}$; c) $x\in(\infty,\ -2]\cup\left[\frac{1}{3},\ \infty\right)$;

d) $x\geqslant 1$; e) $x\in\mathbb{R}$.

**I.5.4ᴹ.** Să se construiască graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

$$f(x)=\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(5-x)^2}.$$

R. Avem:

$$f(x)=\begin{cases}-2x+7 & \text{dacă } x\in(-\infty,\ 2]\\ 3 & \text{dacă } x\in(2,\ 5]\\ 2x-7 & \text{dacă } x\in(5,\ \infty)\end{cases}$$

Graficul este imediat.

**I.5.5ᴹ.** Să se simplifice expresiile:

a) $\sqrt[8]{[(x-1)^4(x+1)]^4}$; b) $\sqrt[8]{(x^2-x+1)^4}$

**R.** a) Expresia se mai scrie:

$$\sqrt{|x^2 - 1|}.$$

b) Deoarece $x^2 - x + 1 > 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$, expresia se mai scrie:

$$\sqrt{x^2 - x + 1}.$$

**I.5.6$^M$.** Fără a calcula radicalii să se găsească care dintre numerele următoare este mai mare:

a) $2\sqrt{3}$ sau $3\sqrt{2}$; b) $5\sqrt{7}$ sau $8\sqrt{3}$; c) $3\sqrt[3]{4}$ sau $4\sqrt[3]{2}$.

**R.** a) Avem $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ şi $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$, deci $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$.

b) $5\sqrt{7} = \sqrt{175}$ şi $8\sqrt{3} = \sqrt{192}$, deci: $8\sqrt{3} > 5\sqrt{7}$.

c) $3\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{108}$ şi $4\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{128}$, deci $4\sqrt[3]{2} > 3\sqrt[3]{4}$.

**I.5.7$^M$.** Să se simplifice expresiile:

a) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}}$; b) $\sqrt{\frac{a+1}{a-1}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}$

**R.** a) Avem, succesiv:

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}} = \sqrt{\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)^2}} = \sqrt[4]{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}.$$

b) Avem, succesiv:

$$\sqrt{\frac{a+1}{a-1}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}} = \sqrt[4]{\frac{a-1}{a+1}\cdot\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2} = \sqrt[4]{\frac{a+1}{a-1}}.$$

**I.5.8.$^M$** Să se raţionalizeze numitorii fracţiilor:

a) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{24}}$; c) $\dfrac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$;

d) $\dfrac{15}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{7}}$; e) $\dfrac{31}{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}$; f) $\dfrac{1}{\sqrt{5+\sqrt{2}}}$;

g) $\dfrac{1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}$; h) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}$.

R. a) Amplificînd cu $(1-\sqrt{2})$ obținem $2\sqrt{2}-3$.

b) Folosind egalitatea $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ și punînd $a=\sqrt[3]{A}$ și $b=\sqrt[3]{B}$, avem:

$$A-B=(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2})$$

Acum, pentru $A=25$, $B=24$, amplificînd expresia cu:

$$\sqrt[3]{25^2}+\sqrt[3]{25\cdot 24}+\sqrt[3]{24^2}$$

se obține:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{24}}=\frac{\sqrt[3]{25^2}+\sqrt[3]{25\cdot 24}+\sqrt[3]{24^2}}{25-24}=5\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{75}+4\sqrt[3]{9}.$$

c) Se amplifică fracția cu $(3+\sqrt{2})+\sqrt{5}$ și se obține:

$$\frac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\frac{12\,[3+\sqrt{2}+\sqrt{5}\,]}{6(1+\sqrt{2})}=\frac{2(3+\sqrt{2}+\sqrt{5})(1-\sqrt{2})}{-1}=$$

$$=2\,(2\sqrt{2}+\sqrt{10}-\sqrt{5}-1).$$

d) Analog cu b) avem $\frac{3}{2}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{49})$ e) Analog cu c) avem:

$$\frac{31}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1).$$

f) Expresia are valoarea:

$$\frac{\sqrt{5+\sqrt{2}}(5-\sqrt{2})}{23}$$

g) Avem:

$$\frac{1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-1)-\sqrt{3}\,(\sqrt{2}-1)}=\frac{1}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}\;(\sqrt{2}-1)}=$$

$$=-(\sqrt{2}+\sqrt{3})\,(\sqrt{2}+1).$$

h) $\sqrt{\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\,(a-b)}}{a-b}$

**I.5.9^M.** Să se simplifice expresiile:

i) $E_1 = \dfrac{3\sqrt{a}}{a} + a^{1/6}\sqrt[3]{a} - \dfrac{a^{2/7}}{\sqrt[21]{a}} - \dfrac{3a^0}{\sqrt{a}}\ (a > 0);$

ii) $E_2 = \dfrac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \dfrac{x^{3/2} - y^{3/2}}{x - y}\ (x > 0,\ y > 0,\ x \neq y).$

**R.** i) Avem, succesiv:

$$E_1 = \cancel{3a^{-1/2}} + a^{1/2} - a^{5/21} - \cancel{3a^{-1/2}} = \sqrt{a} - \sqrt[21]{a^5}$$

ii) După calcule se obține:

$$E_2 = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

?!! 03/05/97

**I.5.10^M.** Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt{x - 3} = x - 3$; b) $\sqrt{7 - \sqrt{x - 3}} = 2$;

c) $\sqrt{4 - x} + \sqrt{5 + x} = 3$; d) $\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x} = \sqrt{2a}$;

e) $\sqrt{x - 3} - \sqrt{x + 3} = 2 - \sqrt{10}$;

f) $\sqrt{x - a} + \sqrt{x - b} + \sqrt{x - c} + d = 0,$

unde $d > 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; caz particular:

$$a = 1, b = 2, c = 3, d = 1.$$

**R.** a) Se observă că $x = 3$ este o soluție a ecuației.

Dacă $x \neq 3$ și $x > 3$, ridicînd la pătrat și efectuînd, se obține $x - 3 = 1$ sau $x = 4$. Deci soluțiile ecuației sînt $x_1 = 3$ și $x_2 = 4$.

b) Punînd condițiile de existență ale radicalului și anume $x - 3 \geqslant 0$ și $7 - \sqrt{x - 3} \geqslant 0$, adică $x \in [3, 46]$, ridicînd la pătrat și efectuînd se obține $\sqrt{x - 3} = 3$, de unde $x - 3 = 9$ sau $x = 12$.

c) Condițiile de existență ale radicalilor sînt $4 - x \geqslant 0$ și $5 + x \geqslant 0$, adică $x \in [-5, 4]$. Ridicînd la pătrat avem:

$$4 - x + 5 + x + 2\sqrt{(4 - x)(5 + x)} = 9$$

sau:

$$(4 - x)(5 + x) = 0,$$

de unde $x = 4$ și $x = -5$.

04/11/95

d) Punînd condiția ca $a > 0$ și $|x| \leqslant a$, ridicînd la pătrat, se obține:

$$(a - x)(a + x) = 0,$$

cu soluțiile $x = a$ și $x = -a$.

e) Analog ca în d) cu condiția $|x| \leqslant 3$, se obține ridicînd la pătrat și efectuînd, $x = 7$.

f) Să observăm că:

$$\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b} + \sqrt{x-c} = -d < 0,$$

imposibil, deci ecuația nu are soluții în mulțimea numerelor reale.

**I.5.11^M^.** Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x+b} + \sqrt[3]{x+c} = 0$$

unde $a$, $b$, $c$ sînt numere reale. *Discuție.*

**R.** Să observăm că orice soluție a ecuației date este soluție a ecuației:

$$(3x + a + b + c)^3 = 27(x + a)(x + b)(x + c)$$

(prin ridicarea egalității la cub și avînd în vedere că $\sqrt[3]{x+b} + \sqrt[3]{x+c} = -\sqrt[3]{x+a}$ și ridicînd iar la cub etc.) sau:

$$9[(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + ac + bc)]x = 27abc - (a + b + c)^3,$$

iar de aici, $x = \dfrac{27abc - (a + b + c)^3}{9[(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + ac + bc)]}$.

**I.5.12^M^.** Să se demonstreze că, pentru $1 \leqslant x \leqslant 2$, avem:

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2.$$

**R.** Să observăm că:

$$x + 2\sqrt{x-1} = x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1 = (\sqrt{x-1} + 1)^2$$

și:

$$x - 2\sqrt{x-1} = x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1 = (\sqrt{x-1} - 1)^2$$

deci expresia din stînga devine:

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1} - 1)^2} =$$
$$= |\sqrt{x-1} + 1| + |\sqrt{x-1} - 1|,$$

de unde, ținînd cont că $1 \leqslant x \leqslant 2$, avem:

$$|\sqrt{x-1} - 1| = 1 - \sqrt{x-1},$$

de unde:

$$|\sqrt{x-1} + 1| + |\sqrt{x-1} - 1| = \sqrt{x-1} + 1 - \sqrt{x-1} + 1 = 2.$$

**I.5.13^M^.** Să se calculeze:

$$\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[12]{y^{19}}} \cdot \left(\frac{x^{-1/2} \cdot \sqrt[3]{y}}{\sqrt[4]{xy^{-1}}}\right)^{1/3} \cdot \left(\frac{x^{-3/8}}{y^{-2/8}}\right)^{4/3}$$

pentru $x = 5$, $y = 20$.

**R.** Expresia devine:

$$\frac{x^{1/4-1/6-1/12-1/2}}{y^{19/12-1/12-8/9-\frac{1}{9}}} = \frac{x^{-1/2}}{y^{1/2}}.$$

Punînd $x = 5$, $y = 20$ se obţine 0,1 valoarea expresiei.

**I.5.14$^{\text{M}}$.** Să se arate că, pentru orice $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ şi $\sqrt{abc} > 2$, are loc identitatea:

$$\frac{\sqrt{\dfrac{abc+4}{a} - 4\sqrt{\dfrac{bc}{a}}}}{\sqrt{abc} - 2} = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

**R.** Avem succesiv:

$$\frac{\sqrt{\dfrac{abc+4}{a} - 4\sqrt{\dfrac{bc}{a}}}}{\sqrt{abc} - 2} = \frac{\sqrt{\dfrac{abc - 4\sqrt{abc} + 4}{a}}}{\sqrt{abc} - 2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{abc}-2}{\sqrt{a}}\right)^2}}{\sqrt{abc} - 2} = \frac{\sqrt{abc} - 2}{\sqrt{a}\,(\sqrt{abc} - 2)} = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

**I.5.15$^{\text{T}}$.** Să se raţionalizeze numitorul fracţiei:

$$\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

**R.** Se amplifică cu conjugatul numitorului, adică cu $1 + \sqrt{2}$, obţinîndu-se $3 + 2\sqrt{2}$.

**I.5.16$^{\text{PT}}$.** Să se arate că $\sqrt{7} + \sqrt{8}$ nu este număr raţional.

**R.** Presupunînd $\sqrt{7} + \sqrt{8} = q \in \mathbb{Q}$, prin ridicare la pătrat obţinem $7 + 8 + 2\sqrt{56} = q^2 \in \mathbb{Q}$, din $\sqrt{14} = \dfrac{q^2 - 15}{4} \in \mathbb{Q}$, absurd, căci $\sqrt{14} \notin \mathbb{Q}$.

**I.5.17$^{\text{PT}}$.** Să se raţionalizeze numitorul fracţiei:

$$\frac{1}{3+\sqrt{2}+\sqrt{5}}.$$

**R.** Fracţia se mai poate scrie:

$$\frac{(3+\sqrt{2}-\sqrt{5})(-\sqrt{2}+1)}{-6}.$$

**I.5.18[PT].** Să se arate că expresia:

$$\frac{295 - 413\sqrt[3]{2} + 177\sqrt[3]{4}}{5 + 3\sqrt[3]{4} - 7\sqrt[3]{2}}$$

este număr întreg.

**R.** Dînd factor pe 59 la numărător și simplificînd, obținem rezultatul 59.

**I.5.19[PO].** Să se arate că:

$$\sqrt[5]{3 + 5\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}} + \sqrt[5]{3 + 5\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}} = 1.$$

**R.** Avem $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(1 \pm \sqrt{5})^3} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ și primul membru devine:

$$\sqrt[5]{3 + \frac{5}{2}(1 + \sqrt{5})} + \sqrt[5]{3 + \frac{5}{2}(1 - \sqrt{5})} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(\sqrt[5]{11 + 5\sqrt{5}}\right) + \sqrt[5]{11 - 5\sqrt{5}}).$$

Dar $11 \pm 5\sqrt{5} = \frac{1}{2^4}(1 \pm \sqrt{5})^5$ și egalitatea rezultă imediat.

**I.5.20[PO].** Să se simplifice fracțiile:

a) $$\frac{a^2 + a\sqrt{b} - \sqrt{ab} - a}{a + \sqrt{a} + \sqrt{b}},$$

b) $$\frac{2a + 5\sqrt[4]{a^3b} - 5\sqrt[4]{ab^3} - 2b}{2\sqrt{a} + 5\sqrt{ab} + 2\sqrt{b}},$$

c) $$\frac{x^2 + y + \sqrt[3]{z^2} - 2x\sqrt{y} + 2x\sqrt[3]{z} - 2\sqrt[6]{y^3z^3}}{x^2 - y - \sqrt[3]{z^2} + 2\sqrt[6]{y^3z^2}}.$$

**R.** a) Succesiv:

$$\frac{a^2 + a\sqrt{b} - \sqrt{ab} - a}{a + \sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(a^2 - a) + (a\sqrt{b} - \sqrt{ab})}{a + \sqrt{a} + \sqrt{b}} =$$

$$= \frac{a(a-1) + \sqrt{ab}\,(\sqrt{a} - 1)}{a + \sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{= a(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1) + \sqrt{ab}(\sqrt{a} - 1)}{a + \sqrt{a} + \sqrt{b}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{a}-1)(a\sqrt{a}+a+\sqrt{ab})}{a+\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a+\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a}(\sqrt{a}-1).$$

b) De asemenea:

$$\frac{2a+5\sqrt[4]{a^3b}-5\sqrt[4]{ab^3}-2b}{2\sqrt{a}+5\sqrt[4]{ab}+2\sqrt{b}} = \frac{2(a-b)+5\sqrt[4]{ab}(\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[4]{b^2})}{2\sqrt{a}+5\sqrt[4]{ab}+2\sqrt{b}} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})+5\sqrt[4]{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2\sqrt{a}+5\sqrt[4]{ab}+2\sqrt{b}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}+5\sqrt[4]{ab})}{2\sqrt{a}+5\sqrt[4]{ab}+2\sqrt{b}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}.$$

c) Răspunsul este:

$$\frac{x-\sqrt{y}+\sqrt[3]{z}}{x+\sqrt{y}-\sqrt[3]{z}}.$$

**1.5.21T.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\sqrt{1+ax} = x+\sqrt{1-ax},\ a \in \mathbb{R}.$$

**R.** Ecuația are sens dacă și numai dacă $|ax| \leqslant 1$. Totodată, se observă că $x=0$ verifică ecuația, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

În continuare vom căuta rădăcini $x \in \mathbb{R}^*$ cu $|ax| \leqslant 1$ și vom prezenta trei soluții distincte.

*Soluția I.* Fie $f_a(x) = \sqrt{1+ax}-\sqrt{1-ax}$ cu $|ax| \leqslant 1$ și $x \in \mathbb{R}$. Avem de rezolvat ecuația $f_a(x) = x$ cu $x \in \mathbb{R}$. Deci:

$f_a(-x) = \sqrt{1-ax}-\sqrt{1+ax} = -f_a(x)$, $(\forall)$, $x \in \mathbb{R}^*$ cu $|ax| \leqslant 1$, adică $f_a$ este impară și:

$$0 < |f_a(x)| = |x| = |\sqrt{1+ax}-\sqrt{1-ax}| \leqslant \sqrt{1+ax}+\sqrt{1-ax} =$$

$$= \frac{1+ax-1+ax}{f_a(x)} = \frac{2ax}{x} = 2a.$$

Prin urmare, $a > 0$ și datorită imparității funcției $f_a$ vom căuta numai rădăcini $x \in \mathbb{R}_+^*$ pentru ecuația dată $f_a(x) = x$, rezultînd că dacă pentru un $x > 0$ avem $f_a(x) = x$, atunci avem și $f_a(-x) = -x$.

Deci:

$$x = f_a(x) = \sqrt{1 + ax} - \sqrt{1 - ax},$$

adică:

$$x^2 = 1 + ax + 1 - ax - 2\sqrt{1 - a^2x^2}$$

sau:

$$2\sqrt{1 - a^2x^2} = 2 - x^2 \geqslant 0$$

de unde deducem că:

$$x \in (0, \sqrt{2}].$$

Prin urmare:

$$2\sqrt{1 - a^2x^2} = 2 - x^2$$

sau:

$$4 - 4a^2x^2 = 4 - 4x^2 + x^4$$

adică:

$$x^4 = 4x^2(1 - a^2)$$

de unde, dacă ţinem seama că $x > 0$ rezultă $x^2 = 4(1 - a^2)$ de unde rezultă $x = 2\sqrt{1 - a^2}$ cu $1 - a^2 > 0$, adică $a \in (-1, 1)$ şi, dacă ţinem seama că $a > 0$, obţinem că $a \in (0, 1)$.

Din faptul că $x \in (0, \sqrt{2}]$ deducem că $x^2 \leqslant 2$ adică $4(1 - a^2) \leqslant 2$ sau $0 \leqslant 2a^2 - 1$ deci $a \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$, de unde, dacă ţinem seama că $a \in (0, 1)$, rezultă $a \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$. Datorită faptului că pentru $a = 1$ avem:

$$\sqrt{1 + x} = 1 - \sqrt{1 - x}$$

adică:

$$\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x} = x$$

adică:

$$1 + x + 1 - x - x^2 = 2\sqrt{1 - x^2}$$

sau:

$$4 - 4x^2 + x^4 = 4 - x^2,$$

rezultă $x^4 = 0$ deci $x = 0$, astfel că deducem că ecuaţia are rădăcini nenule dacă şi numai dacă:

$$a \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right).$$

Deci, ecuaţia are rădăcina $x = 0$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$ şi are rădăcinile $x_1 = 0$, $x_2 = 2\sqrt{1 - a^2}$, $x_3 = -2\sqrt{1 - a^2}$ pentru orice $a \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

*Soluţia a II-a.* Avem $f_a(x) = x$ de unde, prin înmulţire cu :

$$\sqrt{1 + ax} + \sqrt{1 - ax} > 0$$

rezultă :

$$1 + ax - 1 + ax = x(\sqrt{1 + ax} + \sqrt{1 - ax})$$

sau :

$$2ax = x(\sqrt{1 + ax} + \sqrt{1 - ax})$$

şi deoarece $x \in \mathbb{R}^*$ rezultă că :

$$2a = \sqrt{1 + ax} + \sqrt{1 - ax} > 0$$

adică $a > 0$. Din egalitatea :

$$2a = \sqrt{1 + ax} + \sqrt{1 - ax},$$

prin ridicare la pătrat obţinem :

$$4a^2 = 1 + ax + 1 - ax + 2\sqrt{1 - a^2x^2}$$

adică :

$$2a^2 - 1 = \sqrt{1 - a^2x^2} \geqslant 0$$

care împreună cu $a > 0$ ne dă $a \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$.

Deoarece :

$$2a^2 - 1 = \sqrt{1 - a^2x^2}$$

deducem :

$$4a^4 - 4a^2 + 1 = 1 - a^2x^2$$

sau :

$$a^2x^2 = 4a^2(1 - a^2)$$

şi deoarece $a > 0$ deducem :

$$x^2 = 4(1 - a^2) \geqslant 0$$

de unde, împreună cu $a \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ rezultă $a \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ iar de aici, dacă ţinem seama că pentru $a = 1$ rezultă $x = 0$, obţinem că $a \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

Prin urmare, $x^2 = 4(1 - a^2)$ de unde $x = \pm 2\sqrt{1 - a^2}$.

*Soluția a III-a.* Din faptul că $|ax| \leqslant 1$ rezultă că există $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ astfel încît $ax = \cos 2t$ și deoarece pentru $a = 0$ rezultă $x = 0$, deducem că $ax \neq 0$ adică $\cos 2t \neq 0$, de unde $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Prin urmare:

$$\sqrt{1 + ax} - \sqrt{1 - ax} = x$$

sau:

$$\sqrt{1 + \cos 2t} - \sqrt{1 - \cos 2t} = \frac{\cos 2t}{a}$$

sau:

$$\sqrt{2} \cos t - \sqrt{2} \sin t = \frac{\cos 2t}{a}$$

sau:

$$a \sqrt{2} (\cos t - \sin t) = (\cos t - \sin t)(\cos t + \sin t)$$

de unde, dacă ținem seama că $t \neq \frac{\pi}{4}$, deducem:

$$\cos t + \sin t = a \sqrt{2} > 0,$$

adică $a > 0$.

Din ultima egalitate rezultă:

$$2a^2 = 1 + \sin 2t$$

sau:

$$2a^2 - 1 = \sin 2t \geqslant 0$$

adică $a \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$. Totodată avem $\sin 2t = 2a^2 - 1 \leqslant 1$ deci $a^2 \leqslant 1$, adică $a \leqslant 1$, adică $a \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$.

Dacă $a = 1$ atunci $\sin 2t = 1$ deci $2t = \frac{\pi}{2}$ sau $t = \frac{\pi}{4}$, ceea ce este absurd.

Deci $a \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ și atunci:

$$\sin 2t = 2a^2 - 1$$

de unde:

$$\cos 2t = \pm\sqrt{1 - \sin^2 2t} = \pm\sqrt{1 - 4a^4 + 4a^2 - 1} = \pm 2a\sqrt{1 - a^2}.$$

adică:

$$x = \frac{\cos 2t}{a} = \pm 2\sqrt{1 - a^2}.$$

**I.5.22**PO Să se arate că:

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}}<3,\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}^*.$$

**R.** Evident are loc:

$$\sqrt{x}\leqslant\frac{1+x}{2},\quad (\forall)\in[0,\ \infty),$$

căci această inegalitate este echivalentă cu:

$$(\sqrt{x}-1)^2\geqslant 0.$$

Avem:

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n}}}\leqslant\frac{1+1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n}}}{2}=\frac{2}{2}+$$

$$+\frac{\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n}}}{2}\leqslant\frac{2}{2}+\frac{1+2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}{2^2}=\frac{2}{2}+$$

$$+\frac{3}{2^2}+\frac{\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}{2^2}\leqslant\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\ldots+\frac{n-1}{2^{n-2}}+$$

$$+\frac{1+(n-1)+\sqrt{n}}{2^{n-1}}\leqslant\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\ldots+\frac{n-1}{2^{n-2}}+\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{n+1}{2^n}.$$

Deci:

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n}}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1+i}{2^i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}.$$

Dar:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}=1-\frac{1}{2^i}.$$

Să demonstrăm în continuare că:

$$x+2x^2+\ldots+nx^n=\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2},\quad (\forall)\in\mathbb{R}-\{1\}.$$

Raţionăm prin inducţie matematică. Pentru $n=1$, egalitatea este evidentă. Presupunem egalitatea adevărată pentru un $k\in\mathbb{N}$ oarecare:

$$x+2x^2+\ldots+kx^k=\frac{kx^{k+2}-(k+1)x^{k+1}+x}{(x-1)^2}.$$

Adăugînd pe $(k+1)x^{k+1}$ la ambii membrii ai egalității precedente, obținem :

$$x+2x^2+\ldots+kx^k+(k+1)x^{k+1}=\frac{kx^{k+2}-(k+1)x^{k+1}+x}{(x-1)^2}+$$
$$+(k+1)x^{k+1}.$$

Dar :

$$\frac{kx^{k+2}-(k+1)x^{k+1}+x}{(x-1)^2}+(k+1)x^{k+1}=\frac{(k+1)x^{k+3}-(k+2)x^{k+2}+x}{(x-1)^2}.$$

După cum se poate constata, făcînd celelalte calcule, formula este deci adevărată.

De aici deducem că :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}\leqslant 4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=2-\frac{2}{2^n}$$

şi deci :

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}}\leqslant 3-\frac{3}{2^n}<3.$$

**I.5.23**PO. Să se găsească, fără a folosi derivata, valoarea minimă funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin :

$$f(x)=\sqrt{x^2+a}+\sqrt{(c-x)^2+b},$$

unde $a, b, c\in\mathbb{R}$.

**R.** Considerăm un segment $|AB|$ de lungime $c$, iar la capetele lui ducem două drepte perpendiculare, pe care considerăm de o parte şi de alta a segmentului, segmentele $|AC|$ şi $|BD|$ cu lungimile de $\sqrt{a}$ şi $\sqrt{b}$.

Pe segmentul $|AB|$ luăm un punct variabil $M$ şi notăm măsura segmentului $|AM|$ cu $x$. Se formează două triunghiuri dreptunghiuce $ACM$ şi $BDM$, de unde deducem :

$$\|MC\|=\sqrt{x^2+a};\quad \|MD\|=\sqrt{(c-x)^2+b}.$$

Suma :

$$f(x)=\|MC\|+\|MD\|,$$

este minimă cînd punctele $C$, $D$, $M$ vor fi coliniare. În acest caz triunghiurile $ADM$ şi $BDM$ sînt asemenea, şi deci :

$$\frac{x_{\min}}{c-x}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$

de unde :

$$x_{\min}=\frac{c\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},$$

astfel că :

$$\min f=f\left(\frac{c\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=\sqrt{c^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}.$$

**I.5.24**PO. Să se determine numerele $x$, $y$ naturale pentru care:

$$\sqrt{x^2 + y + 1} + \sqrt{y^2 + x + 4}$$

este natural.

**R.** Fie $x, y \in \mathbb{N}$ pentru care:

$$x + y > 3.$$

Atunci, deoarece:

$$\sqrt{x^2 + y + 1} + \sqrt{y^2 + x + 4} \in \mathbb{N},$$

rezultă:

$$\sqrt{x^2 + y + 1} \in \mathbb{N}, \ \sqrt{y^2 + x + 4} \in \mathbb{N},$$

şi deci $x^2 + y + 1$ şi $y^2 + x + 4$ trebuie să fie pătrate perfecte.

Deducem că:

$$x^2 + y + 1 \geqslant (x + 1)^2, \ y^2 + x + 4 \geqslant (y + 1)^2.$$

Adunînd cele două relaţii, obţinem:

$$x + y + 2 \leqslant 5, \ x + y \leqslant 3,$$

contradicţie. Deci nu putem avea soluţii pentru $x + y > 3$. Analizînd cazul cînd:

$$x + y \leqslant 3,$$

obţinem soluţiile:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0; \qquad x_2 = 1, \quad y_2 = 2.$$

**I.5.25**PO. Să se determine $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ astfel încît:

$$\sqrt[n]{x^2 + a^n} + \sqrt[n+1]{y^2 + a^{n+1}} = \begin{cases} 2a, & \text{pentru } a \geqslant 0 \\ 0, & \text{pentru } a < 0. \end{cases}$$

**R.** Pentru $x = 0$, funcţia $x^2 + a^n$ are minimul $a^n$, iar minimul funcţiei $y^2 + a^{n+1}$ se obţine pentru $y = 0$, şi este $a^{n+1}$, deci:

$$\sqrt[n]{x^2 + a^n} + \sqrt[n]{y^2 + a^{n+1}} \geqslant \sqrt[n]{a^n} + \sqrt[n+1]{a^{n+1}} = a + |a|.$$

Dat fiind că:

$$a + |a| = \begin{cases} 2a, & \text{pentru } a \geqslant 0, \\ 0, & \text{pentru } a < 0. \end{cases}$$

rezultă că singura soluţie este:

$$x = 0, \ y = 0.$$

**I.5.26**PO. Determinaţi valorile posibile ale expresiei:

$$\sqrt{a^2 + a + 1} - \sqrt{a^2 - a + 1},$$

pentru $a \in \mathbb{R}$.

**R.** Notînd:
evident
$$f(a) = \sqrt{a^2 + a + 1} - \sqrt{a^2 - a + 1},$$
se observă că $f(a)$ are sens $(\forall)$ $a \in \mathbb{R}$. În plus:
$$f(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0, \; f(-a) = -f(a).$$

Este deci suficient să determinăm mulţimea valorilor expresiei pentru $a > 0$. Fie $a > 0$ fixat, avem:
$$f(a) = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + a + 1} + \sqrt{a^2 - a + 1}}.$$

De aici $f(a) > 0$ şi arătăm că $f(a) < 1$. Într-adevăr, această inegalitate se scrie succesiv:
$$2a < \sqrt{a^4 + a + 1} + \sqrt{a^2 - a + 1},$$
$$a^2 - 1 < \sqrt{a^4 + a^2 + 1},$$
$$a^2 - 1 < \sqrt{(a^2 - 1)^2 + 3a^2},$$

Am arătat deci că:
$$\{f(a) | a > 0\} \subseteq (0, 1).$$

Pentru cealaltă incluziune, arătăm că $(\forall)$ $x \in (0, 1)$, $(\exists)$ $a > 0$, astfel încît $f(a) = x$.

Fie $x \in (0, 1)$. Egalitatea $f(a) = x$ este echivalentă cu:
$$\sqrt{a^2 + a + 1} - \sqrt{a^2 - a + 1} = x; \; 2(a^2 + 1) - x^2 = 2\sqrt{a^4 + a^2 + 1};$$
$$4a^2(1 - x^2) = 4x^2 - x^4; \; a^2 = \frac{x^2(4 - x^2)}{1 - x^2},$$
de unde $a > 0$. Aşadar, am arătat că:
$$\{f(a) | a > 0\} = (0, 1).$$

Ţinînd cont că $f(0) = 0$ şi că $f(-a) = -f(a)$, rezultă:
$$\{f(a) | a \in \mathbb{R}\} = (-1, 1).$$

**I.5.27**PO Fie funcţia $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, dată de:
$$f(x) = \sqrt{x - a} + \sqrt{b - x}, \quad a < b.$$

a) Să se arate că $f$ este crescătoare pe $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ şi descrescătoare pe $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$.

b) Să se găsească extremele funcției $f$.

**R.** Fie $x_1, x_2 \in [a, b]$ cu $x_1 < x_2$. Atunci:

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)\left[\frac{1}{\sqrt{x_1 - a} + \sqrt{x_2 - a}} - \frac{1}{\sqrt{b - x_1} + \sqrt{b - x_2}}\right] =$$

$$= (x_1 - x_2)\left[\frac{(\sqrt{b - x_1} + \sqrt{b - x_2}) - (\sqrt{x_1 - a} + \sqrt{x_2 - a})}{(\sqrt{x_1 - a} + \sqrt{x_2 - a})(\sqrt{b - x_1} + \sqrt{b - x_2})}\right].$$

Dacă $x_1 < x_2 \leqslant \dfrac{a + b}{2}$, atunci:

$$2x_1 < a + b,\ 2x_2 \leqslant a + b \Leftrightarrow x_1 - a < b - x_1,\ x_2 - a \leqslant b - x_2,$$

de unde:

$$\sqrt{x_1 - a} < \sqrt{b - x_1};\ \sqrt{x_2 - a} \leqslant \sqrt{b - x_2},$$

și, ținînd cont de (1), rezultă $f(x_1) < f(x_2)$, deci funcția $f$ este crescătoare pe $\left[a, \dfrac{a + b}{2}\right]$.

Dacă $\dfrac{a + b}{2} \leqslant x_1 < x_2$, atunci:

$$2x_1 \geqslant a + b;\ 2x_2 > a + b \Leftrightarrow x_1 - a \geqslant b - x_1;\ x_2 - a > b - x_2,$$

și deci:

$$\sqrt{x_1 - a} \geqslant \sqrt{b - x_1};\ \sqrt{x_2 - a} > \sqrt{b - x_2},$$

și, ținînd cont de (1), rezultă $f(x_1) > f(x_2)$ și deci funcția $f$ este descrescătoare pe $\left[\dfrac{a + b}{2}, b\right]$.

b) Punctul de maxim va fi atins pentru $x = \dfrac{a + b}{2}$, de unde:

$$f\left(\frac{a + b}{2}\right) = \sqrt{2(b - a)}.$$

Punctul de minim trebuie căutat într-unul din capetele intervalului $[a, b]$, și se observă că:

$$f(a) = f(b) = \sqrt{b - a}.$$

## §.6. Sisteme de ecuatii

**I.6.1ᵀ.** Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x - y = 1. \end{cases}$$

**R.** Sistemul are forma echivalentă:

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} xy = 6 \\ x + y = \pm 5 \end{cases}.$$

De aici, avem că soluţiile sistemului sînt:

$$(3,\ 2) \text{ şi } (-2,\ -3).$$

**I.6.2ᵀ.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{x-1} : \dfrac{4}{y-1} = 25 : 24; \\[2ex] \dfrac{2}{x+1} : \dfrac{3}{y+1} = 7 : 12. \end{cases}$$

**R.** Cu condiţiile $x \notin \{-1,\ 1\}$, $y \notin \{-1,\ 1\}$, sistemul se scrie:

$$\begin{cases} 6y - 5x = 1 \\ 8y - 7x = -1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x = 7 \\ y = 6 \end{cases}.$$

**I.6.3ᵀ.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul:

$$x^2 + y^2 = 25;\quad xy = 12.$$

**R.** Din prima ecuaţie a sistemului rezultă $(x + y)^2 - 2xy = 25$, deci $(x + y)^2 = 25 + 2xy = 25 + 24 = 49$, adică $x + y = 7$ sau $x + y = -7$. Obţinem, aşadar, sistemul:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

cu soluţiile $(3, 4)$ şi $(4, 3)$, sau sistemul:

$$\begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

cu soluţiile $(-3,\ -4)$ şi $(-4,\ -3)$.

**I.6.4ᵀ.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul:

$$\left\{\frac{x-2}{y-3} = 1;\quad (x-2)(y-3) = 1\right.$$

**R.** Dacă facem substituția $x - 2 = u$ și $y - 3 = v$, sistemul devine:

$$\begin{cases} \dfrac{u}{v} = 1 \\ uv = 1 \end{cases}$$

care conduce la soluțiile:

$$\begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} u = -1 \\ v = -1 \end{cases}.$$

**I.6.5ᵀ.** Să se rezolve sistemul: $x + y = 6$, $xy = 5$.

**R.** Ecuația de gradul al doilea atașată sistemului este:

$$t^2 - St + P = 0$$

unde $S = x + y = 6$, iar $P = xy = 5$, de unde soluțiile sistemului inițial vor fi $(5, 1)$ și $(1, 5)$.

**I.6.6ᵀ.** Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13. \end{cases}$$

**R.** Acest sistem este omogen și simetric, dar va fi rezolvat cu ajutorul proprietăților ecuațiilor și egalităților mult mai rapid. Avem succesiv:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} -3x^2 + 9xy - 3y^2 = 3 \\ \phantom{-}3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$$

de unde, prin adunarea celor două ecuații: $xy = 2$.

Deci avem:

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 9 \\ xy = 2 \end{cases},$$

de unde $\begin{cases} x + y = \pm 3, \\ xy = 2, \end{cases}$ care se reduce la rezolvarea a două sisteme simple.

Se vede că sistemul $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$ are soluții pe $(1, 2)$; $(2, 1)$, iar $\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 2 \end{cases}$ are ca soluții $(-1, -2)$, $(-2, -1)$.

**I.6.7ᵀ.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} y = 4 - 2x \\ y = x^2 - 3x + 2. \end{cases}$$

**R.** Prin înlocuirea lui $y$ din prima ecuație în a doua, rezultă:

$$x^2 - x - 2 = 0,$$

cu soluțiile $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Pentru fiecare din aceste soluții rezultă $y_1 = 6$, $y_2 = 0$.

**I.6.8ᵀ.** Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ știind că:

$$a + b + c = -a$$

$$ab + ac + bc = b$$

$$abc = -c.$$

**R.** Să observăm că, potrivit relațiilor lui VIÈTE, $a$, $b$, $c$ sînt soluțiile ecuației de gradul III:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

unde $a$, $b$, $c$ verifică ecuația. Scriind că numerele verifică ecuația, obținem o soluție imediată a sistemului:

$$a = b = c = 0$$

După cîteva calcule obținem și soluția:

$$b = c = -1, \ a = 1.$$

**I.6.9ᵀ.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul:

$$x + y = 4, \ x^3 + y^3 = 28.$$

**R.** Deoarece $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$, sistemul devine:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 - xy = 7 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases},$$

de unde rezultă că $x$ și $y$ sînt soluțiile ecuației:

$$z^2 - 4z + 3 = 0$$

cu rădăcinile $z_1 = 1$, $z_2 = 3$. Deci, sau $x_1 = 1$, $y_1 = 3$ sau $x_1 = 3$, $y_1 = 1$.

**I.6.10ᵀ.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} x + y = 1; \\ 2^x 6^y = 54. \end{cases}$$

**R.** Sistemul se scrie succesiv:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2^{x+y} \cdot 3^y = 2 \cdot 3^3 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x + y = 1 \\ 3^y = 3^3 \end{cases}, \text{ de unde } \begin{cases} x = -2. \\ y = 3 \end{cases}$$

**I.6.11**[PO]. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Să se afle soluţiile reale ale sistemului de ecuaţii:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = na,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = na^2,$$
$$x_1 + x_2^2 + \ldots + x_n^n = a.$$

**R.** Avem:

$$n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2.$$

Se ştie însă că:

$$n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \geqslant (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2,$$

cu egalitate numai dacă:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

Aşadar, în cazul nostru:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = a.$$

Ultima ecuaţie devine:

$$a + a^2 + \ldots + a^n = a,$$

sau:

$$a\frac{a^n - 1}{a - 1} = a$$

$a \neq 1$, de unde $a = 0$ sau $a^{n-1} = 1$.

Dacă $a = 1$ atunci $n = 1$ şi deci:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1.$$

Dacă $a = 0$ atunci:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

Dacă $a^{n-1} = 1$ şi $n$ este par, atunci $a = 1$, imposibil, căci am văzut că în acest caz $n = 1$.

Dacă $a^{n-1} = 1$ şi $n$ impar, convine $a = -1$, care conduce la:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = -1.$$

**I.6.12**[PO]. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{x_1}{a_1 + \lambda_1} + \frac{x_2}{a_2 + \lambda_1} + \ldots + \frac{x_n}{a_n + \lambda_1} - 1 = 0,$$

$$\frac{x_1}{a_1 + \lambda_2} + \frac{x_2}{a_2 + \lambda_2} + \ldots + \frac{x_n}{a_n + \lambda_2} - 1 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



9

$$\frac{x_1}{a_1+\lambda_n}+\frac{x_2}{a_2+\lambda_n}+\ldots+\frac{x_n}{a_n+\lambda_n}-1=0,$$

unde $a_i, \lambda_i \in \mathbb{R}$, $(\forall)\, i \in \overline{1, n}$ şi $a_i - a_j \neq 0$, pentru orice $i, j \in \overline{1, n}$, cu $i \neq j$ şi $a_i + \lambda_j \neq 0$, pentru orice $\{i, j\} \in \{1, \ldots, n\}^2$.

**R.** Considerăm funcţia $f\colon \mathbb{R} - \{-a_1, -a_2, \ldots, -a_n\} \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(\theta)=1-\frac{x_1}{a_1+\theta}-\frac{x_2}{a_2+\theta}-\ldots-\frac{x_n}{a_n+\theta}, \tag{1}$$

care, potrivit enunţului, se anulează pentru $\theta \in \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$; ca atare:

$$f(\theta)=k\frac{(\theta-\lambda_1)\ldots(\theta-\lambda_n)}{(\theta+a_1)\ldots(\theta+a_n)},$$

$k$ fiind o constantă. Aşadar:

$$1-\frac{x_1}{a_1+\theta}-\frac{x_2}{a_2+\theta}-\ldots-\frac{x_n}{a_n+\theta}=k\frac{(\theta-\lambda_1)\ldots(\theta-\lambda_n)}{(\theta+a_1)\ldots(\theta+a_n)}=$$

$$=k\frac{\left(1-\frac{\lambda_1}{\theta}\right)\ldots\left(1-\frac{\lambda_n}{\theta}\right)}{\left(1+\frac{a_1}{\theta}\right)\ldots\left(1+\frac{a_n}{\theta}\right)}$$

oricare ar fi $\theta \in \mathbb{R} - (\{0\} \cup \{-a_1, \ldots, -a_n\})$. Cînd $\theta$ tinde către $+\infty$, fiecare din fracţiile:

$$\frac{\lambda_i}{\theta},\quad \frac{a_i}{\theta},\quad i \in \overline{1, n},$$

tinde către 0 şi, analog pentru fracţiile:

$$\frac{x_i}{a_i+\theta},\quad i \in \overline{1, n}.$$

Obţinem $k = 1$, deci:

$$1-\frac{x_1}{a_1+\theta}-\frac{x_2}{a_2+\theta}-\ldots-\frac{x_n}{a_n+\theta}=\frac{(\theta-\lambda_1)\ldots(\theta-\lambda_n)}{(\theta+a_1)\ldots(\theta+a_n)}$$

oricare ar fi $\theta \in \mathbb{R} - \{-a_1, \ldots, -a_n\}$. Înmulţind această egalitate cu $a_i + \theta$, $i \in \overline{1, n}$, obţinem:

$$1-\frac{x_1(a_i+\theta)}{a_1+\theta}-\frac{x_2(a_i+\theta)}{a_2+\theta}-\ldots-\frac{x_{i-1}(a_i+\theta)}{a_{i-1}+\theta}-x_i-\ldots-\frac{x_n(a_i+\theta)}{a_n+\theta}=$$

$$=\frac{(\theta-\lambda_1)\ldots(\theta-\lambda_n)}{(\theta+a_1)\ldots(\theta+a_{i-1})(\theta+a_{i+1})\ldots(\theta+a_n)}.$$

Făcînd aici $\theta = -a_i$, găsim :

$$-x_i = \frac{(-a_i - \lambda_1)\dots(-a_i - \lambda_n)}{(-a_i + a_1)\dots(-a_i + a_n)},$$

de unde :

$$x_i = (-1)^{n+1} \frac{\prod_{j=1}^{n}(a_i + \lambda_j)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(-a_i + a_j)},$$

oricare ar fi $i \in \overline{1, n}$.

**I. 6.13**[PO]**.** Să se determine soluțiile reale ale sistemului :

$$2x_1 x_2 = x_1^2 + 2,$$
$$2x_2 x_3 = x_2^2 + 2,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$2x_n x_1 = x_n^2 + 2.$$

**R.** Fie $(x_1', x_2', \dots x_n')$ o soluție reală a sistemului. Pentru această soluție, sistemul mai poate fi scris și sub forma :

$$\begin{aligned} 2x_2' &= x_1' + \frac{2}{x_1'}, \\ 2x_3' &= x_2' + \frac{2}{x_2'}, \\ &\dots\dots\dots, \\ 2x_1' &= x_n' + \frac{2}{x_n'}, \end{aligned} \tag{1}$$

în ipoteza că $x_1', x_2', \dots, x_n' \neq 0$. Dacă există un $k \in \overline{1, n}$ astfel încît $x_k' = 0$ atunci, evident :

$$x_k'^2 + 2 = 0,$$

absurd, deci, oricum $x_1'x_2' \dots x_n' \neq 0$. În plus, numerele $x_k'$, $k = \overline{1, n}$, sînt de același semn, astfel că, pe lîngă soluția $(x_1', \dots, x_n')$, există soluția $(-x_1', \dots, -x_n')$ deci, în cazul în care există o soluție, putem presupune că ea este formată numai din numere strict pozitive (să remarcăm că dacă există $k \in \overline{1, n}$ astfel încît $x_k < 0$ atunci $x_i < 0$, oricare ar fi $i \in \overline{1, n}$).

Fie deci $x_k' > 0$, oricare ar fi $k \in \overline{1, n}$. Din inegalitatea evidentă :

$$x_k' + \frac{2}{x_k'} \geqslant 2\sqrt{2}, \ (\forall)\ k \in \overline{1, n} \tag{*}$$

deducem:

$$\sum_{k=1}^{n} x'_k + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x'_k} \geqslant 2n\sqrt{2}. \tag{2}$$

Dar, adunînd egalitățile (1), obținem:

$$\sum_{k=1}^{n} x'_k = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x'_k}. \tag{3}$$

Din:

$$2x'_{k+1} = x'_k + \frac{2}{x'_k} \geqslant 2\sqrt{2}, \quad (\forall)\, k \in \overline{1, n}$$

(cu convenția $x'_{n+1} = x'_1$) rezultă:

$$\frac{1}{x'_k} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2},$$

adică:

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x'_k} \leqslant n\sqrt{2}.$$

Folosind (3), relația (2) devine:

$$n\sqrt{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} x'_k = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x'_k} \leqslant n\sqrt{2},$$

deci:

$$n\sqrt{2} = \sum_{k=1}^{n} x'_k = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x'_k}.$$

De aici rezultă că în toate inegalitățile precedente avem egalitate, deci și în (*) de unde:

$$x'_k = \frac{2}{x'_k}, \quad (\forall)\, k \in \overline{1, n},$$

adică $x'_k = \sqrt{2}$, oricare ar fi $k \in \overline{1, n}$ și, folosind observația de la început rezultă că singurele soluții ale sistemului sînt:

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{2}),\ (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \ldots, -\sqrt{2}).$$

**I. 6.14**[PO]. a). Se dă sistemul:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i = 0,\\
&\cdots\cdots\\
&\sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_i = 0.
\end{aligned}$$

Se presupune că:

1°). $a_{ij} > 0$, dacă $i = j$;

2°). $a_{ij} < 0$, dacă $i \neq j$;

3°). $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0$, pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Să se arate că singura soluţie a sistemului este:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

b). Se dă sistemul:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i = b_1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_i = b_n,$$

Se ştie că orice soluţie $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a sistemului satisface condiţiile:

$$x_i \leqslant M, (\forall)\, i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

unde $M > 0$ este finit.

Să se arate că sistemul are cel mult o soluţie.

**R.** Putem presupune, fără a restrînge generalitatea problemei, că între necunoscutele $x_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ există o relaţie de ordine, de exemplu:

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n,$$

în caz contrar schimbăm rolul necunoscutelor între ele.

Evident, sistemul admite soluţia banală:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots, x_n = 0.$$

Vom arăta că, în ipotezele enunţului, această soluţie este unică.

Presupunem contrariul. Fie $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ o soluţie oarecare în care cel puţin o componentă este nenulă. Avem de studiat următoarele cazuri:

1). Dacă:

$$x'_1 = x'_2 = \ldots = x'_n,$$

atunci oricare din ecuaţiile sistemului, de exemplu:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i = 0,$$

unde $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, devine:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\right) x'_1 = 0, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

deci $x'_1 = 0$ şi deci $x'_i = 0$, $(\forall)\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

2). Fie $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ astfel încît $x'_i \neq x'_j$. Vom nota:

$$y_k = x'_k - x'_{k+1},\ k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}.$$

În acest caz, numerele $y_k$ $(k \in \{1, 2, \ldots, n-1\})$ sînt pozitive şi cel puţin unul dintre ele este strict pozitiv (în caz contrar, se obţine cazul 1)).

Cu substituţiile precedente, prima ecuaţie a sistemului devine:

$$a_{11}(x'_n + y_1 + \ldots + y_{n-1}) + a_{12}(x'_n + y_2 + \ldots + y_{n-1}) +$$
$$+ \ldots + a_{1,n-1}(x'_n + y_n) + a_{1n}x'_n = 0$$

care se mai poate scrie:

$$y_1a_{11} + y_2(a_{11} + a_{12}) + \ldots + y_{n-1}(a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1,n-1})+$$
$$+ x'_n(a_{11} + \ldots + a_{1n}) = 0.$$

Deoarece $y_k \geqslant 0$, oricare ar fi $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ (căci $x'_1 \geqslant \ldots \geqslant x'_n$) şi, conform enunţului:

$$a_{11} > a_{11} + a_{12} > a_{11} + a_{12} + a_{13} > \ldots > a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n} > 0$$

rezultă:

$$(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})(a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n}) +$$
$$+ x'_n(a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n}) < 0$$

sau:

$$(a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n})(x'_n + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) < 0.$$

Revenind la substituţii, obţinem:

$$x'_1(a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n}) < 0.$$

Deoarece $a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n} > 0$ (din ipoteza 3) se obţine $x'_1 < 0$ şi, avînd în vedere relaţia de ordine, $x'_i < 0$, $(\forall)\, i \in \overline{1, n}$.

Raţionamentul se poate aplica oricare ar fi relaţia de ordine între numerele $x_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, deci sistemul în ipoteza că admite şi soluţii nebanale, are soluţiile de acest tip formate numai din numere strict negative. Dar dacă sistemul admite soluţia $(x'_1, \ldots, x'_n)$ formată numai din numere negative, admite şi soluţia $(-x'_1, \ldots, -x'_n)$ formată numai din numere pozitive, contrar cu rezultatul anterior.

b). În ipoteza că există soluţia $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, presupunem că mai există altă soluţie $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$. Vom nota:

$$y_j = x_j - x'_j (j \in \{1, 2, \ldots, n\})$$

Cu această soluţie obţinem sistemul liniar:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1i}y_i = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ni}y_i = 0.$$

Dacă acest sistem admite o soluţie, alta decît cea banală, atunci admite şi una în aşa fel încît, pentru un $i \in \overline{1, n}$, $y_i < 0$, deci, pentru acest $i$:

$$x_i - x'_i < 0$$

(Dacă $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ este formată din numere strict pozitive, atunci soluţia $(\lambda y_1, \lambda y_2, \ldots, \lambda y_n)$ cu $\lambda < 0$, este încă o soluţie cu numere strict negative).

Presupunem, fără a restrînge generalitatea, că $i = 1$. Dintre toate soluţiile sistemului dat o alegem pe cea care are pe $x_1$ cel mai mare. Atunci $x'_1 > x_1$, ceea ce este absurd, deci soluţia presupusă nu există.

## §.7. Numere complexe

**I. 7.1**[M]. Să se găsească numerele reale $x$ şi $y$ din ecuaţiile:

a) $(5x + 3yi) + (2y - xi) = 3 - i$;

b) $(x + 3\,yi) + \dfrac{3}{2}y + 2x\,i = 4 + 8i$;

c) $\left(-3y + \dfrac{1}{2}xi\right) - (-8x + 5yi) = -2 + 12i$;

d) $\dfrac{x-2}{1-i} + \dfrac{y-3}{1+1} = 1 - 3i.$

**R.** a) Izolînd părţile reale şi cele imaginare, avem:

$$(3x + 2y - 3) + i\,(3y - x + 1) = 0$$

de unde obţinem sistemul:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0, \\ 3y - x + x = 0, \end{cases}$$

de unde, rezolvînd (înmulţim, de exemplu a doua ecuaţia cu 3 şi o adunăm la prima), obţinem:

$$x = \frac{11}{7};\ y = -\frac{2}{17}.$$

b) La fel ca în a), izolînd, obţinem:

$$\left(x + \frac{3}{2}y - 4\right) + i\,(3y + 2x - 8) = 0$$

deci, se obţine $x = t$, $y = \dfrac{2}{3}(4 - t)$, cu $t \in \mathbb{R}$, oarecare.

c) Rezolvînd ca mai sus, se obţine sistemul:

$$-3y + 8x + 2 = 0$$
$$\frac{1}{2}x - 5y - 12 = 0$$

care, rezolvat, dă soluţia:

$$x = -\frac{92}{77};\ y = -\frac{194}{77}.$$

d) Ecuaţia se mai scrie:

$$\frac{(x-2)(1+i)}{2} + \frac{(y-3)(1-i)}{2} = 1 - 3i,$$

sau:

$$x-2+y-3-2=0; \quad x-2+3-y+6=0$$

de unde, rezolvînd, se obţine:

$$x=0 \text{ şi } y=7.$$

**I. 7.2^M.** Să se calculeze:

a) $\dfrac{2+3i}{1-i}$; b) $\dfrac{2i}{2-i}$; c) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$; d) $\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}i}{b\sqrt{a}-a\sqrt{b}i}$;

e) $\dfrac{a-bi}{b+ai}-i\dfrac{b-ai}{a+bi}$; f) $\dfrac{\sqrt{1+a}+i\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}-i\sqrt{1-a}}-$

$-\dfrac{\sqrt{1-a}+i\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}-i\sqrt{1+a}}$; g) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^4+\left(\dfrac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^4$.

**R.** a) Avem:

$$\frac{2+3i}{1-i}=\frac{(2+3i)(1+i)}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i.$$

b) $$\frac{2i}{2-i}=\frac{2i(2+i)}{5}=-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i.$$

c) $$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\frac{(1+i\sqrt{3})^2}{4}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

d) $$\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}i}{b\sqrt{a}-a\sqrt{b}i}=\frac{(a\sqrt{b}+b\sqrt{a}i)(b\sqrt{a}+a\sqrt{b}i)}{ab^2+a^2b}=i.$$

e) $$\frac{a-bi}{b+ai}-i\frac{b-ai}{a+bi}=\frac{(a-bi)(b-ai)}{a^2+b^2}+$$

$$+\frac{(-a-bi)(a-bi)}{a^2+b^2}=-1-i.$$

f) La fel, amplificînd cu conjugatele numitorilor se obţine pentru expresia dată valoarea $2a$.

g) Avem:

$$\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^4+\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^4=\frac{(-3+i\sqrt{7})^2}{4}+\frac{(-3-i\sqrt{7})^2}{4}=$$

$$=\frac{2+2i\sqrt{7}}{4}+\frac{2-2i\sqrt{7}}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

**I. 7.3^M.** Să se spună care sînt conjugatele numerelor complexe $1+i$; $2-3i$; $5$; $4i$; $0$; $2i-1$, şi să se interpreteze geometric.

**R.** Conjugatele sînt respectiv:

$$1 - i,\ 2 + 3i;\ 5;\ -4i;\ 0;\ -2i - 1.$$

iar ele sînt simetrice în raport cu axa $Ox$ cu afixele numerelor complexe date.

**I. 7.4$^M$.** Să se calculeze:

a) $i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46}$; b) $(-i)^3 + (-i)^{13} + (-i)^{23} + (-i)^{33} + (-i)^{43}$;

c) $i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^n\ (n \geq 4)$;

d) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \ldots i^{100}$;

e) $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3},\ n \in \mathbb{N}$.

**R.** Vom ține seama de egalitățile:

$$i^{4k} = 1;\quad i^{4k+1} = i;\quad i^{4k+2} = -1;\quad i^{4k+3} = -i,\ (\forall)k \in \mathbb{N}.$$

a) Avem:

$$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 = -1$$

b) $i - i + i - i + i = i$

c) Expresia este egală cu 0 dacă $n = 4k$; i dacă $n = 4k + 1$; $i - 1$ dacă $n = 4k + 2$; $-1$ dacă $n = 4k + 3$.

d) Relația se mai scrie:

$$i \cdot i^2 \cdot i^3 \ldots i^{100} = i^{1+2+3+\cdots+100} = i^{\frac{100(100+1)}{2}} = i^{50 \cdot 101} = i^2 = -1.$$

e) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ expresia are valoarea 0.

**I. 7.5$^M$.** Să se găsească valorile reale ale lui $m$ astfel încît numărul $3i^3 - 2mi^2 + (1 - m)i + 5$ să fie:
a) real; b) imaginar; c) nenul.

**R.** Numărul dat este egal cu numărul:

$$5 + 2m + i(-2-m)$$

a) Condiția revine la $-2-m = 0$ sau $m = -2$;

b) Condiția revine la $5 + 2m = 0$, deci $m = -\dfrac{5}{2}$;

c). Pentru orice valoare a lui $m$.

**I. 7.6$^M$.** Să se descompună în factori de gradul întîi trinoamele:
a) $X^2 - 2X + 2$; b) $4X^2 + 4X + 5$; c) $X^2 - 14X + 74$.
**R.** Avem:

a) $X^2 - 2X + 2 = (X - 1 - i)(X - 1 + i)$;

b) $4X^2 + 4X + 5 = (2X + 1 - 2i)(2X + 1 + 2i)$;

c) $X^2 - 14X + 74 = (X - 7 - i\sqrt{5})(X - 7 + i\sqrt{5})$.

**I. 7.7$^M$.** Să se găsească ecuațiile de gradul al doilea cu coeficienți reali, astfel încît una dintre rădăcini să fie:

a) $(3 - i)(2i - 4)$; b) $\frac{32 - i}{1 - 3i}$; c) $\sqrt{a} + i\sqrt{b}$ ($a$, $b$ fiind numere reale și pozitive).

**R.** Dacă o ecuație de gradul al doilea admite rădăcina $x + iy$, atunci admite și pe $x - iy$.

Astfel, avem:

a) $(3 - i)(2i - 4) = -10 + 10i$, deci cealaltă rădăcină a ecuației este $-10-10i$. Ecuația de gradul al doilea cu aceste rădăcini va fi:

$$[m(x + 10 - 10i)(x + 10 + 10i)] = m(x^2 + 20x + 200) = 0,\ m \in \mathbb{R}^*.$$

b) $\frac{32 - i}{1 - 3i} = \frac{(32 - i)(1 + 3i)}{10} = \frac{35}{10} + \frac{95}{10}i$; deci ecuația admite și rădăcina $\frac{35}{10} - \frac{95}{10}i$. Ecuația va fi:

$$m(2x^2 - 14x + 205) = 0, \text{ cu } m \in \mathbb{R}^*.$$

c) Ecuația admite și rădăcina $\sqrt{a} - i\sqrt{b}$. Ea va fi:

$$m(x - \sqrt{a} - \sqrt{b}i)(x - \sqrt{a} + \sqrt{b}i) = m(x^2 - 2\sqrt{a}x + a + b) = 0,\ m \in \mathbb{R}.$$

**I. 7.8$^M$.** Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^3 = 27$; b) $x^3 = -27$; c) $3x^3 = 2$; d) $x^3 = -5$;

e) $x^4 = 16$; f) $x^4 = -16$; g) $x^4 = -3$.

**R.** a) Ecuația se mai scrie $x^3 - 27 = 0$, sau:

$$(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = 0,$$

cu soluțiile $x_1 = 3$; $x_2 = -\frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}i)$; $x_3 = -\frac{3}{2}(1 + \sqrt{3}i)$.

b) Ecuația se scrie:

$$x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) = 0,$$

de unde se obțin soluțiile:

$$x_1 = -3;\ x_2 = \frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}i);\ x_3 = \frac{3}{2}(1 + \sqrt{3}i).$$

c) Ecuația se scrie $3x^3 - 2 = 0$, sau $x^3 - \frac{2}{3} = 0$, sau

$$\left(x - \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)\left(x^2 + x\sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right) = 0.$$

de unde se obține $x_1 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$;

$$x_2 = -\frac{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt[6]{\frac{4}{9}};\quad x_3 = \frac{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt[6]{\frac{4}{9}}.$$

d) Ecuația se scrie:

$$X^3 + 5 = (X + \sqrt[3]{5})(X^2 - \sqrt[3]{5}X + \sqrt[3]{25}) = 90, \text{ cu soluțiile:}$$

$$x_1 = -\sqrt[3]{5};\quad x_2 = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3});\quad x_3 = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}).$$

e) Ecuația se scrie:

$$x^4 - 16 = (x + 2)(x - 2)(x^2 + 4) = 0,$$

de unde rezultă rădăcinile:

$$x_1 = 2;\quad x_2 = -2;\quad x_3 = -2\mathrm{i};\quad x_4 = 2\mathrm{i}.$$

f) Ecuația se scrie:

$$x^4 + 16 = (x^2 + 4)^2 - 8x^2 = (x^2 + 2\sqrt{2}\,x + 4)(x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 4) = 0.$$

Rădăcinile ecuației sînt:

$$x_1 = -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2};\quad x_2 = -\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2};\quad x_3 = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2};\quad x_4 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}.$$

g) Ecuația se scrie:

$$x^4 + 3 = (x^2 + \sqrt{3})^2 - \sqrt{12}x^2 = (x^2 + \sqrt[4]{12}x + \sqrt{3})(x^2 - \sqrt[4]{12}x + \sqrt{3} = 0$$

de unde se obțin soluțiile:

$$x_1 = -\frac{\sqrt[4]{12}(1 + \mathrm{i})}{2};\quad x_2 = -\frac{\sqrt[4]{12}(1 - \mathrm{i})}{2};$$

$$x_3 = \frac{\sqrt[4]{12}(1 - \mathrm{i})}{2};\quad x_4 = \frac{\sqrt[4]{12}(1 + \mathrm{i})}{2}.$$

**I. 7.9.**$^{\mathrm{M}}$ Să se găsească suma tuturor rădăcinilor ecuațiilor:

a) $x^3 = -4$; b) $x^4 = 4$.

**R.** Ecuațiile se scriu:
a) $x^3 + 4 = 0$; b) $x^4 - 4 = 0$;

de unde, folosind relațiile lui VIÈTE, obținem că sumele rădăcinilor ecuațiilor date sînt egale cu zero.

A9
20 a) b)

**I. 7.10.**$^{\mathrm{M}}$ Să se determine perechile $(x, y)$ din plan pentru care:

a) $|\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{y - 4}\cdot\mathrm{i}| = \sqrt{10}$

b) $|\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}\cdot i| = \sqrt{3}$.

**R.** Fiind dat un număr complex $a + bi$, modulul său este:

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Atunci, avem:

a) $|\sqrt{x^2+4} + \sqrt{y-4}\, i| = \sqrt{x^2+4+y-4} = \sqrt{y+x^2}$.

Obținem deci relația:

$$\sqrt{y + x^2} = \sqrt{10},$$

sau $y = -x^2 + 10$, adică punctele se află pe parabola $y = -x^2 + 10$.

b) Analog, obținem că punctele se află pe dreapta $y = 1 - x$.

**I.7.11[M].** Dacă $a + bi$ este un număr complex dat, să se găsească numerele complexe $z = x + iy$, astfel încît $z^2 = a + ib$.

**R.** Pentru $b > 0$, avem:

$$x + iy = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right);$$

iar pentru $b < 0$, se obține:

$$x + iy = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right).$$

**I.7.12[PT].** Fiind dat numărul complex $\alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, să se determine numărul complex $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încît:

$$(x + iy)^2 = \alpha + i\beta.$$

**R.** Afirmația din enunț este echivalentă cu sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ 2xy = \beta. \end{cases} \tag{1}$$

Din aceste ecuații se obține:

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

deci, trebuie să avem:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

care împreună cu prima ecuație din (1) ne dă:

$$x^2 = \frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$$

$$y^2 = \frac{1}{2}(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}). \tag{2}$$

Să observăm că expresiile din (2) sînt pozitive sau zero, indiferent de semnul lui $\alpha$. În plus, $x$ şi $y$ trebuie aleşi astfel încît produsul lor să aibă semnul lui $\beta$.

Aceste considerente conduc la soluţia generală:

$$x + iy = \sqrt{\alpha + i\beta} = \pm\left(\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} + i\frac{\beta}{|\beta|}\sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}\right)$$

dacă $\beta \neq 0$. Pentru $\beta = 0$, valorile sînt:

$$\pm\sqrt{\alpha}, \text{ dacă } \alpha \geqslant 0, \quad \pm i\sqrt{\alpha} \text{ dacă } \alpha < 0.$$

**I.7.13**PT. Fie $a, b \in \mathbb{C}$. Să se arate că există identitatea:

$$|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$

**R.** Avem:

$$|a + b|^2 = (a + b)(\bar{a} + \bar{b}) = a\bar{a} + (a\bar{b} + b\bar{a}) + b\bar{b}$$

unde cu $\bar{a}$ am notat conjugatul numărului complex $a$.

Deci:

$$|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2\mathit{Re}\, a\bar{b},$$

unde cu $\mathit{Re}\, a$ se notează partea reală a numărului complex $a$.

Formula corespunzătoare pentru calculul pătratului modulului diferenţei este:

$$|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2\,\mathit{Re}\, a\bar{b},$$

de unde, adunînd, se obţine:

$$|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2),$$

adică tocmai relaţia din enunţ.

**I.7.14**PT. Să se scrie sub forma canonică expresiile:

a) $\dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R};$

b) $\dfrac{2}{\cos\alpha + i\sin\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R};$

c) $[1 - \cos\alpha - i(1 + \cos\alpha)]^n; \quad n \in \mathbb{N}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$

**R.** a) Avem:

$$\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} = \frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha.$$

b) Avem:

$$\frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha.$$

c) Avem:

$$\rho = \sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + (1+\cos\alpha)^2} = \sqrt{2}\sqrt{1+\cos^2\alpha},$$

deci:

$$1 - \cos\alpha - i(1+\cos\alpha) = \sqrt{2}\sqrt{1+\cos^2\alpha}\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos^2\alpha}} -\right.$$

$$\left. - i\frac{1+\cos\alpha}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos^2\alpha}}\right) = \sqrt{2}\sqrt{1+\cos^2\alpha}\left(\cos\arccos\frac{1-\cos\alpha}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos^2\alpha}} -\right.$$

$$\left. - i\sin\arccos\frac{1-\cos\alpha}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos^2\alpha}}\right)$$

de unde, în final:

$$[1-\cos\alpha - i(1+\cos\alpha)]^n = [\sqrt{2(1+\cos^2\alpha)}]^n\cdot$$

$$\cdot\left[\cos n\arccos\frac{1-\cos\alpha}{\sqrt{2(1+\cos^2\alpha)}} - i\sin n\arccos\frac{1-\cos\alpha}{\sqrt{2(1+\cos^2\alpha)}}\right]$$

**I.7.15**[PO]**.** Să se calculeze suma:

$$\mathscr{S}_1 = 1 + \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \ldots + \frac{\cos nx}{\cos^n x}$$

unde $n \in \mathbb{N}$ şi $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

**R.** Folosind formula lui Moivre, avem:

$$\left(\frac{\cos x + i\sin x}{\cos x}\right)^k = \frac{\cos kx + i\sin kx}{\cos^k x}$$

Dînd în relaţia anterioară lui $k$ valori de la 0 la $n$, şi adunînd relaţiile obţinute găsim:

$$1 + \frac{\cos x + i\sin x}{\cos x} + \left(\frac{\cos x + i\sin x}{\cos x}\right)^2 + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{\cos x + i\sin x}{\cos x}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{\cos kx}{\cos^k x} + i\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin kx}{\cos^k x}.$$

Dar primul membru se scrie:

$$= \frac{\left(\frac{\cos x + i\sin x}{\cos x}\right)^{n+1} - 1}{\frac{\cos x + i\sin x}{\cos x} - 1} = \frac{\cos(n+1)x + i\sin(n+1)x - \cos^{n+1}x}{\cos^n x\sin x} =$$

$$= \frac{i\,[\cos^{n+1} x - \cos(n+1)x] + \sin(n+1)x}{\cos^n x \sin x} =$$

$$= \frac{\sin(n+1)x}{\cos^n x \sin x} + i\,\frac{\cos^{n+1} x - \cos(n+1)x}{\cos x \sin x}.$$

De aici, putem scrie:

$$S_1 = \frac{\sin(n+1)x}{\cos^n x \sin x}.$$

**I. 7.16**PO**.** Să se stabilească relația:

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2},\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*.$$

**R.** Ecuația binomă:

$$x^{2n+1} - 1 = 0$$

are rădăcinile:

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{2n+1} + i\sin\frac{2k\pi}{2n+1},\quad k \in \overline{0, 2n}.$$

Dar, conform relațiilor lui VIÉTE:

$$\sum_{k=0}^{2n} x_k = 0$$

deci:

$$\sum_{k=0}^{2n} \cos\frac{2k\pi}{2n+1} = 0$$

încă:

$$\sum_{k=0}^{2n} \cos\frac{2k\pi}{2n+1} = 1 + \left(\cos\frac{2n\cdot 2\pi}{2n+1} + \cos\frac{1\cdot 2\pi}{2n+1}\right) +$$

$$+ \left(\cos\frac{(2n-1)2\pi}{2n+1} + \cos\frac{2\cdot 2\pi}{2n+1}\right) + \ldots + \left(\cos\frac{(n+1)2\pi}{2n+1} +\right.$$

$$\left. + \cos\frac{n\cdot 2\pi}{2n+1}\right) = 1 - 2\left[\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{1\cdot\pi}{2n+1}\right].$$

Cum însă:

$$\cos\frac{[2n-(2k-1)]\pi}{2n+1} = -\cos\frac{k\cdot 2\pi}{2n+1},\quad k \in \overline{1, n}.$$

rezultă relația cerută.

**I.7.17**[PI]**.** Pentru ce valori ale lui $x$ şi $y$, reali, are loc egalitatea:

$$(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i.$$

**R.** Desfăcînd parantezele, obţinem:

$$x + 2ix + 3y - 5iy = 1 - 3i$$

sau:

$$x + 3y + i(2x - 5y) = 1 - 3i$$

de unde, egalînd părţile reale şi, respectiv imaginare, obţinem:

$$x + 3y = 1$$
$$2x - 5y = -3$$

Înmulţim prima ecuaţie cu $-2$ şi ecuaţia obţinută o adunăm cu a doua, şi avem:

$$-11y = -5.$$

de unde:

$$y = 5/11, \quad x = -4/11.$$

Verificare. Avem:

$$-\frac{4}{11}(1 + 2i) + \frac{5}{11}(3 - 5i) = -\frac{4}{11} + \frac{15}{11} + i\left(-\frac{8}{11} - \frac{25}{11}\right) = 1 - 3i.$$

**I. 7.18**[PT]**.** Să se calculeze:

$$E = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2n}; \quad n \in \mathbb{N}.$$

**R.** Avem:

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1 + 2i + i^2}{1 - (-1)} = i; \quad \frac{1-i}{1+i} = \frac{1}{i} = -i,$$

deci:

$$E = i^{2n} + (-i)^{2n} = (i^2)^n + [(-i)^2]^n = (-1)^n + (-1)^n = 2 \cdot (-1)^n.$$

Aşadar:

$$E = \begin{cases} 2 \text{ dacă } n = 2k, \ k \in \mathbb{N} \\ -2 \text{ dacă } n \in \mathbb{N} - \{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \end{cases}.$$

Sub formă trigonometrică expresia $E$ se mai poate scrie:

$$E = 2(\cos \pi + i \sin \pi)^n = 2(\cos n\pi + i \sin n\pi)$$

Am folosit aici formula lui MOIVRE:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha, \ (\forall)\, n \in \mathbb{N}, \ (\forall)\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

**I.7.19**[PT]. Să se calculeze:

$$E=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n,\quad n\in\mathbb{N}.$$

**R.** Avînd în vedere că:

$$-\frac{1}{2}=\cos\frac{3\pi}{4},\quad \frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{3\pi}{4}$$

expresia $E$ devine:

$$E=\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)^n+\left(\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}\right)^n=$$

$$=\cos\frac{3n\pi}{4}+i\sin\frac{3n\pi}{4}+\cos\frac{3n\pi}{4}-i\sin\frac{3n\pi}{4}=$$

$$=2\cos\frac{3n\pi}{4}=\begin{cases}2(-1)^k & \text{dacă } n=4k\\ (-1)^{k+1} & \text{dacă } n=4k+1\\ 0 & \text{dacă } n=4k+2\\ (-1)^k & \text{dacă } n=4k+3\end{cases}$$

**I.7.20**[PT]. Ştiind că:

$$\sqrt[n]{a+ib}=x+iy$$

şi:

$$\sqrt[n+1]{a'+ib'}=y+ix$$

unde $a, b, a', b', x, y\in\mathbb{R}$ şi $n\in\mathbb{N}$, să se arate că:

$$x^2+y^2=\frac{a'^2+b'^2}{a^2+b^2}$$

**R.** Fie:

$$a+ib=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

unde $r=\sqrt{a^2+b^2}$ şi:

$$x+iy=\rho(\cos\omega+i\sin\omega)$$

unde $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. Ridicînd ambii membrii ai primei relaţii din enunţ la puterea $2n$, obţinem:

$$(a+bi)^2=(x+iy)^{2n}$$

sau:

$$x^2(\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha)=\rho^{2n}(\cos 2n\omega+i\sin 2n\omega)$$

deci trebuie ca:

$$r^2=\rho^{2n}$$

adică :

$$a^2 + b^2 = (x^2 + y^2)^n.$$

În mod analog, rezultă :

$$a'^2 + b'^2 = (x^2 + y^2)^{n+1}$$

de unde :

$$x^2 + y^2 = \frac{a'^2 + b'^2}{a^2 + b^2}.$$

**I. 7.21**[PT]. Să se arate că dacă între trei numere complexe $a$, $b$, $c$ nenule există relația :

$$(a + b + c)\ (ab + bc + ca) = abc$$

atunci suma a două din cele trei numere este nulă.

**R.** Efectuînd înmulțirile și reducînd termenii asemenea, obținem succesiv :

$$a^2b + ab^2 + abc + abc + b^2c + bc^2 + a^2c + abc + ac^2 = abc,$$

$$ab\,(a + b) + bc\,(a + b) + c^2(a + b) + ac\,(a + b) = 0\,,$$

$$(a + b)\,(ab + bc + ac + c^2) = 0,$$

$$(a + b)\ [b(a + c) + c(a + c)] = 0,$$

$$(a + b)\,(b + c)\,(c + a) = 0,$$

de unde, sau :

$$a + b = 0$$

sau :

$$b + c = 0$$

sau :

$$c + a = 0.$$

**I. 7.22**[T]. Să se stabilească modulul numărului complex :

$$z = \left[1 + \left(\frac{1 + i}{2}\right)^{2^0}\right] \left[1 + \left(\frac{i + 1}{2}\right)^{2^1}\right] + \ldots + \left[1 + \left(\frac{1 + i}{2}\right)^{2^n}\right]$$

**R.** Notînd $\frac{1 + i}{2} = \omega$, obținem succesiv :

$$z = (1 + \omega)\,(1 + \omega^2)\cdot(1 + \omega^{2^2}) \ldots (1 + \omega^{2^n}) =$$

$$= \frac{(1 - \omega)\,(1 + \omega)\,(1 + \omega^2)\,(1 + \omega^{2^2}) \ldots (1 + \omega^{2^n})}{2 - \omega} =$$

$$= \frac{(1 - \omega^2)\,(1 + \omega^2)\,(1 + \omega^{2^2}) \ldots (1 + \omega^{2^n})}{1 - \omega} = \frac{1 - \omega^{2^{n+1}}}{1 - \omega},$$

de unde:

$$z = \frac{1-\left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}}{1-\left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right)} = \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2^{n+1}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{2\left[1-2^{-2^n}\left(\cos 2^{n+1}\frac{\pi}{4}+i\sin 2^{n+1}\frac{\pi}{4}\right)\right]}{1-i} =$$

$$= (1+i)\left[1-\frac{\left(\cos 2^{n+1}\frac{\pi}{4}+i\sin 2^{n+1}\frac{\pi}{4}\right)}{2^{2^n}}\right]$$

De aici:

$$|z| = |1+i|\left|1-\frac{\cos 2^{n+1}\frac{\pi}{4}+i\sin 2^{n+1}\frac{\pi}{4}}{2^{2^n}}\right| =$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{\left(1-\frac{\cos 2^{n+1}\frac{\pi}{4}}{2^{2^n}}\right)^2+\left(\frac{\sin 2^{n+1}\frac{\pi}{4}}{2^{2^n}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{2-\frac{2\cos^2 2^{n+1}\frac{\pi}{4}}{2^{2^{n+1}}}} = 2\sqrt{1-\frac{\cos^2 2^{n+1}\frac{\pi}{4}}{2^{2^{n+1}}}}.$$

**I. 7.23**PT**.** Să se calculeze:

$$E = \sqrt[3]{1+i}.$$

**R.** Avem:

$$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)+\right.$$

$$\left.+\,i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right],\ k\in\{0,1,2\}.$$

**I.7.24**PT**.** Să se determine rădăcinile pătrate ale numeralelor complexe:

$$z_1 = 3+4i, \qquad z_2 = 5-12i$$

**R.** Fie $x+iy$ astfel încît:

$$(x+iy)^2 = 3+4i \qquad x, y\in\mathbb{R}.$$

Ridicînd la pătrat, obţinem sistemul :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Din a doua relaţie scoatem, pentru $y \neq 0$, $y = 2/x$, relaţie ce înlocuită în prima ecuaţie, ne dă :

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \quad \text{sau} \quad x^2 - 3x^2 - 4 = 0$$

Notînd $x^2 = z$, se obţine ecuaţia de gradul II :

$$z^2 - 3z - 4 = 0$$

cu soluţiile :

$$z_{1.2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}, \quad z_{1.2} = \frac{3 \pm 5}{2}, \; z_1 = 4, \; z_2 = -1.$$

Urmează că ecuaţia de la care am pornit are rădăcinile :

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -\mathrm{i}, \quad x_4 = \mathrm{i}.$$

Convin numai :

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -2.$$

De aici, urmează că soluţiile sistemului sînt :

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -1 \end{cases}$$

Deci rădăcinile pătrate ale numărului $3 + 4\mathrm{i}$ sînt $2 + \mathrm{i}$ şi $2 - \mathrm{i}$.

Folosind pentru $z_2$ acelaşi procedeu găsim ca rădăcini pătrate ale numărului $5 - 12\mathrm{i}$ numerele $3 - 2\mathrm{i}$ şi $-3 + 2\mathrm{i}$.

**I.7.25**PT**.** Ştiind că :

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \; z \in \mathbb{C}$$

să se calculeze :

$$z^n + \frac{1}{z^n}.$$

**R.** Din :

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$$

rezultă :

$$z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0.$$

deci :

$$z_{1.2} = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2} = \cos\alpha \pm \mathrm{i}\sin\alpha.$$

De aici:

$$z_{1,2}^n + \frac{1}{z_{1,2}^n} = (\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^n + \frac{1}{(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^n} =$$

$$= \cos n\alpha \pm i\sin n\alpha + \cos n\alpha \mp i\sin\alpha = 2\cos n\alpha.$$

**I.7.26**$^{PO}$**.** Să se arate că dacă:

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$$

atunci:

$$x + x^2 + \ldots + x^n + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x^n} = 2\,\frac{\cos\frac{(n+1)}{2}\alpha\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

**R.** Fie:

$$x = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Atunci:

$$\frac{1}{x} = \cos\varphi - i\sin\varphi,$$

şi se observă că:

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\varphi,$$

deci putem lua $\varphi = \alpha$ şi astfel:

$$x = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad \frac{1}{x} = \cos\alpha - i\sin\alpha.$$

Conform formulei lui Moivre:

$$x^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha;$$

$$\frac{1}{x^n} = \cos n\alpha - i\sin n\alpha$$

astfel că:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) = 2\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha = 2\,\frac{\cos\frac{(n+1)}{2}\alpha\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

etc.

**I.7.27**$^{PT}$**.** Să se calculeze:

$$\text{i). } \sqrt{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}; \quad \text{ii). } \sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}; \quad \text{iii). } \sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}.$$

**R.** Folosind scrierea trigonometrică a numerelor complexe avem :

i). $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}} = 2^{-\frac{1}{12}}\left(\cos\frac{24k+19}{72}\pi + i\sin\frac{24k+19}{72}\pi\right)$,

unde $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;

ii). $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}} = 2^{-\frac{1}{12}}\left(\cos\frac{24k+17}{72}\pi + i\sin\frac{24k+17}{72}\pi\right)$,

unde $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;

iii). $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}} = 2^{-\frac{1}{12}}\left(\cos\frac{24k+17}{72}\pi + i\sin\frac{24k+17}{72}\pi\right)$,

unde $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

**I. 7.28**$^{\text{PO}}$. Să se calculeze sumele :

a). $1 + a\cos\varphi + a^2\cos 2\varphi + \ldots + a^k\cos k\varphi$;

b). $\sin\varphi + a\sin(\varphi + h) + a^2\sin(\varphi + 2h) + \ldots + a^k\sin(\varphi + kh)$;

c). $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$.

**R.** Fie :

$$\Sigma = 1 + a\cos\varphi + a^2\cos 2\varphi + \ldots + a^k\cos k\varphi,$$

şi, notînd cu :

$$\sigma = a\sin\varphi + a^2\sin 2\varphi + \ldots + a^k\sin k\varphi;$$

formăm $\Sigma + i\sigma$, adică :

$$\Sigma + i\sigma = 1 + a(\cos\varphi + i\sin\varphi) + a^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \ldots + a^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi).$$

Punînd apoi :

$$\alpha = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

avem :

$$\Sigma + i\sigma = 1 + a\alpha + (a\alpha)^2 + \ldots + (a\alpha)^k = \frac{a^{k+1}\alpha^{k+1} - 1}{a\alpha - 1},$$

de unde, izolînd părţile reale şi cele imaginare, obţinem :

$$\Sigma = \frac{a^{k+2}\cos k\varphi - a^{k+1}\cos(k+1)\varphi - a\cos\varphi + 1}{a^2 - 2a\cos\alpha + 1}.$$

b). Procedînd analog, obţinem că suma dată este egală cu expresia :

$$\frac{a^{k+2}\sin(\varphi + kh) - a^{k+1}\sin[\varphi + (k+1)h] - a\sin(\varphi - h) + \sin\varphi}{a^2 - 2a\cos h + 1}.$$

c). La fel suma cerută este egală cu expresia :

$$\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

**I. 7.29**$^{PT}$. Arătaţi că, dacă $|a_r| \leqslant 2$, $(\forall)$ $r \in \{1, 2, \dots n\}$, $a_r \in \mathbb{C}$, atunci orice rădăcină a ecuaţiei:

$$1 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0$$

are modulul mai mare ca $\frac{1}{3}$.

**R.** Să presupunem că:

$$|z| \leqslant \frac{1}{3}.$$

Atunci, evident:

$$|a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n| \leqslant 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}\right) < 1.$$

de unde enunţul rezultă imediat.

**I. 7.30**$^{PT}$. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}$, cu $a \neq 0$ şi $a\bar{a} \neq c\bar{c}$. Arătaţi că o rădăcină a ecuaţiei:

$$az^2 + bz + c = 0$$

are modulul egal cu unitatea, dacă şi numai dacă:

$$|\bar{a}b - \bar{b}c| = |a\bar{a} - c\bar{c}|.$$

**R.** Dacă există o rădăcină $z$ cu modulul egal cu unitatea, adică:

$$|z| = 1$$

atunci:

$$\bar{z} = \frac{1}{z}$$

şi încă:

$$c\bar{z}^2 + b\bar{z} + a = 0. \tag{1}$$

Conjugata expresiei (1) dă:

$$\bar{c}z^2 + \bar{b}z + \bar{a} = 0. \tag{2}$$

Din (2) şi ecuaţia iniţială se deduce:

$$z(ab - b\bar{c}) + a\bar{a} - c\bar{c} = 0.$$

Invers, punînd:

$$\omega = \frac{\bar{b}c - \bar{a}b}{a\bar{a} - c\bar{c}}.$$

astfel încît $|\omega| = 1$, avem:

$$a\omega + b = -c\bar{\omega}.$$

Dar:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\omega},$$

deci demonstraţia este incheiată.

**I. 7.31PO.** Să se arate că:

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n|^2 \leqslant (|a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + |a_n|^2)\cdot$$
$$\cdot(|b_1|^2 + \ldots + |b_n|^2),$$

unde $a_i, b_i \in \mathbb{C}$, $(\forall)\ i \in \{1, 2, \ldots n\}$.

**R.** Fie $\lambda$ un număr complex arbitrar. Atunci:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - \lambda\bar{b}_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 + |\lambda|^2 \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 - 2Re\,\bar{\lambda} \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i. \tag{1}$$

Această expresie este pozitivă sau zero pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}$. Astfel, putem alege:

$$\lambda_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} |b_i|^2}.$$

Această alegere nu este întîmplătoare, ci este cerută de condiţia ca expresia (1) să fie cît mai mică posibil.

Înlocuind $\lambda_0$ în (1) avem, după simplificări:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 - \frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\, b_i\right|}{\sum |b_i|^2} \geqslant 0,$$

care este echivalentă cu relaţia din enunţ.

**I.7.32PO.** Se consideră funcţia $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dată de:

$$f(x) = \frac{az + b}{cz + d},$$

cu $ad - bc \neq 0$. Să se arate că $f$ este inversabilă şi să se calculeze inversa sa.

**R.** Notînd $\omega = f(x)$, avem:

$$z = f^{-1}(\omega) = \frac{d\omega - b}{-c\omega + a}.$$

**I.7.33PO.** Fiind date numerele complexe $z_1, z_2, z_3, z_4$, să se arate că raportul:

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

este real, dacă şi numai dacă afixele celor 4 numere complexe sînt pe un cerc, ori pe o linie dreaptă.

R. Folosind considerente de geometrie elementară, afirmația este evidentă, deoarece avem:

$$\arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right) = \arg\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} - \arg\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

şi dacă numerele se află pe un cerc, această diferență de unghiuri este sau 0 sau $\pm\pi$.

**I.7.34^PO.** Se dă un cerc $\mathscr{C}$ în planul complex,de centru $a$ şi rază de lungime $R$. Fie $z$ un punct dat situat în interiorul cercului $\mathscr{C}$. Să se găsească punctul $z^*$, simetricul punctului $z$ în raport cu cercul $\mathscr{C}$.

Punctele $z$ şi $z^*$ se zic simetrice în raport cu un cerc $C$ ce trece prin punctele $z_1, z_2, z_3$, dacă şi numai dacă:

$$\frac{z^* - z_2}{z^* - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \overline{\frac{z - z_2}{z - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}}.$$

R. Folosind schematic invarianța acestui raport, avem notînd cu $(z, z_1, z_2, z_3) \doteq \dfrac{z - z_2}{z - z_3} : \dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$, relațiile:

$$\overline{(z, z_1, z_2, z_3)} = \overline{(z - a, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a)} =$$

$$= \left(\frac{z^2}{\bar{z} - \bar{a}} z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a\right) = \left(\frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a, z_1, z_2, z_3\right):$$

Această ecuație arată că simetricul punctului $z$ este $z^*$ dat de:

$$z^* = R^2/(\bar{z} - \bar{a}) + a,$$

sau, altfel spus $z$ şi $z^*$ satisfac relația:

$$(z^* - a)(\bar{z} - \bar{a}) = R^2.$$

Produsul $|z^* - a| \cdot |z - a|$ al distanțelor pînă la centrul $a$ este deci $R^2$. În plus, să observăm că raportul:

$$\frac{z^* - a}{z - a}$$

este pozitiv, ceea ce înseamnă că $z$ şi $z^*$ se află de aceeaşi parte a semidreptei din $a$ prin $z$ şi $z^*$.

Construcția geometrică a simetricului este imediată.

**I.7.35^PO.** Să se arate că oricare ar fi $z_1, z_2, \ldots z_n$, $z_i \in \mathbb{C}$ $(\forall)$ $i \in \overline{1, n}$, există o mulțime finită $\mathscr{J} \subseteq \{1, 2, \ldots n\}$ cu proprietatea că:

$$\left|\sum_{j \in \mathscr{J}} z_j\right| \geqslant \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

**R.** Cele 2 bisectoare ale planului complex determină o acoperire a lui $\mathbb{C}$ formată din patru mulţimi $A_1, \ldots, A_4$, definite astfel:

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x + iy,\ x \geqslant |y|\};$$

$$A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x + iy,\ y \geqslant |x|\};$$

$$A_3 = \{x \in \mathbb{C} \mid z = x + iy,\ x \leqslant -|y|\}$$

$$A_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x + iy,\ y \leqslant -|x|\}.$$

Cel puţin una din mulţimile $A_k$, $k = \overline{1, 4}$, fie ea $A_1$, are proprietatea:

$$\sum_{\substack{j \in \overline{1, n} \\ z_j \in A_1}} |z_j| \geqslant \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} |z_j|. \tag{1}$$

Fie $\mathcal{J} = \{j \in \overline{1, n} \mid z_j \in A_1\}$. Dacă $z \in A_1$ avem:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\ Re z. \tag{2}$$

Atunci, notînd $z_j = x_j + iy_j$ $(j = \overline{1, n})$, obţinem:

$$\left|\sum_{j \in \mathcal{J}} z_j\right| = \left(\left(\sum_{j \in \mathcal{J}} x_j\right)^2 + \left(\sum_{j \in \mathcal{J}} y_j\right)^2\right)^{1/2} \geqslant \left|\sum_{j \in \mathcal{J}} x_j\right| = \sum_{j \in \mathcal{J}} x_j \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j \in \mathcal{J}} \frac{1}{\sqrt{2}} |z_j| \geqslant \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

Înlocuind $A_1$ cu $A_2$, $A_3$ sau $A_4$, raţionamentul este analog.

**I.7.36**[PT]**.** Determinaţi condiţiile în care, produsul a 2 numere complexe este pur imaginar.

**R.** Condiţiile sînt ca numerele să fie nenule şi de forma:

$$(a + bi) \text{ şi } \lambda(b + ai), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**I. 7.37**[PT]**.** Să se calculeze:

$$(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n.$$

**R.** Avem:

$$1 + \cos\alpha + i\sin\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

de unde:

$$(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n = 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2}\right).$$

## §.8. Funcţia exponenţială şi logaritmică

**I.8.1[M].** Să se afle care număr din perechile de numere:

a) $3^{4/5}$ şi $3^{5/6}$; b) $\sqrt[11]{6^3}$ şi $\sqrt[15]{6^7}$; c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{7/2}$ şi $\left(\frac{2}{5}\right)^4$; d) $(0,5)^{-13}$ şi $2^{13}$;

e) $(\sqrt{3})^{-6}$ şi $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6$; f) $2^{-\sqrt{5}}$ şi $2^{-\sqrt{3}}$; g) $5^{\sqrt{3}}$ şi $5^{\sqrt{2,5}}$; h) $\sqrt[6]{\left(\frac{7}{8}\right)^{38}}$

şi $\sqrt[5]{\left(\frac{7}{8}\right)^{23}}$ este mai mare.

**R.** Se ştie (v. Manual, X, algebră, p. 8), că funcţia $f:\mathbb{R}\to(0,\infty), f(x)=a^x, (\forall)x\in\mathbb{R}$ este strict crescătoare dacă $a>0$ şi strict descrescătoare dacă $0<a<1$. a). Funcţia $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=3^x$ este deci crescătoare, deoarece baza este supraunitară deci, cum $\frac{4}{5}=\frac{24}{30}<\frac{5}{6}=\frac{25}{30}$, rezultă $f\left(\frac{4}{5}\right)<f\left(\frac{5}{6}\right)$ deci $3^{4/5}<3^{5/6}$ deci $3^{5/6}$ este mai mare. b). Avem $\sqrt[11]{6^3}=6^{3/11}$; $\sqrt[15]{6^7}=6^{7/15}$. Baza este supraunitară şi $\frac{3}{11}<\frac{7}{15}$. Deci $\sqrt[15]{6^7}$ este mai mare. c). Baza este supraunitară şi $\frac{7}{2}<4$ deci funcţia este strict descrescătoare, adică $\left(\frac{2}{5}\right)^{7/2}$ este mai mare. d). Avem $(0,5)^{-13}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-13}=(2^{-1})^{-13}=2^{13}$ deci numerele sînt egale e). $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6=[(\sqrt{3})^{-1}]^6=(\sqrt{3})^{-6}$ deci numerele sînt egale. f). Baza este supraunitară şi $-\sqrt{5}<-\sqrt{3}$ deci $2^{-\sqrt{3}}$ este mai mare. g). Baza este supraunitară şi $\sqrt{2,5}<\sqrt{3}$ deci $5^{\sqrt{3}}$ este mai mare. h). Avem $\sqrt[6]{\left(\frac{7}{8}\right)^{38}}=\left(\frac{7}{8}\right)^{38/6}$ şi $\sqrt[5]{\left(\frac{7}{8}\right)^{33}}=\left(\frac{7}{8}\right)^{33/5}$. Baza este subunitară şi $\frac{38}{6}<\frac{33}{5}$ deci $\sqrt[6]{\left(\frac{7}{8}\right)^{38}}$ este mai mare.

**I.8.2[M].** Să se afle mulţimea valorilor lui $x$ pentru care este adevărată inegalitatea:

a) $3^x\geqslant 729$; b) $2^x\leqslant 0,25$; c) $2^x>\frac{1}{128}$; d) $3^x<3$;

e) $(\sqrt{2})^x\cdot 2>\frac{1}{8}$; f) $(0,01)^2(\sqrt{10})^x<1$; g) $\left(\frac{1}{18}\right)^x\sqrt{3}>1$;

h) $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{0,5}}\right)^x<\frac{1}{4}$; i) $32(\sqrt[3]{2})^x>0,25$.

**R.** Vom ţine cont că funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, dată de $f(x) = a^x$, $a > 0$ şi $a \neq 1$ este strict crescătoare pentru $a > 1$ şi strict descrescătoare pentru $a \in (0, 1)$. Avem :

a) $3^x \geqslant 729$ sau $3^x \geqslant 3^6$, de unde $x \geqslant 6$, deoarece aici $a = 3$ şi din $a^{x_1} \geqslant a^{x_2}$, rezultă, datorită monotoniei funcţiei $x_1 \geqslant x_2$.

*b*) Inegalitatea este echivalentă cu $2^x \leqslant 2^{-2}$, de unde $x \leqslant -2$;

c) Putem scrie $128 = 2^7$, de unde inegalitatea devine $2^x > 2^{-7}$, sau $x > -7$; d) Avem $3^x < 3^1$ şi din monotonia funcţiei $3^x$, avem $x < 1$;

e) Inegalitatea are forma echivalentă $2^{\frac{x}{2}+1} > 2^{-3}$, sau $\frac{x}{2} + 1 \geqslant -3$, echivalentă cu $x > -8$; f) Inegalitatea se mai scrie $10^{-4+\frac{x}{2}} < 10^0$ sau $x < 8$.

g) Inegalitatea are forma echivalentă $2^{-4x+\frac{1}{x}} > 3^0$, de unde $-4x + \frac{1}{2} > 0$, sau $x < \frac{1}{8}$;

h) Inegalitatea are forma echivalentă $2^{\frac{x}{5}} < 2^{-2}$, sau $\frac{x}{5} < -2$, de unde $x < -10$;

i) Inegalitatea se mai scrie $2^{5+\frac{x}{3}} > 2^{-2}$, de unde avem $5 + \frac{x}{3} > -2$ sau $x > -21$.

**I.8.3$^M$.** Să se compare $m$ şi $n$ dacă este adevărată inegalitatea :

a) $(3\pi)^m > (3\pi)^n$; c) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^m \geqslant (\sqrt{3} - \sqrt{2})^n$;

b) $\left(\frac{5\pi}{16}\right)^m < \left(\frac{5\pi}{16}\right)^n$; d) $(\sqrt{7} - \sqrt{3})^m \leqslant (\sqrt{7} - \sqrt{3})^n$

**R.** Dacă avem funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dată de $f(x) = a^x$, cu $a > 0$ şi $a \neq 1$, atunci din considerente de monotonie din i) $a^{x_1} \geqslant a^{x_2}$, cu $a > 1$, rezultă $x_1 \geqslant x_2$; ii) $a^{x_1} \geqslant a^{x_2}$, cu $a \in (0, 1)$, atunci $x_1 \leqslant x_2$; deci :

a) $3\pi > 1$ şi deci $m > n$; b) $\frac{5\pi}{16} < 1$, deci $m > n$;

c) $\sqrt{3} - \sqrt{2} < 1$, şi deci $m \leqslant n$; d) $\sqrt{7} - \sqrt{3} < 1$, de unde $m \geqslant n$.

**I. 8.4$^M$.** Să se afle $x$ astfel încît $a^x > \left(\frac{1}{a}\right)^x$, unde $a > 0$ este un număr real pozitiv.

**R.** Dacă $a > 1$, inegalitatea se mai scrie $a^x > \frac{1}{a^x}$, şi deoarece $a > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, avem $a^{2x} > 1$ sau $a^{2x} > a^0$, de unde $2x > 0$, deci $x > 0$. Dacă $0 < a < 1$, avem $a^x > a^{-x}$ de unde, ţinînd cont că funcţia exponenţială $f$, cu $f(x) = a^x$ este descrescătoare pentru $a \in (0, 1)$, avem $x < -x$, echivalent cu $x < 0$.

**I. 8.5**$^M$. Să se spună dacă sînt echivalente inegalitățile următoare:

a) $a^x > a^4$ și $x > 4$;  c) $\left(\frac{1}{9}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ și $2x < x - 1$;

b) $6^{x^2} < 6^x$ și $x^2 < x$;  d) $8^{x^2} < 4$ și $3x^2 \geqslant 2$.

**R.** a) Ținînd cont de monotonia funcției exponențiale, pentru $a > 1$, $a^x > a^4$ implică $x > 4$, deci inegalitatea este adevărată; dar pentru $0 < < a < 1$, din $a^x > a^4$ rezultă $x < 4$ și deci în acest caz echivalența nu mai are loc; b) Cum funcția $f$, dată de $f(x) = 6^x$ este strict crescătoare, din $6^{x^2} < 6^x$, rezultă $x^2 < x$, deci echivalența are loc. c) Inegalitatea se mai scrie $3^{-2x} > 3^{-x+1}$, de unde $-2x > -x+1$, sau $2x < x - 1$, deci adevărat. d) Inegalitatea se scrie echivalent $2^{3x^2} < 2^2$ sau $3^{x^2} < 2$, contrar cu $3^{x^2} > 2$.

**I. 8.6**$^M$. Să se determine valorile lui $x$ pentru ca următorii logaritimi să aibă sens:

a) $\log_2(1 - x)$;  d) $\log_4(x^2 + x - 2)$;  g) $\log_4(\log_2 x)$;

b) $\log_2(1 - x^2)$;  e) $\log_3(-x^2 + 5x - 6)$;  h) $\log_{1/2}(\log_3 x)$;

c) $\log_{1/2}(1 + x^2)$;  f) $\log_5(x^2 - x + 1)$;  i) $\log_{1/2}(\log_{1/2} x)$.

**R.** Funcția $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \log_a x$, cu $a > 0$ și $a \neq 1$, este definită pentru $x > 0$; de aici printr-o extensie naturală, funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $g(x) = \log_a E(x)$ (unde $E(x)$ este o expresie oarecare ce depinde de $x$), are sens pentru $E(x) > 0$. Astfel, avem:

a) $\log_2(1 - x)$ are sens dacă $1 - x > 0$ sau $x < 1$;

b) $\log_2(1 - x^2)$ are sens cînd $1 - x^2 > 0$ sau $x \in (-1, 1)$;

c) $\log_{1/2}(1 + x^2)$ are sens pentru orice $x$ real, deoarece $1 + x^2 > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$;

d) $\log_4(x^2 + x - 2)$ are sens cînd $x^2 + x - 2 > 0$ sau, echivalent $x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$;

e) logaritmul are sens cînd $-x^2 + 5x - 6 > 0$, deci cînd $x \in (2, 3)$;

f) deoarece $x^2 - x + 1 > 0\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}$, logaritmul are sens, pentru orice $x$ real;

g) $\log_4(\log_2 x)$ are sens cînd $\log_2 x > 0$, sau ținînd cont de monotonia funcției logaritm și de relația echivalentă $\log_2 x > \log 1$, avem $x > 1$;

h) logaritmul dat are sens dacă $\log_3 x > 0$, sau, ca mai înainte, $\log_3 x > \log_3 1$ (deoarece $\log_a 1 = 0$), deci $x > 1$;

i) logaritmul are sens dacă $\log_{1/2} x > 0$ sau $\log_{1/2} x > \log_{1/2} 1$ deci deoarece $\log_a x$ este descrescător cînd $0 < a < 1$, $x < 1$.

**I. 8.7**$^M$. Care din următoarele numere este mai mare?

a) $\log_2 4$ sau $\log_2 5$;  c) $\log_5 \frac{1}{2}$ sau $\log_5 \frac{1}{7}$;

b) 2 sau $\log_3 10$;  d) 3 sau $\log_2 7$.

**R.** Deoarece funcţia logaritm $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ este strict crescătoare dacă $a > 1$, şi strict descrescătoare cînd $0 < a < 1$, avem:

a) $a = 2 > 1$ şi $4 < 5$, deci $\log_2 4 < \log_2 5$;

b) Putem scrie $2 = \log_3 9$, deci, cum $9 < 10$, avem $\log_3 9 = 2 < \log_3 10$;

c) cum $\frac{1}{2} > \frac{1}{7}$, avem $\log_5 \frac{1}{2} > \log_5 \frac{1}{7}$;

d) Deoarece putem scrie $3 = \log_2 8$ şi $8 > 7$, deducem $\log_2 8 = 3 > \log_2 7$.

**I. 8.8**[M]. i). Pentru ce valori ale lui $x$ au loc inegalităţile:

a) $\log_3 x > \log_3 4$;

b) $\log_{1/2} (2x) \geqslant \log_{1/2} 5$;

c) $\log_2 x^2 \geqslant \log_2 8$;

d) $\log_6(x^2 - 1) \leqslant \log_6 (4x + 4)$

ii). Să se calculeze:

a) $\log_2 5 + \log_2 \frac{4}{5}$;

b) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$;

c) $\log_5 1000 - \log_5 40$;

d) $\log_6 7 - \log_6 \frac{7}{36}$;

e) $\log_{0.1} 50 - \log_{0.1} 0{,}5$;

f) $\log_4 6 + \log_4 8 - \log_4 3$;

g) $\log_{0.1} 5 + \log_{0.1} 4 - \log_{0.1} 2$;

h) $\log_{1/2} 3 - \log_{1/2} 12 + \log_{1/2} 2$.

**R.** i). Vom rezolva ţinînd cont de monotonia funcţiei logaritm. Deci:

a) $\log_3 x > \log_3 4$ este echivalent $x > 4$;

b) Deoarece pentru $a = \frac{1}{2}$, $\log_a x$ este descrescătoare pentru $x \in \mathbb{R}_+$, inegalitatea este echivalentă cu $2x \leqslant 5$ sau $0 < x \leqslant \frac{5}{2}$;

c) Inegalitatea este echivalentă $x^2 \geqslant 8$, deci $x^2 - 8 \geqslant 0$, sau $x \in (-\infty, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, \infty)$;

d) Inegalitatea revine la $x^2 - 1 \leqslant 4x + 4$ şi $x^2 - 1 > 0$ şi $4x + 4 > 0$, de unde rezolvînd şi intersectînd mulţimea soluţiilor găsite obţinem $x \in (1, 5]$.

ii). Ţinînd cont că $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$, relaţia dată este egală cu $\log_2 5 \cdot \frac{4}{5} = \log_2 4 = 2$, deoarece $\log_a x^m = m \log_a x$;

b) Avem, evident $\log_{12} 2 + \log_{12} 72 = \log_{12} 144 = 2$;

c) Din relaţia $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$ relaţia dată este egală cu $\log_5 \frac{1000}{40} = \log_5 25 = \log 5^2 = 2$;

d) Avem $\log_6 7 - \log_6 \frac{7}{36} = \log_4 36 = \log_4 6^2 = 2$;

e) $\log_{0.1} 50 - \log_{0.1} 0{,}5 = \log_{0.1} \dfrac{50}{0{,}5} = \log_{10^{-1}} 10^2$, şi cum $\log_{a^m} x = \dfrac{1}{m} \log_a x$, $\log_{10^{-1}} 10^2 = -2$;

f) $\log_4 6 + \log_4 8 - \log_4 3 = \log_4 48 - \log_4 3 = \log_4 \dfrac{48}{3} = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$;

g) $\log_{0.1} 5 + \log_{0.1} 4 - \log_{0.1} 2 = \log_{0.1} 20 - \log_{0.1} 2 = \log_{0.1} 10 = -\log_{10} 10 = -1$;

h) $\log_{1/2} 3 - \log_{1/2} 12 + \log_{1/2} 2 = \log_{1/2} 6 - \log_{1/2} 12 = \log_{1/2} \dfrac{1}{2} = 1$.

**I.8.9^M.** Să se arate că expresiile:

$$\text{a) } E = \frac{\log_7 x^2}{\log_8 x^2}; \qquad \text{b) } E = \frac{\log_2 x + \log_2 \sqrt{x}}{\log_3 x + \log_3 \sqrt{x}}; \qquad \text{c) } E = \frac{\log_x \sqrt{7}}{\log_x 7};$$

nu depind de $x$.

**R.** a) Putem scrie $\log_7 x^2 = \dfrac{1}{\log_{x^2} 7}$; $\log_8 x^2 = \dfrac{1}{\log_{x^2} 8}$; de unde din faptul că $\dfrac{\log_a x}{\log_a y} = \log_y x$, $E$ devine: $E = \dfrac{\log_{x^2} 8}{\log_{x^2} 7} = \log_7 8$;

$$\text{b) } E = \frac{\log_2 x^{1+\frac{1}{2}}}{\log_3 x^{1+\frac{1}{2}}} = \frac{\log_{x^{3/2}} 3}{\log_{x^{3/2}} 2} = \log_2 3; \qquad \text{c) } E = \frac{\frac{1}{2}\log_x 7}{\log_x 7} = \frac{1}{2}.$$

**I. 8.10^M.** Să se logaritmeze expresiile:

$$E = \frac{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a}}}}}{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{a}}}}}; \qquad \text{b) } E = \frac{\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}}{\sqrt{a\sqrt[3]{\sqrt[4]{a\sqrt{a}}}}}.$$

**R.** a) Avem:

$$\log_t E = \left(\log_t a + \frac{1}{2}\log_t b + \frac{1}{4}\log_t a + \frac{1}{8}\log_t b + \frac{1}{16}\log_t a\right) -$$

$$-\left(\log_t b + \frac{1}{2}\log_t a + \frac{1}{4}\log_t b + \frac{1}{8}\log_t a + \frac{1}{16}\log_t b\right) =$$

$$= \log_t \frac{a}{b} + \frac{1}{2}\log_t \frac{b}{a} + \frac{1}{4}\log_t \frac{a}{b} + \frac{1}{8}\log_t \frac{b}{a} + \frac{1}{16}\log_t \frac{a}{b} = \frac{11}{16}\log_t \frac{a}{b};$$

b) $\log_t E = \frac{1}{2}\log_t a + \frac{1}{6}\log_t a + \frac{1}{12}\log_t a - \left(\frac{1}{2}\log_t a + \frac{1}{6}\log_t a + \right.$

$\left. + \frac{1}{24}\log_t a\right) = \frac{1}{24}(2\log_t a - \log_t a) = \frac{1}{24}\log_t a.$

**I. 8.11[M].** Să se determine expresia lui $x$ astfel încît să avem:

a) $\log_2 x = 2\log_2 a + 3\log_2(a+b) - 4\log_2(a-b)$;

b) $\log_4 x = -\frac{1}{2}\log_4(a+b) + \frac{1}{4}\left[\log_4(a-b) - \frac{2}{3}\log_4(a+b) + \right.$

$\left. + \frac{2}{3}\log_4(2b) - \frac{1}{2}\log_4(2a)\right]$.

**R.** a) Avem: $\log_2 x = \log_2\{[a^2\cdot(a+b)^3]/(a-b)^4\}$, de unde $x =$
$= \frac{a^2(a+b)^3}{(a-b)^4}$;

b) Avem:

$\log_4 x = \log_4\{(a+b)^{-1/2}\cdot(a-b)^{1/4}\cdot(a+b)^{-1/6}\cdot(2b)^{1/6}\cdot(2a)^{-1/8}\}$,

de unde:

$$x = \frac{\sqrt[4]{a-b}\,\sqrt[6]{2b}}{\sqrt[3]{(a+b)^2}\,\sqrt[8]{2a}}.$$

**I. 8.12[M].** Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$;

b) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$;

c) $a^{(x-2)(x-3)} = 1$; $a > 1$, $a \neq 0$;

d) $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13$;

e) $7^{x+2} + 4\cdot 7^{x-1} = 347$;

f) $3^{x+1} + 5\cdot 3^{x-1} - 7\cdot 3^x + 21 = 0$.

**R.** a) Avem succesiv $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, de unde $x = 0$;

b) Avem $2^{x^2-6x-2,5} = 2^{4,5}$, de unde $x^2 - 6x - 7 = 0$, cu soluțiile $x_1 = 7$; $x_2 = -1$;

c) Evident $(x-2)(x-3) = 0$, de unde $x_1 = 2$, $x_2 = 3$;

d) Punînd $3^{x-3} = t$, ecuația devine $13t = 13$, deci $t = 1$, de unde $x - 3 = 0$, deci $x = 3$;

e) Punem $7^{x-1} = t$ și ecuația devine $7^3\cdot t + 4t = 347$, sau $t = 1$, de unde $x - 1 = 0$, deci $x = 1$;

f) Punem $3^{x-1} = t$ și ecuația devine $7t = 21$, sau $t = 3$, deci $x - 1 = 3$, de unde $x = 4$.

**I. 8.13ᴹ.** (i) Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt{8^{x+1}}=\sqrt[3]{4^{2-x}}$;

b) $9^x-3^x-6=0$;

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}+\left(\frac{3}{5}\right)^{1-x}=1,2$;

d) $2\cdot 25^x=10^x+4^x$;

e) $3\cdot 2^x=2\cdot 3^x$;

f) $11^x=17^x$;

g) $6^{2x+4}=2^{8+x}\cdot 3^{3x}$;

h) $3\cdot 4^x+2\cdot 9^x=5\cdot 6^x$.

(ii) Să se rezolve ecuațiile:

a) $\log_2(x-1)=\log_2(x^2-x-16)$;

b) $\log_{x-1}(x^2-5x+7)=1$;

c) $\log_x 2-\log_x 3=2$;

d) $3\log^2(x^2)-\lg x-1=0$;

e) $5^{\log x}-3^{\log x-1}=3^{\log x+1}-5^{\log x-1}$.

**R** (i). a) Ecuația se mai scrie $2^{\frac{3(x+1)}{2}}=2^{\frac{2(2-x)}{3}}$; de unde $9(x+1)=4(2-x)$ sau $13x=-1$, deci $x=-\frac{1}{13}$;

b) Punem $3^x=t$ și ecuația devine $t^2-t-6=0$; cu soluțiile $t_1=-2$ și $t_2=3$; convine doar $t=3$, (deoarece $3^x>0 (\forall)\ x\in\mathbb{R}$), și deci $x=1$;

c) Ecuația se mai scrie $\left(\frac{3}{5}\right)^x\cdot\frac{3}{5}+\frac{\frac{3}{5}}{\left(\frac{3}{5}\right)^x}=\frac{6}{5}$, de unde, punînd $\left(\frac{3}{5}\right)^x=t$, obținem $(t-1)^2=0$, cu soluția $t=1$, de unde, înlocuind, rezultă $x=0$;

d) Ecuația se scrie $2\cdot 5^{2x}=2^x\cdot 5^x+2^{2x}$, și împărțind cu $5^{2x}$, obținem $2=\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}$, sau, punînd $\left(\frac{2}{5}\right)^x=t$, obținem ecuația $t^2+t-2=0$, cu soluția convenabilă $t=1$, de unde imediat rezultă $x=0$;

e) Ecuația se mai scrie $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2}{3}$, de unde $x=1$;

f) Dat fiind că 11 și 17 sînt numere prime între ele, egalitatea este posibilă doar dacă $x=0$;

g) Ecuația se mai scrie $\frac{2^x}{3^x}=\left(\frac{2}{3}\right)^4$, deci $x=4$;

h) Împărțind cu $6^x$, se obține ecuația

$$3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x=5,$$

şi punînd $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, se obţine $3t^2 - 5t + 2 = 0$, cu soluţiile $t_1 = \frac{2}{3}$ şi $t_2 = 1$, deci $x_1 = 1$, $x_2 = 0$.

f) $$\sqrt{\log_2\sqrt[4]{2x}+\log_x\sqrt[4]{2x}} + \sqrt{\log_2\sqrt[4]{\frac{x}{2}}+\log_x\sqrt[4]{\frac{2}{x}}} = 2.$$

ii). Avem:

a) cu condiţiile $x - 1 > 0$ şi $x^2 - x - 16 > 0$, adică $x \in (4, \infty)$, ecuaţia devine $x - 1 = x^2 - x - 16$, sau $x^2 - 2x - 15 = 0$, cu soluţia convenabilă în intervalul admisibil $x = 5$;

b) Cu condiţiile $x - 1 > 0$; $x - 1 \neq 1$ şi $x^2 - 5x + 7 > 0$, adică $x \in (1, 2) \cup (2, \infty)$, ecuaţia devine $x^2 - 5x + 7 = x - 1$ sau $x^2 - 6x + 8 = 0$, cu soluţia admisibilă $x = 4$;

c) Cu condiţia $x > 0$ şi $x \neq 1$, ecuaţia devine:

$$\log_x \frac{2}{3} = 2, \text{ sau } x^2 = 2/3, \text{ cu soluţia convenabilă } x = \sqrt{\frac{2}{3}};$$

d) Punînd condiţia $x > 0$, să observăm că

$$\log_t^2(x^2) = [\log_t(x^2)]^2 = [2\log_t x]^2 = 4\log_t^2 x,$$

de unde, ecuaţia devine, punînd $\lg x = t$, $12t^2 - t - 1 = 0$, cu soluţiile $t_1 = -\frac{1}{4}$ şi $t_2 = \frac{1}{3}$, deci $x_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{10}}$; $x_2 = \sqrt[3]{10}$;

e) Punînd $\lg x = t$, avem: $\left(\frac{5}{3}\right)^{t-1} = \frac{5}{3}$, deci $t - 1 = 1$, sau $t = 2$, deci $x = 100$;

f) Ecuaţia se mai scrie, punînd condiţia $x > 0$ şi $x \neq 1$; şi condiţia ca $\log_2 x > 0$, avem:

$$\frac{\log_2 x + 1}{2\sqrt{\log_2 x}} + \frac{\log_2 x - 1}{2\sqrt{\log_2 x}} = 2$$

de unde $\log_2 x = 4$, deci $x = 2^4 = 16$.

**I. 8.14**[M]. Să se rezolve şi să se discute după valorile parametrului $a$, inecuaţiile:

a) $\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x \geqslant \frac{3}{4}$;

b) $\log_a x + \log_a(x + 5) + \log_a 0{,}02 < 0$.

**R.** a) Inecuaţia se scrie succesiv:

$\log_a x - \frac{1}{2}\log_a x + \frac{1}{4}\log_a x \geqslant \frac{3}{4}$ sau $\frac{3}{4}\log_a x \geqslant \frac{3}{4}$ sau încă $\log x \geqslant 1$, şi deci dacă $a \in (0, 1)$, inecuaţia conduce la $0 < x \leqslant a$ iar pentru $a > 1$, avem $\log_a x > \log_a a$ şi fiindcă în acest caz, funcţia logaritm e crescătoare, $x \geqslant a$;

b) Inecuația se mai scrie:

$$\log_a \frac{x(x+5)}{50} < 0$$

de unde, pentru $a \in (0, 1)$, avem $x \in (10, \infty)$, iar pentru $a > 1$, condiția ca:

$$0 < \frac{x(x+5)}{50} < 1,$$

deci $x \in (0, 10)$.

**I. 8.15**[PO]. Să se arate că:

a) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$, unde $a, b \in (0, \infty)$, $c \in (0, \infty) - \{1\}$:

b) Să se găsească valorile reale ale lui $x$ pentru care:

$$x^{\log_3 (x-1)} + 2(x-1)^{\log_3 x} = 3^{x^2}.$$

**R.** a) Dacă logaritmăm în baza $c$, obținem:

$$\log_c b \cdot \log_c a = \log_c a \cdot \log_c b,$$

și ținînd cont că funcția logaritm este injectivă, avem enunțul.

b) Din egalitatea de la punctul a) se deduce:

$$x^{\log_3 (x-1)} = (x-1)^{\log_3 x}$$

deci ecuația dată devine:

$$x^{\log_3 (x-1)} = x^2, \text{ sau } \log_3 (x-1) = 2, \text{ de unde } x = 10.$$

**I. 8.16**[PO]. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\log_2 (4 + 4^{x^2}) = x^2 - 2 + \log_2 (14 + 2^{x^2})$;

b) $2^{\sin x + 1} - 2^{1-a-\cos x} = 2^{2-a-\cos x} - 2^{a \sin x + 2}$, $a \in \mathbb{R}$.

**R.** a) Ecuația se mai scrie $4 + 4^{x^2} = 2^{x^2-2}(2^{x^2}+14)$, de unde, punînd $2^{x^2} = y$, avem ecuația $3y^2 - 14y + 16 = 0$, cu soluțiile $y_1 = \frac{8}{3}$ și $y_2 = 2$, de unde, înlocuind în relația de substituție, se obține $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = \sqrt{\log_2 \frac{8}{3}}$; $x_4 = -\sqrt{\log_2 \frac{8}{3}}$.

b) Ecuația are și forma $3 \cdot 2^{\sin x + 1} = 3 \cdot 2^{1-a-a \cos x}$ de unde se obține $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -a$, deci $x \in \{2 \operatorname{arctg} (-a) + 2k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Cum $x \in \{(2k+1)\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ este soluție a ecuației pentru orice $a \in \mathbb{R}$, soluția generală a ecuației este dată de mulțimea $\{\pi + 2k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup$ $\cup \{2 \operatorname{arctg} (-a) + 2k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

**I. 8.17**[PO]. Fie $a > 1$. Să se arate că:

$$a^{x^2} + a^{y^2} = 2a^{xy}$$

dacă și numai dacă $x = y$.

**R.** Vom aplica inegalitatea mediilor și ținînd cont că pentru $a > 1$, funcția exponențială $a^x$ este strict crescătoare, avem:

$$2a^{xy} = a^{x^2} + a^{y^2} \geqslant 2a^{\frac{x^2+y^2}{2}},$$

de unde $xy \geqslant \frac{x^2+y^2}{2}$ sau $(x-y)^2 \leqslant 0$, deci $x = y$.

**I. 8.18**PO. Să se rezolve ecuaţia:

$$2^{|x+1|} - |2^x - 1| = 2^x + 1.$$

**R.** Dacă $x \in (-\infty, -1]$ ecuaţia se scrie:

$$2^{-x-1} + 2^x - 1 = 2^x + 1,$$

sau $2^{-x-1} = 2$, deci $x = -2$.

Dacă $x \in [-1, 0]$, ecuaţia are soluţia $x = 0$, iar cînd $x \in (0, \infty)$, soluţia ecuaţiei este $x \in (0, \infty)$.

**I. 8.19**PT. Să se rezolve inecuaţia:

$$\sqrt{\log_2 \frac{3-2x}{1-x}} < 1.$$

**R.** Punînd condiţia de existenţă a logaritmului, $\frac{3-2x}{1-x} > 0$ şi pe cea de existenţă a radicalului, adică $\log_2\left(\frac{3-2x}{1-x}\right) \geqslant 0$, inecuaţia dată este echivalentă cu $\log_2\left(\frac{3-2x}{1-x}\right) < 1$, sau $\frac{3-2x}{1-x} < 2$, ceea ce duce la sistemul de inecuaţii:

$$\frac{x-2}{x-1} \geqslant 0; \quad \frac{1}{1-x} < 0.$$

Prima inecuaţie conduce ~~la~~ $x \in (-\infty, 1) \cup [2, \infty)$, iar cea de a doua la $x \in (1, \infty)$ de unde, intersectînd, obţinem $x \in [2, \infty]$.

**I. 8.20**PT. Pentru ce ~~valori ale~~ lui $y$ inecuaţia:

$$x^2 \log_2 \frac{4(y+1)}{y} + 2x \log_2 \frac{2y}{y+1} + \log_2 \frac{(y+1)^2}{4y^2} > 0$$

este satisfăcută pentru orice $x$ real?

**R.** Condiţia de existenţă a radicalilor conduce la $\frac{y+1}{y} > 0$, de unde $y \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$.

Pentru ca expresia din enunţ să fie strict pozitivă, trebuie puse condiţiile:

$$\log_2^2\left(\frac{2y}{y+1}\right) - \left(\log_2\left(\frac{4(y+1)}{y}\right)\right)\left(\log_2\left(\frac{(y+1)^2}{4y^2}\right)\right) > 0$$

şi:

$$\log_2\left(\frac{4(y+1)}{y}\right) > 0.$$

Punînd $t = \log_2\left(\frac{y+1}{y}\right)$ se obţine pentru prima inecuaţie $t^2 + 4t - 5 > 0$, de unde $t \in (-\infty, -5) \cup (1, \infty)$ şi mai departe, înlocuind în formula de substituţie şi efectuînd, obţinem $y \in \left(-\frac{32}{31}, -1\right) \cup (0, 1)$.

A doua inecuaţie conduce la:

$$\frac{4y+4}{y} > 1, \text{ de unde } y \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup (0, \infty).$$

Intersectînd cele două mulţimi de soluţii găsite se obţinem $y \in [(0,1)$.

**I. 8.21ᵀ.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}=448.$$

**R.** Avem succesiv:

$$2^{x-3}(2^2+2+1)=448;$$
$$7\cdot 2^{x-3}=448;$$
$$2^{x-3}=2^6$$

**I. 8.22ᵀ.** Fie ecuația:

$$\boxed{\frac{2^x+a3^x}{2^x-a3^x}=2,\quad a\in\mathbb{R}.}$$

a) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația.

b) Pentru ce valori ale parametrului real $a$, rădăcinile ecuației sînt întregi?

**R.** Pentru $a=0$, ecuația este imposibilă. Fie, deci $a\neq 0$. Prin înmulțirea mezilor și respectiv a extremilor, între ei, egalitatea devine $2^x+a3^x=2(2^x-a3^x)$, sau, după calcule, $3a\cdot 3^x=2^x$, de unde $\left(\frac{2}{3}\right)^x=3a$, Ecuația nu are soluție dacă $a\leqslant 0$. Cînd $a>0$, logaritmînd în baza $2/3$ obținem $x=\log_{2/3}(3a)$. Pentru $x=n\in\mathbb{Z}$, avem $\frac{2^n}{3^n}=3a$, deci $a=\frac{2^n}{3^{n+1}}$.

**I. 8.23ᵀ.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$9\cdot 3^{2x}+9\cdot 3^x=810.$$

**R.** Făcînd substituția $3^x=t$, obținem ecuația:

$$t^2+t-90=0.$$

De aici, rezolvînd, avem $3^x=9$, de unde $x=2$.

**I. 8.24ᵀ.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$4^{\sin^2x}+4^{\cos^2x}=8.$$

**R.** Din condițiile evidente $\sin^2x\leqslant 1$ și $\cos^2x\leqslant 1$, obținem:

$$4^{\sin^2x}\leqslant 4,\quad 4^{\cos^2x}\leqslant 4.$$

Asta ar însemna că atît $4^{\sin^2x}$ cît și $4^{\cos^2x}$ ar trebui să fie simultan egale cu 4, imposibil deoarece $\sin^2x$ și $\cos^2x$ nu pot fi simultan egale cu 1, datorită faptului că:

$$\sin^2x+\cos^2x=1.$$

**I. 8.25^T.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația :

$$3^{4\sqrt{x}} + 2 \cdot 3^{2\sqrt{x}} - 3 = 0.$$

**R.** Cu transformarea $t = 3^{2\sqrt{x}}$, obținem :

$$t^2 + 2t - 3 = 0,$$

de unde $t_1 = 1 = 3^{2\sqrt{x}}$, deci $x = 0$. Soluția $t_2 = -3$ nu convine.

**I. 8.26^T.** Să se rezolve ecuația :

$$2^{x+1} + 2^{3-x} = 8.$$

**R.** Notînd $2^x = t$, ecuația devine $t^2 - 4t + 4 = 0$, sau $t_1 = t_2 = 2$, de unde obținem $x = 1$.

**I. 8.27^T.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația :

$$\boxed{2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6\left(2^x - \frac{1}{2^{x-1}}\right) = 1.}$$

**R.** Făcînd transformarea $2^x = t$, ecuația devine $\left(t - \frac{2}{t}\right)^3 = 1$, deci $t - \frac{2}{t} = 1$ și se obține soluția $x = 1$.

**I. 8.28^T.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația :

$$5^{x^2-5x} = 5^{-4}.$$

**R.** Ecuația devine :

$$x^2 - 5x = -4.$$

de unde rădăcinile $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

**I. 8.29^T.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația :

$$2 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0.$$

**R.** Cu notația $y = 2^x$, ecuația devine :

$$2y^2 - 3y + 1 = 0$$

cu soluțiile $y_1 = 1$, deci $2^x = 1$, adică $x_1 = 0$ și $y_2 = 1/2$, deci $2^x = 1/2 = 2^{-1}$ deci $x_2 = -1$.

**I. 8.30^T.** Să se restrîngă expresia :

$$E(a, b, c) = \log a + 5 \lg b - \frac{1}{3} \lg c.$$

**R.** Expresia devine :

$$E = \lg a + \lg b^5 - \lg \sqrt[3]{c} = \lg \frac{ab^5}{\sqrt[3]{c}}.$$

**I. 8.31ᵀ.** Să se calculeze suma:

$$S = \lg\left(1-\frac{1}{2}\right) + \lg\left(1-\frac{1}{3}\right) + \ldots + \lg\left(1-\frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}^* - \{1\}.$$

**R.** Transformînd în produse obţinem:

$$S = \lg 1/n.$$

**I. 8.32ᵀ.** Se dă expresia $E(x) = \log_2(x^2 - 3x + 3)$.

a) Să se determine mulţimea valorilor lui $x$ pentru care expresia $E(x)$ este număr real.

b) Să se studieze semnul lui $E$ pe domeniul său maxim de definiţie.

**R.** Expresia este definită pentru toţi $x \in \mathbb{R}$ pentru care:

$$x^2 - 3x + 3 > 0.$$

Dar trinomul $x^2 - 3x + 3$ are $\Delta = -3 < 0$, deci păstrează pentru orice $x \in \mathbb{R}$, semnul coeficientului lui $x^2$, adică $+$. Deci expresia există pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Dacă $x^2 - 3x + 3 > 1$ adică dacă $x^2 - 3x + 2 > 0$, deci dacă $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ expresia este strict pozitivă. Cînd $x \in \{1, 2\}$, expresia este nulă. Cînd $x \in (1, 2)$, expresia este negativă. Am folosit aici rezultatul potrivit căruia $\log_2 x < 0$, dacă $x \in (0, 1)$ şi $\log_2 x > 0$ cînd $x \in (1, \infty)$.

**I. 8.33ᵀ.** Să se determine $x$ astfel ca expresia următoare să fie definită:

$$E(x) = \log_{x-4}(x^2 - 9x + 8).$$

**R.** $E(x)$ are sens pentru $x - 4 > 0$, $x - 4 \neq 1$ şi $x^2 - 9x + 8 > 0$. Obţinem, rezolvînd aceste inegalităţi şi intersectînd mulţimea soluţiilor lor admisibile:

$$x \in (8, \infty).$$

**I. 8.34ᵀ.** Să se determine domeniul maxim $A$ de definiţie al funcţiei $f: A \to \mathbb{R}$ dată prin relaţia:

$$f(x) = \log_3(x^2 - 4x + 3).$$

**R.** Logaritmul are sens dacă:

$$x^2 - 4x + 3 > 0.$$

Rezolvînd inecuaţia, obţinem:

$$x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty).$$

**I. 8.35ᵀ.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia:

$$2 - \lg x = \lg 2 + \lg 4 + \lg 25.$$

**R.** Din condiţia de existenţă a logaritmului avem $x > 0$.

Ecuaţia se scrie concentrat, $\lg x = \lg \frac{1}{2}$, de unde obţinem $x = \frac{1}{2}$.

**I. 8.36ᵀ.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\log_{2\sqrt{2}} x = 3$; b) $\lg x = \lg 4 - \lg 3$; c) $\lg\sqrt{2x+5} + \frac{1}{2}\lg(x-6) = 1$.

**R.** a) Avem $x = (2\sqrt{2})^3$. b) $x = 4/3$. c). Punînd condițiile de existență ale logaritmului avem $x > 6$. Transformînd expresia dată de produs avem:

$$\lg(2x^2 - 7x - 30) = 2,$$

de unde, rezolvînd, obținem:

$$2x^2 - 7x - 130 = 0$$

cu soluția admisibilă $x_1 = 10$, $x_2 = -\frac{13}{2}$ nesatisfăcînd condițiile.

**I. 8.37ᵀ.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 1) = 2$; b) $\lg(\sin x) = 0{,}99999$;

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+7} = -2$; d) $3 \arccos x = 12$.

**R.** a) Se obține, rezolvînd, $x^2 = -3/4$, ecuația ce nu are soluții în mulțimea numerelor reale.

b) Avem, explicitînd:

$$\sin x = 10^{0{,}99999} > 1,$$

imposibil, deoarece $\sin x \leq 1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

c) Nu avem soluții nici în acest caz deoarece o funcție exponențială de tipul $a^x$, $a > 0$, ia valori în mulțimea numerelor reale pozitive.

d) Mulțimea valorilor funcției arccos este intervalul $[0, \pi]$, iar $4 > \pi$, deci egalitatea este imposibilă.

**I. 8.38ᵀ.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$(10000\, x)^{\lg x^3 - 5 \lg x} = 1.$$

**R.** Punînd condiția ca $x > 0$, logaritmînd și efectuînd obținem:

$$x = 1 \text{ și } x = 10^{-4}.$$

**I. 8.39ᵀ.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\log_{2x} 4x + \log_{4x} 16x = 4.$$

**R.** Condițiile de existență ale logaritmilor sînt $x > 0$, $x \neq \frac{1}{2}$ și $\neq \frac{1}{4}$. Soluțiile ecuației sînt $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

**I. 8.40ᵀ.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\log_{2x} x + \log_{4x} x = 0.$$

**R.** Condițiile de existență ale soluțiilor sînt $x > 0$, $x \neq \frac{1}{4}$. Ecuația se scrie succesiv:

$$\frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{\log_x 4x} = 0;$$

$$\frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{\log_x 4 + \log_x x} = 0;$$

$$\frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{2\log_x 2 + 1} = 0.$$

$\left(\text{Am aplicat formula } \log_x b = \frac{1}{\log_b a}\right)$. Notînd $\log_x 2 = y$, ecuația devine:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{2y+1} = 0.$$

sau, după eliminarea numitorilor, $3y = -1$, de unde $y = -\frac{1}{3}$ deci $\log 2 = -\frac{1}{3}$ adică $x = \frac{1}{8}$, Soluția îndeplinește condițiile de existență ale logaritmilor.

**I. 8.41**[T]. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$2\log_8 (2x) + \log (x^2 + 1 - 2x) = \frac{4}{3}.$$

**R.** Condițiile de existență ale soluțiilor sînt $x > 0$ și $x \neq 1$. Ecuația devine:

$$\log_8 (2x)^2 + \log_8 (x-1)^2 = \log_8 8^{\frac{4}{3}}$$

sau:

$$2x(x-1) = 4$$

de unde $x(x-1) = 2$, deci $x^2 - x - 2 = 0$ de unde $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. Convine $x_1$.

**I. 8.42**[T]. Să se arate că ecuația:

$$\frac{\lg(x^2 + m^2) - \lg m}{\lg 2x} = 1$$

are cel puțin o soluție reală, oricare ar fi $m$ parametru real și pozitiv.

**R.** Cu condițiile $x > 0$, $m > 0$, avem:

$$\lg\left(\frac{x^2 + m^2}{m}\right) = \lg 2x,$$

de unde $(x - m)^2 = 0$, sau $x = m$.

**I. 8.43**[M]**.** Să se rezolve ecuația:

$$\log_2(4^x + 3\cdot 2^x) - x = \log_2(2^{x+1} + 1).$$

**R.** Deoarece $\log_2 2 = 1$ și $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$, ecuația devine:

$$\log_2(4^x + 3\cdot 2^x) - \log_2 2 = \log_2(2^{x+1} + 1)$$

adică:

$$\log_2 \frac{4^x + 3\cdot 2^x}{2} = \log_2(2^{x+1} + 1),$$

sau, avînd în vedere că funcția logaritmică este injectivă:

$$\frac{4^x + 3\cdot 2^x}{2} = 2^{x+1} + 1$$

adică:

$$2^{2x} + 3\cdot 2^x = 2(2^{x+1} + 1)$$

(am folosit proprietatea: $(a^b)^c = a^{bc}$). Notînd $2^x = y$, ecuația devine:

$$y^2 + 3y = 2(2y + 1)$$

(deoarece $2^{x+1} = 2^x \cdot 2$) sa, după oarecari calcule:

$$y^2 - y - 2 = 0. \tag{1}$$

Cum ecuația:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

cu $a = 0$, are soluțiile date de formulele:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \overline{b^2 - 4ac}}{2a}$$

rezultă că pentru ecuația (1) avem soluțiile:

$$y_1 = 2; \; y_2 = -1$$

astfel că pentru $x$ obținem ecuațiile:

$$2^x = 2; \; 2^x = -1.$$

Prima ecuație conduce la soluția $x = 1$, iar a doua nu are soluție în mulțimea numerelor reale, căci puterea reală a unui număr strict pozitiv este un număr strict pozitiv.

**I. 8.44**[T]**.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

$$2^{2x} - 2^x = 56;$$

$$\lg 2 + \lg(4x - 2) = 2\lg 2 - \lg x.$$

**R.** Pentru prima ecuație notăm $2^x = t$, astfel că ecuația devine:

$$(t - 8)(t + 7) = 0,$$

deci $t_1 = 8$, de unde $2^x = 2^3$, deci $x = 3$. Ecuația $2^x = t_2 = -7$ nu are soluție.

Pentru a doua ecuație, impunînd condițiile de existență ale logaritmului, adică concentrat $x \in (1/2, \infty)$, ecuația devine:

$$\lg 2(4x - 2) = \lg \frac{4}{x}$$

deci:

$$2x(4x - 2) = 4.$$

de unde $2x^2 - x - 1 = 0$, cu soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = -1/2$. Convine doar $x_1 = 1$.

**I. 8.45**[T]. Să se rezolve în $\mathbb{R}^*$ sistemul:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 41. \\ 2\lg x + 2\lg y = 2. \end{cases}$$

**R.** Condițiile de existență ale logaritmilor sînt $x > 0$, $y > 0$. Cu aceste condiții sistemul devine:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 641 \\ x^2y^2 = 100 \end{cases}$$

care se scrie succesiv:

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 641 \\ xy = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = 641 + 200 = 841 \\ xy = 10 \end{cases}$$

sau:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ xy = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 29; \\ xy = 10; \end{cases} ; \qquad \begin{cases} (x + y)^2 = 29 + 20 = 49; \\ xy = 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 10 \end{cases}$$

de unde rezultă soluțiile date de ecuația:

$$z^2 - 7z + 10 = 0.$$

Rezultă $x = 2$, $y = 5$, respectiv $x = 5$, $y = 2$.

**I. 8.46**[T]. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0.$

b) $\lg x = \lg 24 - \lg 8.$

**R.** a) Cu substituția $3^x = t$ obținem ecuația:

$$t^2 - 10t + 9 = 0,$$

cu soluția $t_1 = 3^2$ și $t_2 = 1$, de unde avem $3^x = 3^2$, deci $x = 2$, și $3^x = 1$ deci $x = 0$.

b) Cu condiția $x > 0$, obținem $\lg x = \lg 3$, de unde $x = 3$.

**I. 8.47<sup>T</sup>.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$2^{\frac{1}{\log_2 x}} = \frac{1}{64}.$$

**R.** Soluția este $x = \dfrac{\sqrt[6]{2^5}}{2}$.

**I. 8.48<sup>T</sup>.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 6^x + 6^{x+1}$.

b) $\log_4(12 \cdot 2^x + 1) = -\log_9 3$.

**R.** a) Soluția este $x = 0$.

b) Soluția este $x = -2$.

**I. 8.49<sup>PO</sup>.** Să se determine funcția $f: \mathbb{R} \to (0, \infty)$ care satisface condițiile:

a) $f$ este monotonă;

b) $f(0) \neq 0$;

c) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) f(x_2)$,

pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

**R.** Fie $a$ imaginea lui 1 prin $f$, $f(1) = a$, unde $a \in (0, \infty)$.

Fie în c) $x_1 = x_2 = 0$. Atunci:

$$f(0) = f(0) \cdot f(0),$$

adică:

$$f(0) = (f(0))^2.$$

Această egalitate se poate împărți membru cu membru cu $f(0)$, căci $f(0) = 0$ conform cu b), astfel că $f(0) = 1$.

Să considerăm numerele reale $x_1$ și $x_2$ astfel ca $x_2 = -x_1$. Din c) rezultă:

$$f(x_1 - x_1) = f(x_1) \cdot f(x_1), \text{ adică } f(0) = f(x_1) \cdot f(-x_1),$$

deci:

$$f(-x_1) = \frac{1}{f(x_1)}. \tag{1}$$

Considerăm acum $x_1 = x_2 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Conform cu c) obținem:

$$f(\alpha + \alpha) = f(\alpha) \cdot f(\alpha),$$

adică:

$$f(2\alpha) = (f(\alpha))^2 \tag{2}$$

şi, prin inducţie,

$$f(px) = (f(x))^p, \tag{3}$$

unde $p \in \mathbb{N}$ şi $x \in \mathbb{R}$.

Fie acum $q \in \mathbb{N}$ şi $x = \frac{1}{q}$. Folosind relaţia anterioară rezultă

$$f\left(q \cdot \frac{1}{q}\right) = f\left(\frac{1}{q}\right)^q \tag{4}$$

adică $a = f\left(\frac{1}{q}\right)^q$, sau, altfel scris:

$$f\left(\frac{1}{q}\right) = a^{\frac{1}{p}}. \tag{5}$$

În relaţia (3) fie $x = \frac{1}{q}$. Obţinem:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{1}{q}\right)^p.$$

Folosind şi relaţia (5), găsim că:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a^{\frac{p}{q}}. \tag{6}$$

Utilizînd relaţiile (1) şi (6), găsim că pentru orice $m \in \mathbb{Z}$ şi $n \in \mathbb{Z}^*$, are loc:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = a^{m/n}.$$

Vom distinge trei posibilităţi:

1) Dacă $a = 1$, atunci $f(x) = 1$ pentru orice $x \in \mathbb{Q}$. Fie $x \in \mathbb{R}$ şi $r \in \mathbb{Q}$, $s \in \mathbb{Q}$ astfel ca $r < x < s$. Din a) rezultă că:

$$a^r \leqslant f(x) \leqslant a^s,$$

deci $f(x) = 1$. În acest caz $g = 1$.

2) Dacă $0 < a < 1$, atunci $f$ este monoton descrescătorare.

În acest caz fie $x \in \mathbb{R}$ şi $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ două şiruri de numere raţionale astfel ca $x_n \to x$ (crescător), şi $y_n \to x$ (descrescător). Din a) rezultă că $a^{y_n} \leqslant f(x) \leqslant a^{x_n}$ şi deci, trecînd la limită, rezultă că $f(x) = a^x$.

3) Dacă $a > 1$ funcţia $f$ este monoton crescătoare. Raţionăm la fel ca în cazul 2) şi rezultă de asemenea că:

$$f(x) = a^x.$$

**I. 8.50**[PO]. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi numerele reale:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r.$$

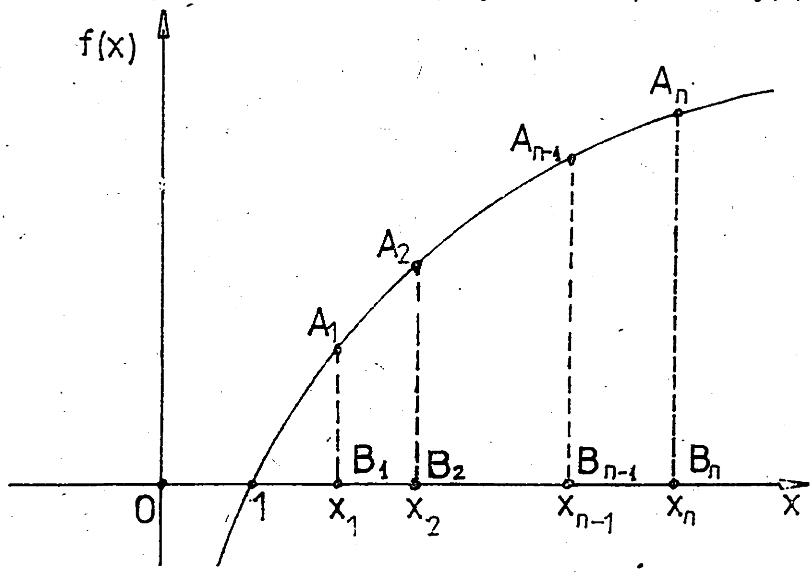
Dacă:

$$1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n,$$

să se arate că:

$$x_1^{x_2}\cdot x_2^{x_3}\ldots x_{n-1}^{x_1}\cdot x_n^{x_1}\geqslant x_2^{x_1}\cdot x_3^{x_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{x_{n-1}}\cdot x_1^{x_n}.$$

**R.** Dacă $n=1$, relația ce trebuie demonstrată este adevărată. Pentru $n\geqslant 2$, folosim graficul funcției $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, dată de $f(x)=\lg x$.




Evident:

$$\sigma(A_1B_1B_2A_2)+\sigma(A_2B_2B_3A_3)+\ldots+\sigma(A_{n-1}B_{n-1}B_nA_n)\geqslant$$
$$\geqslant\sigma(A_1B_1B_nA_1)$$

Scriem această relație astfel:

$$\frac{1}{2}(\lg x_1+\lg x_2)\cdot(x_2-x_1)+\frac{1}{2}(\lg x_2+\lg x_3)\cdot(x_3-x_2)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{2}(\lg x_{n-1}+\lg x_n)(x_n-x_{n-1})\geqslant\frac{1}{2}(\lg x_1+\lg x_n)(x_n-x_1).$$

Astfel:
$$x_2\lg(x_1x_2)-x_1\lg(x_1x_2)+x_3\lg(x_2x_3)-$$
$$-x_2\lg(x_2x_3)+\ldots+x_n\lg(x_{n-1}x_n)-$$
$$-x_{n-1}\lg(x_{n-1}x_n)\geqslant x_n\lg(x_1x_n)-x_1\lg x_1x_n.$$

Relația se mai scrie:

$$x_2\lg\frac{x_1x_2}{x_2x_3}+\ldots+x_{n-1}\lg\frac{x_{n-2}x_{n-1}}{x_{n-1}x_n}+x_n\lg\frac{x_{n-1}x_n}{x_nx_1}+x_1\lg\frac{x_nx_1}{x_1x_2}\geqslant 0$$

sau:

$$\lg\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{x_2}+\lg\left(\frac{x_2}{x_4}\right)^{x_3}+\lg\left(\frac{x_3}{x_5}\right)^{x_4}+\ldots+\lg\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^{x_{n-1}}+$$
$$+\lg\left(\frac{x_{n-1}}{x_1}\right)^{x_n}+\lg\left(\frac{x_n}{x_2}\right)^{x_1}>0,$$

deci :

$$\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{x_2}\cdot\left(\frac{x_2}{x_4}\right)^{x_3}\cdot\left(\frac{x_3}{x_5}\right)^{x_4}\cdots\left(\frac{x_{n-1}}{x_1}\right)^{x_n}\cdot\left(\frac{x_n}{x_2}\right)^{x_1}\geqslant 1,$$

de unde, în final :

$$x_1^{x_2}\cdot x_2^{x_3}\cdots x_{n-2}^{x_{n-1}}\cdot x_{n-1}^{x_n}\cdot x_n^{x_1}\geqslant x_3^{x_2}\cdot x_4^{x_3}\cdots x_n^{x_{n-1}}\cdot x_n^{x_{n-1}}\cdot x_2^{x_1},$$

adică ce s-a cerut în enunţ.

A10 / 52/136

**I.8.51**PT**.** Să se rezolve ecuaţia :

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x-\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x=\frac{3}{2}.$$

**R.** Notăm $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x=y$. Cum :

$$\boxed{\sqrt{3-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}}=1.}$$

deducem :

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x=\left(\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\right)^x=\frac{1}{y}.$$

Aşadar, ecuaţia dată (în $x$) se transcrie în următoarea ecuaţie (în $y$) :

$$y-\frac{1}{y}=\frac{3}{2},$$

care are rădăcinile $y_1=2$ şi $y_2=-\frac{1}{2}$. Cum :

$$y=\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x>0$$

rezultă că este acceptabilă doar rădăcina $y_1=2$, deci :

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x=2,$$

de unde, aplicînd funcţia lg se obţine :

$$x=\frac{\lg 2}{\lg\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=\frac{\lg 2}{\lg(1+\sqrt{2})}$$ OK.

deoarece :

$$(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}.$$

**I.8.52**PO**.** Fie $a$, $b$ strict pozitive. Să se rezolve ecuaţia :

$$2a^x=b^x+c^x,$$

în ipoteza că $c=\sqrt{ab}$.

**R.** Dacă $a = b$, atunci:

$$a = b = c$$

şi ecuaţia are ca soluţie orice $x \in \mathbb{R}$.

Fie acum $a$, $b$ strict pozitive şi diferite. Ecuaţia se mai scrie:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{x}{2}} = 2,$$

cu soluţiile:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{x}{2}} = -2, \quad \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{x}{2}} = 1.$$

Convine numai:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{x}{2}} = 1,$$

deci $x = 0$.

**I. 8.53**$^{Po}$. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{1}{\sqrt{2\log_{|x+a|} a}} + \frac{1}{\sqrt{2\log_{|x-a|} a}} = \frac{1}{\sqrt{\log_{|x^2-a^2|} a}}.$$

unde $a > 0$ şi $a \neq 1$.

**R.** Ecuaţia devine:

$$\sqrt{\log_a |x+a|} + \sqrt{\log_a |x-a|} = \sqrt{2 \log_a |x^2 - a^2|},$$

sau:

$$\log_a |x + a| + \log_a |x - a| - 2\sqrt{\log_a |x + a| \log_a |x - a|} = 0$$

de unde rezultă că:

$$(\log_a |x + a| - \log_a |x - a|)^2 = 0,$$

adică:

$$\log_a |x + a| = \log_a |x - a|,$$

sau:

$$|x + a| = |x - a|,$$

de unde se găseşte soluţia $x = 0$.

**I. 8.54**$^{Po}$. Se dă un număr real fixat $a > 0$, $a \neq 1$.

a) Să se determine mulţimea:

$$M_A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, \quad a^{\log \sqrt{a}^{\sin x} + \log \sqrt{a}^{\cos x}} \leqslant A\},$$

în care $A$ este un număr real.

b) Să se determine toate perechile $(A_1, A_2)$ pentru care:

$$M_{A_1} = M_{A_2}.$$

**R.** Avem şirul de echivalenţe :

$$a^{\log_{\sqrt{a}} \sin x + \log_{\sqrt{a}} \cos x} \leqslant A \Leftrightarrow (\sqrt{a})^{2\log_{\sqrt{a}} \sin x \cos x} \leqslant A \Leftrightarrow$$

$$(\sin x \cos x)^2 \leqslant A \Leftrightarrow \sin^2 2x \leqslant 4A \Leftrightarrow 2\sin^2 2x \leqslant 8A \Leftrightarrow 1 - \cos 4x \leqslant 8A \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos 4x \geqslant 1 - 8A.$$

Deci dacă $1 - 8A < -1$, adică $A > 1/4$, ţinînd cont de condiţiile de existenţă ale problemei, rezultă că pentru $(\forall)\ x \in \left(0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)_{k\in\mathbb{Z}}$, avem :

$$\cos 4x \geqslant 1 - 8A.$$

Deci :

$$M_A = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(0 + 2k, \frac{2}{\pi} + 2k\pi\right)_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Dacă :

$$-1 \leqslant 1 - 8A \leqslant 1,$$

cum $\cos 4x \geqslant 1 - 8A$ rezultă că :

$$-\arccos(1 - 8A) + 2k\pi \leqslant 4x \leqslant \arccos(1 - 8A) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

şi deci :

$$-\frac{1}{4}\arccos(1 - 8A) + \frac{k\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}\arccos(1 - 8A) + \frac{k\pi}{2}.$$

Ţinînd cont de condiţiile de existenţă ale problemei, pentru $k = 0$ obţinem :

$$x \in \left[0, \frac{1}{4}\arccos(1 - 8A)\right]$$

şi pentru $k = 1$, obţinem $x \in \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\arccos(1 - 8A), \frac{\pi}{2}\right]$.

Rezultă deci că în acest caz, soluţia generală este :

$$M_A = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\left[2k\pi, \frac{1}{4}\arccos(1 - 8A) + 2k\pi\right] \cup \right.$$
$$\left. \cup \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\arccos(1 - 8A) + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]\right\}.$$

Dacă $1 - 8A > 1$, atunci $M_A = \Phi$.

b) Avem de studiat trei posibilităţi:

i) Dacă:

$$A_1 > \frac{1}{4} \text{ şi } A_2 > \frac{1}{4},$$

atunci:

$$M_{A_1} = M_{A_2}$$

şi, rezultă deci:

$$M_{A_2} = M_{A_1}, (\forall)\, A_1 > \frac{1}{4},\ A_2 \frac{1}{4}.$$

ii). Dacă:

$$0 \leqslant A_1 \leqslant \frac{1}{4},\ 0 \leqslant A_2 \leqslant \frac{1}{4},$$

atunci pentru a avea $M_{A_1} = M_{A_2}$ rezultă că $A_1 = A_2$ deoarece funcţia arccos este bijectivă. Deci:

$$M_{A_1} = M_{A_2} \text{ dacă } A_1 = A_2,$$

şi:

$$0 \leqslant A_1 \leqslant \frac{1}{4},\quad 0 \leqslant A_2 \leqslant \frac{1}{4}.$$

iii) Dacă:

$$A_1 < 0,\quad A_2 < 0,$$

atunci:

$$M_{A_1} = M_{A_2} = \Phi$$

şi deci:

$$M_{A_1} = M_{A_2},\quad (\forall)\quad A_1 < 0,\ A_2 < 0.$$

**I. 8.55**[PO]. Să se arate că dacă $A > B > a > 1$, $k > 0$, atunci există inegalitatea:

$$1 + \log_a \frac{A}{B} > \log_{B+k}(A + k).$$

**R.** Inegalitatea din enunţ este echivalentă cu:

$$\log_a \frac{A}{B} > \log_{B+k}(A + k) - 1,$$

sau:

$$\log_a \frac{A}{B} > \log_{B+k} \frac{A + k}{B + k}, \tag{1}$$

Pentru a demonstra (1), plecăm de la inegalitatea :

$$\frac{A}{B} > \frac{A+k}{B+k},$$

valabilă pentru $A > B > 0$ şi $k > 0$.

Cum $a > 1$, rezultă :

$$\log_a \frac{A}{B} > \log_a \frac{A+k}{B+k}$$

şi cum $1 < a < B + k$, avem :

$$\log_a \frac{A+k}{B+k} > \log_{B+k} \frac{A+k}{B+k}$$

Din ultimele două inegalităţi, prin tranzitivitate, rezultă (1) şi problema este rezolvată.

**I. 8.56**[PO]. Să se demonstreze că :

$$\sqrt{\operatorname{tg} x} \cdot \sqrt[4]{\operatorname{tg}(2x)} \cdot \sqrt[8]{\operatorname{tg}(4x)} \cdots \sqrt[2^{n+1}]{\operatorname{tg}(2^n x)} = 2^{1-\frac{1}{2^{n+1}}} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt[2^{n+1}]{\sin^{n+1} 2x}},$$

$$(\forall) n \in \mathbb{N}, \text{ şi } (\forall)\, x \in \left(0, \frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

**R.** Fie $k \in \mathbb{N}$, $k < n$. Avem pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

$$\sqrt[2^{k+1}]{\operatorname{tg}(2^k x)} = 2^{\frac{1}{2^{k+1}}} \cdot \frac{\sqrt[2^k]{\sin(2^k x)}}{\sqrt[2^{k+1}]{\sin(2^{k+1} x)}} \qquad (1)$$

Facem în (1) $k = 0$, $k = 1, \ldots, k = n$, şi înmulţind în egalitate membru cu membru, apoi simplificînd, se obţine :

$$\sqrt{\operatorname{tg} x} \ldots \sqrt[2^{n+1}]{\operatorname{tg}(2^n x)} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}} \frac{\sin x}{\sqrt[2^{n+1}]{\sin(2^{n+1} x)}} =$$

$$= 2^{1-\frac{1}{2^{n+1}}} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt[2^{n+1}]{\sin(2^{n+1} x)}},$$

adică identitatea din enunţ.

## §9. Polinoame. Expresii algebrice de grad superior

**I.9.1**[M] Să se calculeze $f + g$, dacă:
a) $f = 1 + X^2 + X^4$ şi $g = 1 + X^2 - X^3 - X^4$; b) $f = \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2})X + X^3 - X^4$ şi $g = \sqrt{2} + \sqrt{2}X + X^2 + 2X^3 - X^4$; c) $f = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5$ şi $g = -1 + X - X^2 + X^3 - X^4 + X^5$; d) $f = (1 + i) + (1 - i)X + iX^2 - iX^3$ şi $g = -i + iX + (1 - i)X^2 + (1 + i)X^3$.

**R** Avem:
a) $f + g = 2 + 2X^2 - X^3$; b) $f + g = 2\sqrt{2} + X + X^2 + 3X^3 - 2X^4$;
c) $f + g = 0$; d) $f + g = 1 + X + X^2 + X^3$.

**I. 9.2**[M] Să se calculeze produsul $fg$ dacă:
a) $f = (1 + i) + X$ şi $g = (1 - i) - X$; b) $f = 1 - X + X^2 - X^3$ şi $g = 1 + X$; c) $f = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4$ şi $g = 1 + X$; d) $f = 1 + X + X^2 + \ldots + X^n$ şi $g = 1 - X$; e) $f = 2 - i + (3 - i)X + X^2$ şi $g = 2 + i + (3 + i)X - iX^2$; f) $f = 1 - \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})X + X^3$ şi $g = 1 + \sqrt{2} + (2 + \sqrt{2})X$.

**R.** Avem:
a). $fg = 2 - 2iX - X^2$; b). $fg = 1 - X^4$; c). $fg = 1 + X^5$; d). $fg = 1 - X^{n+1}$; e). $fg = 5 + 14X + (11 - i)X^2 + (2 - 2i)X^3 - iX^4$; f). $fg = -1 + 2X^2 + (1 + \sqrt{2})X^3 + (2 + \sqrt{2})X^4$.

**I. 9.3**[M]. Fie $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ un polinom cu coeficienţi complecşi. Notăm cu $\bar{f}$ polinomul $\bar{f} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1X + \bar{a}_2X^2 + \ldots + a_nX^n$. Să se arate că polinoamele $f + \bar{f}$ şi $f\bar{f}$ sînt cu coeficienţi reali.

**R.** Dacă $z = a + bi$, prin definiţie $\bar{z} = a - bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ şi atunci $z + \bar{z} = 2a \in \mathbb{R}$. Deci $f + \bar{f} = (a_0 + \bar{a}_0) + (a_1 + \bar{a}_1)X + \ldots + (a_n + \bar{a}_n)X^n = 3Re\ a_0 + (2Re\ a_1)X + \ldots + (2Re\ a_n)X^n$, unde $Re\ z$ reprezintă partea reală a lui $z$.

În mod analog, $f\bar{f} = a_0\bar{a}_0 + (a_0\bar{a}_1 + a_1\bar{a}_0)X + (a_0\bar{a}_2 + a_1\bar{a}_1 + a_2\bar{a}_0)X^2 + \ldots + a_n\bar{a}_nX^{2n}$. Coeficientul lui $X^k$ în produsul de mai sus este:

$$a_0\bar{a}_k + a_0\bar{a}_{k-1} + a_2\bar{a}_{k-2} + \ldots + a_{k-2}\bar{a}_2 + a_{k-1}\bar{a}_1 + a_k\bar{a}_0.$$

Să presupunem $k$ par. În acest caz, notînd $a_t = x_t + iy_t$, avem $a_j\bar{a}_{k-j} + \bar{a}_ja_{k-j} = 2x_jx_{k-j} + 2y_jy_{k-t} \in \mathbb{R}$, pentru $j \in 0, \overline{\frac{k-2}{2}}$ şi $a_{\frac{k}{2}}\bar{a}_{\frac{k}{2}} = x^2_{\frac{k}{2}} + y^2_{\frac{k}{2}} \in \mathbb{R}$ deci, în acest caz $f\bar{f} \in \mathbb{R}$. Pentru $k$ impar, analog (în acest caz nu avem termen $a_u\bar{a}_u$ şi pe ceilalţi îi cuplăm doi cîte doi, ca mai sus).

**I. 9.4**[M]. Un polinom $f \in \mathbb{C}[X]$ se zice inversabil dacă şi numai dacă există $g \in \mathbb{C}[X]$ astfel încît $fg = 1$. Să se arate că $f$ este inversabil dacă şi numai dacă $f \in \mathbb{C}$ şi $f \neq 0$.

**R.** Condiţia $fg = 1$ revine la grad $(fg) =$ grad 1 adică grad $f$ + grad $g = 0$. Dacă $f \in \mathbb{C}$, $f \neq 0$, atunci grad$f = 0$. Presupunînd $f$ inversabil rezultă, evident grad$f = 0$, deci $f \in \mathbb{C}$. Dacă $f \in \mathbb{C}$, $f \neq 0$, luăm $g = \frac{1}{f} \in \mathbb{C}$, $g \neq 0$ şi rezultă $f$ inversabil.

**I. 9.5^M.** Să se calculeze grad $(f + g)$ dacă:

a). $f = 1 + X + X^2$ și $g = 1 - X - X^2$; b). $f = 1 - 3X^2 + 7X^5$ și $g = 1 + X + X^4 - 7X^5$; c). $f = 1 + i + (1 - i)X^2 + iX^4$ și $g = i + iX^2 - iX^4$.

**R.** Avem:

a). $f + g = 2$, grad $(f + g) = 0$;

b). $f + g = 2 + X - 3X^2 + X^4$, grad $(f + g) = 4$;

c). $f + g = 1 + 2i + X^2$, grad $(f - g) = 2$.

**I. 9.6^M.** În raport cu parametrul complex $m \in \mathbb{C}$ să se determine gradul următoarelor polinoame:

a). $f = (m^2 - 3m + 2)X^3 + (m^2 - 4m + 3)X^2 + (m^2 - 1)X + 7$,

b). $f = (m^2 + 1)X^4 + (m^4 - 1)X^2 + 2iX + 1$.

**R.** a). Dacă $m^2 - 3m + 2 \neq 0$, deci dacă $m \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$, evident, gradul lui $f$ este 3. Dacă $m = 1$, $f$ devine $f = 7$, deci are gradul 0, iar dacă $m = 2$, avem $f = -X^2 + 3X + 7$, deci grad $f = 2$.

b). Dacă $m \in \{-i, i\}$, gradul lui $f$ este 1 căci, în acest caz, $f = 2iX + 1$. Dacă $m \in \mathbb{C} - \{-i, i\}$, gradul lui $f$ este evident, 4.

**I. 9.7^M.** Să se arate că pentru orice polinom $f$ de gradul $n > 0$ și un număr natural $k$, $0 \leqslant k \leqslant n$, există un polinom $g$ astfel încît grad $(f + g) = k$.

**R.** Fie $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_kX^k + a_{k+1}X^{k+1} + \ldots + a_nX^n$ polinomul dat. Luînd $g = -a_{k+1}X^{k+1} - \ldots - a_nX^n$ rezultă, evident, afirmația.

**I. 9.8^M.** Fie polinomul $f = 1 - 2X + 3X^2 - 4X^3$. Să se calculeze $f(1)$; $f(-1)$; $f(2)$; $f(-2)$; $f(i)$; $f(-i)$; $f(1 + i)$; $f(1 - i)$; $f(1 + \sqrt{2})$; $f(1 - \sqrt{2})$.

**R.** Avem $f(1) = -2$, $f(-1) = 10$, $f(2) = -23$, $f(-2) = 49$, $f(i) = -2i - 2$, $f(-i) = -2 - 2i$, $f(1 + i) = 7 - 4i$, $f(1 - i) = 7 + 4i$, $f(1 + \sqrt{2}) = -20 - 16\sqrt{2}$, $f(1 - \sqrt{2}) = -20 + 16\sqrt{2}$.

**I. 9.9^M.** Să se determine polinoamele de gradul al doilea

$f = a_0 + a_1X + a_2X^2$ astfel încît $f(1) = -2$, $f(2) = -1$ și $f(3) = 4$.

**R.** Condițiile revin la sistemul:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 &= -2 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 &= -1 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 &= 4 \end{aligned}$$

cu soluția $a_0 = 1$, $a_1 = -5$, $a_2 = 2$ deci $f = 1 - 5X + 2X^2$.

**I. 9.10^M.** Fie funcția polinomială $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = x^3 + ax + b$, $(\forall)x \in [0, 1]$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Să se arate că în mod necesar $a \leqslant 0$ și $b \geqslant 0$.

**R.** Cum $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $(\forall)x \in [0, 1]$, rezultă, în particular, $0 \leqslant f(0) \leqslant 1$, deci $0 \leqslant b \leqslant 1$ și $0 \leqslant f(1) \leqslant 1$, deci $0 \leqslant 1 + a + b \leqslant 1$. Din ultima dublă inegalitate rezultă $a + b \leqslant 0$ și cum $b \geqslant 0$, rezultă că nu putem avea $a > 0$ (căci ar rezulta $a + b > 0$) deci $a \leqslant 0$.

**I. 9.11^M.** Să se găsească polinoamele $f \in \mathbb{R}[X]$ de gradul al doilea care satisfac condiția $f(a^3) = [f(a)]^3$, $(\forall)\, a \in \mathbb{R}$.

**R.** Fie $f = m + nX + pX^2$ polinomul căutat. Condiția devine:

$$m + na^3 + pa^6 = (m + na + pa^2)^3$$

sau:

$$m + na^3 + pa^6 = m^3 + 3m^2na + (3(mn^2 + 3m^2p)a^2 +$$
$$+ (6mnp + n^3)a^3 + (3mp^2 + 3n^2p)a^4 + 3np^2a^5 + p^3a^6,$$

oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, de unde rezultă sistemul:

$$\begin{cases} m = m^3, \\ 3m^2n = 0 \\ 3mn^2 + 3m^2p = 0 \\ 6mnp + n^3 = n \\ 3mp^2 + 3n^2p = 0 \\ 3np^2 = 0 \\ p = p^3. \end{cases}$$

Excludem cazul $p = 0$, căci altfel polinomul n-ar mai fi de gradul II. Deci $p^2 = 1$. Din a doua și a treia ecuație a sistemului rezultă $3m^2p = 0$ (căci dacă $3m^2n = 0$, atunci și $3mn^2 = 0$) deci $m = 0$. Din a șasea ecuație rezultă și $n = 0$. Din $p^2 = 1$ rezultă $p = 1$ sau $p = -1$. Obținem polinoamele $f_1 = X^2, f_2 = -X^2$. Ambele verifică enunțul.

**I. 9.12.** Să se arate prin inducție după $n$ că are loc egalitatea:

$$(X + 2X^2 + 3X^3 + \ldots + nX^n)(1 - X)^2) = nX^{n+2} - (n + 1)X^{n+1} + X.$$

**R.** Scriem egalitatea de demonstrat sub forma:

$$X + 2X^2 + 3X^3 + \ldots + nX^n = \frac{nX^{n+2} - (n + 1)X^{n+1} + X}{(1 - X)^2}.$$

Pentru $n = 1$ ea devine $X = \dfrac{X^3 - 2X^2 + X}{(1 - X)^2}$, evidentă.

Presupunînd egalitatea adevărată pentru o valoarea $k$ atribuită lui $n$:

$$X + 2X^2 + 3X^3 + \ldots + kX^k = \frac{kX^{k+2} - (k + 1)X^{k+1} + X}{(1 - X)^2}$$

rezultă, adăugînd ambilor membrii monomul $(k + 1)X^{k+1}$:

$$X + 2X^2 + 3X^3 + \ldots + kX^k + (k+1)X^{k+1} = \frac{kX^{k+2} - (k+1)X^{k+2} + X}{(1 - X)^2} +$$
$$+ (k + 1)X^{k+1} = \frac{(k + 1)X^{k+3} - (k + 2)X^{k+2} + X}{(1 - X)^2}$$

ceea ce demonstrează că egalitatea este adevărată și pentru valoarea $k + 1$ atribuită lui $n$. Deci egalitatea este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

**I. 9.13^M.** Să se determine cîtul şi restul împărţirii polinomului $f$ prin binomul $g$ dacă:

a). $f = X^6 - X^5 - X^4 + X^3 - 2X^2 + 5X - 4, g = X^2 - 2X + 3$;

b). $f = X^4 - 6X^3 - 8X^2 + 1,\ g = X^3 - X + 1$;

c). $f = X^4 - 2X^2 + 2$; $g = X^2 - 2X + 2$;

d). $f = X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 4X^2 + 5X - 6,\ g = X^3 - X^2 + 2X - 3$;

e). $f = X^7 - 3X^6 + 2X^5 + 2X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 3X - 1,\ g = X^2 - 2X + 1$

f). $f = X^{22} - X^{17} + X^{10} + X^5 + 2X^2 + 2,\ g = X^2 + X + 1.$

**R.** Avem schemele:

a)
$$\begin{array}{r|l}
X^6 - X^5 - X^4 + X^3 - 2X^2 + 5X - 4 & X^2 - 2X + 3 \\ \cline{2-2}
-X^6 + 2X^5 - 3X^4 \qquad\qquad\qquad\qquad & X^4 + X^3 - 2X^2 - 6X - 8 \\ \cline{1-1}
X^5 - 4X^2 + X^3 - 2X^2 + 5X - 4 & \\
-X^5 + 2X^4 - 3X^3 \qquad\qquad\qquad & \\ \cline{1-1}
-2X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 5X - 4 & \\
+2X^4 - 4X^3 + 6X^2 \qquad\qquad & \\ \cline{1-1}
-6X^3 + 4X^2 + 5X - 4 & \\
+6X^3 - 12X^2 + 18X \qquad & \\ \cline{1-1}
-8X^2 + 23X - 4 & \\
+8X^2 - 16X + 24 & \\ \cline{1-1}
7X + 20 &
\end{array}$$

b).
$$\begin{array}{r|l}
X^4 - 6X^3 - 8X^2 \qquad + 1 & X^3 - X + 1 \\ \cline{2-2}
-X^4 \qquad + X^2 \quad X \quad & X - 6 \\ \cline{1-1}
-6X^3 - 7X^2 - X + 1 & \\
+6X^3 - 6X + 6 & \\ \cline{1-1}
-7X^2 - 7X + 7 &
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r|l}
X^4 \qquad - 2X^2 + 2 & X^2 - 2X + 2 \\ \cline{2-2}
-X^4 + 2X^3 - 2X^2 \qquad & X^2 + 2X \\ \cline{1-1}
2X^3 - 4X^2 \qquad + 2 & \\
-2X^3 + 4X^2 - 4X \quad & \\ \cline{1-1}
-4X + 2 &
\end{array}$$

etc. Rezultă: d). $q = X^2 - X,\ r = X^2 + 2X - 6$; e). $q = X^5 - X^4 - X^3 + X^2 + X - 1,\ r = 0$; f) $q = X^{20} - X^{19} + X^{17} - X^{16} - X^{15} + 2X^{14} - X^{13} - X^{12} + 2X^{11} - X^{10} - X^9 + 3X^8 - 2X^7 - X^6 + 3X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 2X + 2$; $r = 0$.

**I. 9.14^M.** Să se afle un polinom de gradul trei astfel încît împărţit la $X^2 - 3X$ dă restul $6X - 15$ şi împărţit la $X^2 - 5X + 8$ dă restul $2X - 7$.

**R.** Fie $f = aX^3 + bX^2 + cX + d$ polinomul căutat. Putem scrie $ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 - 3x)\,Q(x) + 6x - 15$ (conform teoremei împărţirii cu rest). Făcînd $x = 0$, respectiv $x = 3$ obţinem $d = 0$, respectiv $27a + 9b + 3c + d = 3$. Pentru a găsi încă două relaţii pentru $a, b, c, d$ folosim schema:

$$\begin{array}{l|l}
aX^3 + bX^2 + cX + d & X^2 - 5X + 8 \\
\cline{2-2}
-aX^3 + 5aX^2 - 8aX & aX + 5a + b \\
\cline{1-1}
(5a + b)X^2 + (c - 8a)X + d. & \\
-(5a + b)X^2 + (25a + 5b)X - 40a - 8b & \\
\cline{1-1}
(17a + 5b + c)X - 40a - 8b + d &
\end{array}$$

Deci:

$$17a + 5b + c = 2$$
$$-40a - 8b + d = -7$$

Rezolvînd sistemul format de cele 4 ecuaţii obţinem:

$$f = X^3 - 6X^2 + 15X - \cancel{51}\ 15.$$

**I. 9.15**[M]. Să se arate că dacă $f$ şi $g$ dau prin împărţirea lor la $h$ resturile $r_1$ respectiv $r_2$, atunci pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, polinomul $\alpha f + \beta g$ dă prin împărţire la $h$ restul $\alpha r_1 + \beta r_2$.

**R.** Avem, în baza teoremei împărţirii cu rest:

$$f = hq_1 + r_1 ; g = hq_2 + r_2$$

deci:

$$\alpha f = \alpha hq_1 + \alpha r_1 ; \beta g = \beta hq_2 + \beta r_2$$

de unde:

$$\alpha f + \beta g = h(\alpha q_1 + \beta q_2) + \alpha r_1 + \beta r_2$$

Pe de altă parte:

$$\alpha f + \beta g = hQ + R$$

Conform teoremei împărţirii cu rest (v. Manual algebră, cls. X p. 113) rezultă $Q = \alpha q_1 + \beta q_2$, $R = \alpha r_1 + \beta r_2$.

**I. 9.16**[M]. Ce condiţii trebuie să îndeplinească numerele $m, p, q$ aşa încît restul împărţirii polinomului $X^4 + pX^2 + q$ la polinomul $X^2 + mX + 1$ să fie zero?

**R.** Avem schema:

$$\begin{array}{l|l}
X^4 \qquad + pX^2 + q & X^2 + mX + 1 \\
\cline{2-2}
-X^4 - mX^3 - X^2 & X^2 - mX + m^2 + p - 1 \\
\cline{1-1}
- mX^3 + X^2(p - 1) + q & \\
+ mX^3 + m^2X^2 + mX & \\
\cline{1-1}
(m^2 + p - 1)X^2 + mX + q & \\
-(m^2 + p - 1)X^2 + (-m^3 - m^2p + m)X - m^2 - p + 1 & \\
\cline{1-1}
(-m^3 - m^2p + 2m)X - m^2 - p + q + 1 &
\end{array}$$

Punînd condiţia ca restul să fie zero obţinem:

$$-m^3 - m^2p + 2m = 0,$$
$$-m^2 - p + q + 1 = 0.$$

**I. 9. 17[M].** Aplicînd schema lui Horner, să se determine cîtul și restul împărțirii polinomului $f$ prin $g$ dacă :

a). $f = X^4 - 3X^3 - 2X^2 - 6X + 1$, $g = X - 1$;
b). $f = X^6 - X^5 + 3X^3 - 6X + 2$, $g = X + 1$;
c). $f = X^5 - X^4 - 2X^3 + X^2 - X - 2$, $g = X - 2$;
d). $f = X^5 - 2X^4 - X^3 + 2X^2 - 2$, $g = X + 2$;
e). $f = X^6 - X^5 - X^4 + 6X - 1$, $g = X + \frac{1}{2}$;
f). $f = 2X^3 + 8X^2 - 4X + 2$, $g = 2X + 1$;
g). $f = 3X^4 + 2X^3 - 4X^2 + 6X + 6$, $g = 3X - 1$.

**R.** Avem schemele :

a).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $X^4$ | $X^3$ | $X^2$ | $X$ | $X^0$ |
| | $1$ | $-3$ | $-2$ | $-6$ | $1$ |
| $1$ | $1$ | $-3+1\cdot 1=-2$ | $-2+1\cdot(-2)=-4$ | $-6+1\cdot(-4)=-10$ | $1+1\cdot(-10)=-9$ |
| | $b_3$ | $b_2$ | $b_1$ | $b_0$ | $r$ |

deci $q = X^3 - 2X^2 - 4X - 10$, $r = -9$;

b).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $X^6$ | $X^5$ | $X^4$ | $X^3$ | $X^2$ | $X$ | $X^0$ |
| | $1$ | $-1$ | $0$ | $3$ | $0$ | $-6$ | $2$ |
| $-1$ | $1$ | $-1+1\cdot(-1)=-2$ | $0+(-1)\cdot(-2)=2$ | $3+(-1)2=1$ | $0+1\cdot(-1)=-1$ | $-6+(-1)\cdot(-1)=-5$ | $2+(-1)\cdot(-5)=7$ |
| | $b_5$ | $b_4$ | $b_3$ | $b_2$ | $b_1$ | $b_0$ | $r$ |

deci $q = X^5 - 2X^4 + 2X^3 + X^2 - X - 5$, $r = 7$, etc. Obținem c). $q = X^4 + X^3 + X + 1$, $r = 0$; d). $q = X^4 - 4X^3 + 7X^2 - 12X + 4$, $r = -50$; e). $q = X^4 - \frac{3}{2}X^4 + \frac{1}{2}X^3 + \frac{1}{8}X^2 - \frac{1}{16}X + \frac{193}{32}$, $r = -\frac{257}{64}$; f). $q = X^2 + \frac{7}{2}X - \frac{15}{4}$, $r = \frac{23}{4}$; g) $X^3 + \frac{5}{3}X^2 - \frac{7}{9}X + \frac{47}{27}$; $r = \frac{209}{27}$.

**I. 9.18[M].** Să se afle un polinom de grad cît mai mic astfel încît împărțit la $X + 1$ să dea restul $-1$ și împărțit la $X - 1$ să dea restul 1.

**R.** Polinomul căutat nu poate fi, evident, de grad 0. Să căutăm, dacă există, un polinom de grad 1, $f = aX + b$. Potrivit teoremei lui Bézout, $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$, adică $-a + b = -1$, $a + b = 1$, de unde $b = 0$, $a = 1$, deci $f = X$. Altfel, scriem $aX + b = (X + 1)Q_1(X) - 1$, $aX + b = (X - 1)\,Q_2(X) + 1$, și facem $x = -1$, $x = 1$.

**I.9.19[M].** a) Să se determine parametrul real $m$ astfel încît polinomul $f = 2X^4 - mX^3 + X^2 - 7$ împărţit la $X + 2$ să dea restul 4.

b) Să se determine parametrul real $m$ astfel încît polinomul $f=X^5-mX^4 + (m^2 - 2)X^3 + mX^2 - 1$ împărţit la $X - 1$ să dea restul 7.

**R.** a) Potrivit schemei :

$$\begin{array}{l|l}
2X^4 - mX^3 + X^2 - 7 & X + 2 \\
\cline{2-2}
-2X^4 - 4X^3 & 2X^3 + (-4-m)X^2 + (2m+9)X + (-4m-18) \\
\cline{1-1}
\quad (-4 - m)X^3 & \\
-(-4 - m)X^3 + (2m + 8)X^2 & \\
\cline{1-1}
\qquad (2m + 9)X^2 - 7 & \\
\quad -(2m + 9)X^2 + (-4m - 18)X & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad (-4m - 18)x - 7 & \\
\qquad -(-4m - 18)X + 8m + 36 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 8m + 29 &
\end{array}$$

avem $8m + 29 = 4$ deci $m = -\frac{25}{8}$.

Altfel, folosind teorema lui BÉZOUT (v. Manual, algebră, cls. X. 129), avem $f(-2) = 4$, adică $8m + 29 = 4$ care conduce la acelaşi rezultat.

b). Avem conform teoremei împărţirii cu rest ($Q$ fiind cîtul) :

$$x^5 - mx^4 + (m^2 - 2)x^3 + mx^2 - 1 = (x - 1)\,Q + 7.$$

Făcînd $x = 1$ obţinem $m^2 - 9 = 0$ de unde $m_1 = 3$, $m_2 = -3$.

**I.9.20[M].** Să se determine parametrii reali $a$ şi $b$ astfel încît polinomul $f = X^3 - aX^2 + bX + 1$ împărţit la $X - 1$ să dea restul 1 şi împărţit la $X + 1$ să dea restul $-5$.

**R.** Avem :

$$x^3 - ax^2 + bx + 1 = (x - 1)Q_1 + 1$$

$$x^3 - ax^2 + bx + 1 = (x + 1)Q_2 - 5.$$

Făcînd în prima relaţie $x = 1$, iar în a doua $x = -1$, obţinem sistemul :

$$-a + b = -1$$

$$-a - b = -5$$

de unde $a = 3$, $b = 2$.

**I.9.21[M].** Să se determine un polinom $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ astfel încît împărţit la $X^2 - 3X + 1$ să dea restul $2X + 1$ şi împărţit la $X^2 - 1$ să dea restul $-2X + 2$.

**R.** Avem schema:

$$
\begin{array}{l|l}
X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d & X^2 - 3X + 1 \\ \cline{2-2}
-X^4 + 3X^3 - X^2 & X^2 + (a+3)X + 3a + b + 8 \\ \cline{1-1}
\quad (a+3)X^3 + (b-1)X^2 + cX + d & \\
\quad -(a+3)X^3 + (3a+9)X^2 - (a+3)X & \\ \cline{1-1}
\quad (3a+b+8)X^2 + (c-a-3)X + d & \\
-(3a+b+8)X^2 + (9a+3b+8)X - 3a - b - 8 & \\ \cline{1-1}
\qquad (8a+3b+c+5)X - 3a - b - d - 8 &
\end{array}
$$

Deci $8a + 3b + c + 5 = 2$, $-3a - b - d - 8 = 1$. Pe de altă parte, potrivit teoremei împărțirii cu rest:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 - 1)Q - 2x + 2$$

Făcînd $x = 0$ și $x = 1$, obținem $d = 2$, respectiv $1 + a + b + c + d = 0$ sistemul format de cele 4 ecuații conduce la soluția $a = -2$, $b = -1$, $c = 0$, $d = 2$.

Lecția 9

**I. 9.22^M^.** Să se arate că polinomul $f = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 6X + 6$ se divide la $X - 1$; se cere cîtul împărțirii.

10 (104)

**R.** Avem schema:

$$
\begin{array}{l|l}
X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 6X + 6 & X - 1 \\ \cline{2-2}
-X^4 + X^3 & X^3 - 2X^2 - 6 \\ \cline{1-1}
\quad -2X^3 + 2X^2 - 6X + 6 & \\
\quad +2X^3 - 2X^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad -6X + 6 & \\
\qquad\qquad +6X - 6 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad - \quad - &
\end{array}
$$

**I. 9.23^M^.** Să se arate că polinomul $f = X^7 - 3X^6 + 2X^5 + 2X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 3X - 1$ se divide la $X^2 - 2X + 1$; se cere cîtul împărțirii.

**R.** Avem schema:

$$
\begin{array}{l|l}
X^7 - 3X^6 + 2X^5 - 2X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 3X - 1 & X^2 - 2X + 1 \\ \cline{2-2}
-X^7 + 2X^6 - X^5 & X^5 - X^4 - X^3 + X^2 + X - 1 \\ \cline{1-1}
\quad - X^6 + X^5 + 2X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 3X - 1 & \\
\quad + X^6 - 2X^5 + X^4 & \\ \cline{1-1}
\qquad -X^5 + 3X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 3X - 1 & \\
\qquad + X^5 - 2X^4 + X^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad X^4 - X^3 - 2X^2 + 3X - 1 & \\
\qquad\quad -X^4 + 2X^3 - X^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad X^3 - 3X^2 + 3X - 1 & \\
\qquad\qquad -X^3 + 2X^2 - X & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad - X^2 + 2X - 1 & \\
\qquad\qquad\quad + X^2 - 2X + 1 & \\ \cline{1-1}
&
\end{array}
$$

**I. 9.24[M].** Să se determine parametrul $m$ astfel încît polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 6X - m$ să se dividă la $X - 2$.

**R.** Potrivit teoremei împărţirii cu rest:

$$x^3 - 3x^2 + 6x - m = (x - 2)Q(x),$$

în care facem $x = 2$. Obţinem $8 - 12 + 12 - m = 0$ deci $m = 8$.

**I. 9.25[M].** Să se determine $a, b, c$ astfel încît polinomul $f = X^5 - 2X^4 + 18X^3 + aX^2 + bX + c$ să fie divizibil prin polinomul $g = X^3 - 3X^2 + 10X - 9$.

**R.** Avem schema:

$$\begin{array}{l|l}
X^5 - 2X^4 + 18X^3 + aX^2 + bX + c & X^3 - 3X^2 + 10X - 9 \\ \cline{2-2}
-X^5 + 3X^4 - 10X^3 + 9X^2 & X^2 + X + 11 \\ \cline{1-1}
\quad X^4 + 8X^3 + (a + 9)X^2 + bX + c & \\
\quad - X^4 + 3X^3 - 10X^2 + 9X & \\ \cline{1-1}
\quad 11X^3 + (a - 1)X^2 + (b + 9)X + c & \\
-11X^3 + 33X^2 - 110X + 99 & \\ \cline{1-1}
(a + 32)X^2 + (b - 101)X + c + 99 &
\end{array}$$

Punînd condiţia ca restul să fie polinomul nul, obţinem $a = -32$, $b = 101$, $c = -99$.

**I. 9.26[M].** Să se determine relaţiile într numerele $m, p, q$ astfel încît polinomul $f = X^3 + pX + q$ să fie divizibil cu polinomul $g = X^2 + mX + 1$.

**R.** Avem schema

$$\begin{array}{l|l}
X^3 + pX + q & X^2 + mX + 1 \\ \cline{2-2}
-X^3 - mX^2 - X & X - m \\ \cline{1-1}
- mX^2 + (p - 1)X + q & \\
+ mX^2 + m^2X + m & \\ \cline{1-1}
(p + m^2 - 1)X + q + m &
\end{array}$$

Restul fiind polinomul nul, rezultă $p + m^2 - 1 = 0$, $q + m = 0$.

**I. 9.27[M].** Să se determine $a$ şi $b$ astfel încît polinomul $f = aX^4 + bX^3 - 3$ să fie divizibil cu polinomul $g = (X - 1)^2$.

**R.** Avem schema:

$$\begin{array}{l|l}
aX^4 + bX^3 \qquad\qquad -3 & X^2 - 2X + 1 \\ \cline{2-2}
- aX^4 + 2aX^3 - aX^2 & aX^2 + (2a + b)X + (3a + 2b) \\ \cline{1-1}
(2a + b)X^3 - aX^2 \qquad - 3 & \\
-(2a + b)X^3 + (4a + 2b)X^2 - (2a + b)X & \\ \cline{1-1}
(3a + 2b)X^2 - (2a + b)X - 3 & \\
-(3a + 2b)X^2 + (6a + 4b)X - 3a - 2b & \\ \cline{1-1}
(4a + 3b)X - 3a - 2b - 3 &
\end{array}$$

Deci $4a + 3b = 0$, $3a - 2b - 3 = 0$, de unde $a = -9$, $b = 12$.

**I.9.28$^M$.** Dacă un polinom $f$ nu divide nici pe $g_1$, şi nici pe $g_2$, rezultă de aici că $f$ nu divide produsul $g_1g_2$?

**R.** Nu rezultă totdeauna aşa cum arată următorul exemplu:

$$f = X^2 - 3X + 2, \quad g_1 = X^2 - 4X + 3, \quad g_2 = X^2 - 5X + 6.$$

Evident, $f \nmid g_1$, $f \nmid g_2$, şi totuşi $f \mid g_1g_2$.

**I.9.29$^M$.** Fie $f$, $g_1$, $g_2$ trei polinoame astfel încît $f \mid g_1g_2$. Dacă $f$ şi $g_1$ sînt prime între ele să se arate că $f \mid g_2$.

**R.** Se cunoaşte teorema (v. Manual X, algebră p. 124): Dacă $f$ şi $g$ sînt două polinoame iar $d$ este cel mai mare divizor comun al lor, aruncі există polinoamele $u$ şi $v$ astfel încît $d = uf + vg$. Deoarece polinoamele $f$ şi $g_1$ sînt prime între ele, există aşadar polinoamele $u_1$ şi $v_1$ aşa încît $u_1f + v_1g_1 = 1$ ($d$ în acest caz este polinomul constant $d = 1$). Obţinem încă, înmulţind relaţia de mai sus cu $g_2$, $u_1g_2f + v_1g_1g_2 = g_2$. Deoarece $f \mid g_1g_2$, există $h$ aşa ca $g_1g_2 = hf$ deci $u_1g_2f + v_1hf = g_2$ sau $f(u_1g_2 + v_1h) = g_2$ deci $f \mid g_2$.

**I.9.30$^M$.** Dacă polinomul $f$ este prim cu polinoamele $g$ şi $h$, să se arate că $f$ este prim şi cu produsul $gh$.

**R.** Presupunem că $f$ şi $gh$ au divizorul comun $d \neq 1$. Deci există polinoamele $a$ şi $b$ astfel încît $f = ad$, $gh = bd$. Pe de altă parte, potrivit teoremei citată în rezolvarea problemei precedente, există polinoamele $u_1$ şi $v_1$ astfel încît $u_1f + gv_1 = 1$, căci $f$ şi $g$ sînt prime între ele. Înmulţind relaţia de mai sus cu $h$ rezultă $u_1fh + ghv_1 = h$ deci, cu observaţiile precedente, $u_1adh + bdv_1 = h$ sau $d(u_1ah + bv_1) = h$, deci $d \mid h$, absurd căci rezultă că $f$ şi $h$ au ca divizor comun pe $d \neq 1$, contrar ipotezei că ele sînt prime între ele. Deci $d = 1$.

**I.9.31$^M$.** Folosind algoritmul lui EUCLID să se determine cel mai mare divizor comun al polinoamelor:

a). $f = X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7$, $g = 3X^6 - 7X^4 + 3X^3 - 7X$;

b). $f = X^6 - X^5 - X^4 + 8X^3 - 5X^2 - 2X + 10$, $g = 3X^4 - 6X^3 + 5X^2 + 2X - 2$;

c). $f = X^6 + 2X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 8X - 5$, $g = X^6 + X^3 - X^2 + X$;

d). $f = X^6 + 3X^5 - 12X^4 - 52X^3 - 52X^2 - 12X$, $g = X^4 + 3X^3 - 6X^2 - 22X - 12$;

e). $f = X^5 + X^4 - X^3 - 3X^2 - 3X - 1$, $g = X^5 - 3X^4 + X^3 - X^2 + 3X - 1$;

f). $f = X^5 - 10X^3 + X$, $g = X^4 - 4\sqrt{2}X^3 + 6X^2 + 4\sqrt{2}X + 1$;

g). $f = X^4 - 4X^3 + 1$, $g = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + X + 1$;

h). $f = X^5 - 4X^4 + 3X^3 - 2X^2 + X - 1$; $g = X^4 - 2X^2 + 3X - 2$;

i). $f = X^6 - 2X^5 + 3X^4 - 6X^3 - 5X^2 + X - 6$, $g = X^4 + 2X^3 + 3X^2 - 6X - 8$.

Analog

**R.** Avem schemele:

a)

$$\begin{array}{l|l}
3X^6 - 21X^4 + 24X^3 - 21X + 21 & 3X^6 - 7X^4 + 3X^3 - 7X \\
\hline
-3X^6 + 7X^4 - 3X^3 + 7X & 1 \\
\hline
-14X^4 + 21X^3 - 14X + 21 &
\end{array}$$

$X^4 - 3X^3 + 2X - 3$

$3X^4 - 9X^3 + 6X - 9$

(am înmulțit polinomul $f$ cu 3).

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
6X^6 & & -14X^4 & +6X^3 & & -14X & 6X^4-9X^3+6X-9 \\
\cline{7-7}
-6X^6 & +9X^5 & & -6X^3 & +9X^2 & & X^2+\frac{3}{2}X-\frac{1}{12} \\
\cline{1-6}
 & 9X^5 & -14X^4 & & +9X^2 & -14X & \\
 & -9X^5 & +\frac{27}{2}X^4 & & -9X^2 & +\frac{27}{2}X & \\
\cline{1-6}
 & & -\frac{X^4}{2} & & & -\frac{X}{2} & \\
 & & \frac{X^4}{2} & -\frac{3}{4}X^3 & & +\frac{X}{2}-\frac{3}{4} & \\
\cline{1-6}
 & & & -\frac{3}{4}X^3 & & -\frac{3}{4} &
\end{array}
$$

(am înmulțit polinomul $3X^6-7X^4+3X^6-7X$ cu 2, iar polinomul $-14X^4+$ $+21X^3-14X+21$ cu $-\frac{3}{7}$).

$$
\begin{array}{rrrr|l}
6X^4 & -9X^3 & +6X & -9 & X^3+1 \\
\cline{5-5}
-6X^4 & & -6X & & 6X-9 \\
\cline{1-4}
 & -9X^3 & & -9 & \\
 & +9X^3 & & +9 & \\
\cline{1-4}
 & - & & - &
\end{array}
$$

am înmulțit polinomul $-\frac{3}{4}X^3-\frac{3}{4}$ cu $-\frac{4}{3}$). Cel mai mare divizor comun este ultimul rest diferit de zero deci $X^3+1$. Analog pentru celelalte puncte.

**I. 9.32**[M]**.** Dacă $d$ este un cel mai mare divizor comun al polinoamelor $f$ și $g$ și $h$ este un polinom nenul, să se arate că $dh$ este un cel mai mare divizor comun al polinoamelor $fh$ și $gh$.

**R.** Conform teoremei citată în rezolvarea problemei I. 9.29, există polinoamele $u$ și $v$ astfel încît $fu+gv=d$, deci $(fh)u+(gh)v=dh$ de unde rezultă afirmația enunțului.

**I. 9.33**[M]**.** Să se determine $A$ și $B$ astfel încît polinomul $f=AX^{n+2}+$ $+BX^n+2$ să fie divizibil cu polinomul $g=(X-1)^2$.

**R.** Potrivit teoremei împărțirii cu rest, există polinomul $Q$ astfel ca:

$$Ax^{n+2}+Bx^n+2=(x-1)^2Q(x).$$

Făcînd $x=1$ rezultă $A+B+2=0$ deci $B=-2-A$ astfel polinomul dat devine:

$$AX^{n+2}-(2+A)X^n+2=AX^n(X^2-1)-2(X^n-1)=$$
$$=AX^n(X-1)(X+1)-2(X-1)(X^{n-1}+X^{n-2}+\ldots+X+1)=$$
$$=(X-1)[AX^n(X+1)-2(X^{n-1}+X^{n-2}+\ldots+X+1)].$$

25.04.91 OK ! Dnyto

Rezultă că polinomul $AX^n(X+1) - 2(X^{n-1}+X^{n-2}+\ldots+X+1)$ se divide cu polinomul $X-1$ deci există polinomul $T$ astfel ca:

$$Ax^n(x+1) - 2(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1) = (x-1)(T(x)$$

Făcînd $x = 1$ găsim $2A - 2n = 0$, deci $A = n$, de unde $B = -2 - n$.

**I. 9.34^M.** Să se arate că polinoamele $f$ şi $g$ sînt prime între ele:

a). $f = 3x^3 - 2X^2 + X + 2$, $g = X^3 - 2X^2 + 2X - 1$;

b). $f = X^4 - X^3 - 4X^2 + 4X + 1$, $g = X^3 - 3X^2 + 1$;

c). $f = X^5 - 5X^4 - 2X^3 + 12X^2 - 2X + 12$, $g = X^3 - 5X^2 - 3X + 17$.

**R.** Se aplică algoritmul lui EUCLID.

1324 1/114

**I.9.35^M.** Aplicînd teorema lui BÉZOUT, să se determine parametrii $a$ şi $b$ astfel încît polinomul $f = X^4 - 4X^3 + 4X^2 + aX + b$ să se dividă cu polinomul $X^2 - 4X + 3$. Să se determine apoi cîtul împărţirii.

**R.** Avem $X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$ deci $f$ se divide şi cu $X-1$ şi cu $X-3$, deci $f(1) = 0$, $f(3) = 0$. Aceste două relaţii devin $a + b + 1 = 0$, $3a + b + 9 = 0$, sistem cu soluţiile $a = -4$, $b = 3$. Deci $f = X^4 - 4X^3 + 4X^2 - 4X + 3$, iar cîtul se determină cu schema:

$$\begin{array}{rl|l}
X^4 - 4X^3 + 4X^2 - 4X + 3 & & X^2 - 4X + 3 \\ \cline{3-3}
-X^4 + 4X^3 - 3X^2 \phantom{- 4X + 3} & & X^2 + 1 \\ \cline{1-1}
X^2 - 4X + 3 & & \\
-X^2 + 4X - 3 & & \\ \cline{1-1}
/ \quad / \quad / & &
\end{array}$$

**I.9.36^M.** Să se determine rădăcinile polinomului $f = X^3 - 3X^2 + 2X + 6$ ştiind că are rădăcina $\alpha = 1$.

**R.** Avînd rădăcina $\alpha = -1$, polinomul $f$ se divide, conform teoremei lui BÉZOUT, cu $X - \alpha = X + 1$. Avem schema:

$$\begin{array}{r|l}
X^3 - 3X^2 + 2X + 6 & X + 1 \\ \cline{2-2}
-X^3 - X^2 \phantom{+ 2X + 6} & X^2 - 4X + 6 \\ \cline{1-1}
-4X^2 + 2X + 6 & \\
+4X^2 + 4X \phantom{+ 6} & \\ \cline{1-1}
6X + 6 &
\end{array}$$

deci celelalte două rădăcini sînt date de ecuaţia $x^2 - 4x + 6 = 0$ care are rădăcinile $\beta = 4 + \frac{\sqrt{4^2 - 4 \cdot 6}}{2} = 2 + i\sqrt{2}$, $\gamma = 4 - \frac{\sqrt{4^2 - 4 \cdot 6}}{2} = 2 - i\sqrt{2}$.

**I.9.37^M.** Să se determine parametrul $m$ şi apoi să se afle rădăcinile polinomului $f = X^3 - 6X^2 + 8X + m$ ştiind că are rădăcina $\alpha = 2$.

**R.** Potrivit teoremei lui BÉZOUT, $f(2) = 0$, deci $2^3 - 6 \cdot 6^2 + 8 \cdot 2 + m = 0$, de unde $m = 0$. Deci $f = X^3 - 6X^2 + 8X = X(X^2 - 6X + 8)$. Celelalte două rădăcini sînt date de ecuaţia $x^2 - 6x + 8 = 0$, adică $\beta = 2$, $\gamma = 4$.

**I. 9.38^M^.** Să se determine parametrii $a$ și $b$ știind că polinomul $f = X^4 - 5X^3 + 8X^2 + aX + b$ are rădăcina dublă $\alpha = 1$.

**R.** Avem schema:

$$\begin{array}{rr|l}
 & X^4 - 5X^3 + 8X^2 + aX + b & X^2 - 2X + 1 \\ \cline{3-3}
 & -X^4 + 2X^3 - X^2 \phantom{+ aX + b} & X^2 - 3X + 1 \\ \cline{1-2}
 & -3X^3 + 7X^2 + aX + b & \\
 & +3X^3 - 6X^2 + 3X \phantom{+ b} & \\ \cline{1-2}
 & X^2 + (a+3)X + b & \\
 & -X^2 + 2X - 1 & \\ \cline{1-2}
 & (a+5)\,X + b - 1 &
\end{array}$$

Punînd condiția ca restul să fie nul, rezultă $a = -5$, $b = 1$.

**I. 9.39^M^.** Să se determine ecuația de gradul cel mai mic care are ca rădăcini numerele $1, 2, -2$.

**R.** Ecuația căutată este $(x-1)(x-2)(x+2) = 0$.

**I. 9.40^M^.** Să se determine ecuația de gradul cel mai mic care are rădăcina triplă 1 și rădăcinile simple 2 și $-3$.

**R.** Ecuația căutată este $(x-1)^3(x-2)(x+3) = 0$.

**I. 9.41^M^.** Să se găsească cel mai mare divizor comun al polinoamelor $f$ și $g$:

a). $f = (X-1)^5(X+1)^3(X-3)^2(X-4)$, $g = (X-1)^3(X+1)^2(X-4)^5$;

b). $f = (X^2-1)^2(X^3-1)(X-2)$, $g = (X-1)^4(X-2)^5$;

c). $f = (X^4-1)(X^2-1)(X+3)^2$, $g = (X^2+1)^2(X+3)^4(X-1)$.

**R.** a) Evident $(f, g)_* = (X-1)^3(X+1)^2(X-4)$.

b) Avem $f = (X-1)^2(X+1)^2(X-1)(X^2+X+1)(X-2) = (X-1)^3(X+1)^2(X^2+X+1)(X-2)$, deci $(f, g)_* = (X-1)^3(X-2)$.

c). Avem $f = (X^2-1)(X^2+1)(X-1)(X+1)(X+3)^2 = (X-1)^2(X+1)(X^2+1)(X+3)^2$ deci $(f, g)_* = (X^2+1)(X+3)^2(X-1)$.

**I.9.42^M^.** Să se arate că două polinoame nenule $f$ și $g$ din $\mathbb{C}[X]$ sînt prime între ele dacă și numai dacă nu au nici o rădăcină comună.

**R.** Presupunem că $f$ și $g$ sînt prime și au o rădăcină comună $\alpha$. Există atunci polinoamele $u$ și $v$ astfel ca $uf + vg = 1$ și potrivit teoremei lui BÉZOUT $(X-\alpha) \mid f$, $(X-\alpha) \mid g$ deci $(X-\alpha) \mid uf + vg$, deci $(X-\alpha) \mid 1$, absurd. Deci $f$ și $g$ nu au nici o rădăcină comună.

Reciproc, să presupunem că $f$ și $g$ nu au nici o rădăcină comună. Dacă $f$ și $g$ n-ar fi prime între ele, ar exista polinomul $d \neq 1$ așa ca $d \mid f$ și $d/g$. Dar, potrivit teoremei fundamentale a algebrei, $d$ are cel puțin o rădăcină complexă, fie acesta $\beta$, deci $(X-\beta) \mid d$ și cum $d \mid f$, $d \mid g$, rezultă, folosind proprietatea de tranzitivitate a relației de divizibilitate, că $(X-\beta) \mid f$, $(X-\beta) \mid g$ deci, potrivit teoremei lui BÉZOUT, $f(\beta) = g(\beta) = 0$, adică $f$ și $g$ au o rădăcină comună, contrar ipotezei. Deci $f$ și $g$ sînt prime între ele.

**I.9.43^M^.** Dacă $f, g \in \mathbb{C}[X]$ au același grad, atunci $f$ și $g$ au aceleași rădăcini dacă și numai dacă polinoamele $f$ și $g$ au coeficienții proporționali.

**R.** Se știe (v. Manual X, algebră, p. 133, consecința 7.3.4) că dacă $= a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ este un polinom cu coeficienți complecşi în care $a_n \neq 0$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, atunci $f$ se descompune în mod unic sub forma $f = a_n(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n)$.

Deoarece $f$ şi $g$ au aceleaşi rădăcini putem scrie $g = b_n(X - x_1)(X - x_2) - \ldots (X - x_n)$ şi, evident, cum:

$$(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n) = \frac{a_0}{a_n} + \frac{a_1}{a_n} X + \frac{a_2}{a_n} X^2 + \ldots + X^n$$

rezultă $g = \frac{b_n a_0}{a_n} + \frac{b_n a_1}{a_n} X + \frac{b_n a_2}{a_n} X^2 + \ldots + b_n X^n$, deci $f$ şi $g$ au coeficienţi proporţionali. Reciproca este evidentă.

**I.9.44^M.** Aplicînd teorema D'ALEMBERT — GAUSS să se arate că dacă $f \in \mathbb{C}[X]$ este un polinom de grad $\geqslant 2$, atunci funcţia polinomială asociată $\tilde{f}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\tilde{f}(\alpha) = f(\alpha)$ nu este injectivă, dar este surjectivă.

**R.** Evident, $f$ nu este injectivă căci, de exemplu, ecuaţia $\tilde{f}(x) = 0$ are $n$ rădăcini complexe, iar dacă două dintre ele sînt diferite, rezultă enunţul. Dacă $\tilde{f}(x) = (x - a)^n$, atunci ecuaţia $\tilde{f}(x) = 1$ are $n$ rădăcini complexe şi există două diferite căci $x_k = a + \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$, $k \in \overline{0, n-1}$ şi, de exemplu, $x_0 \neq x_1$.

Funcţia $\tilde{f}$ este surjectivă căci luînd un $\alpha \in \mathbb{C}$, ecuaţia $\tilde{f}(x) = \alpha$ este ecuaţie polinomială de grad $n$ cu $n$ rădăcini complexe.

**I.9.45^M.** Fie $f$ şi $g$ două polinoame din $\mathbb{C}[X]$. Să se arate că funcţiile polinomiale $\tilde{f}, \tilde{g}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sînt egale dacă şi numai dacă polinoamele $f$ şi $g$ sînt egale.

**R.** Presupunem că $\tilde{f}, \tilde{g}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sînt egale. Fie:

$\tilde{f}(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n+1} + \ldots + a_n$, $\tilde{g}(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$, cu $a_0 b_0 \neq 0$.

Presupunînd $n \neq m$, rezultă $\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x) = a_0 x^n + \ldots + a_n - b_m = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{C}$ (am luat $n > m$) ceea ce este fals căci ecuaţia $a_0 x^n + \ldots + a_n - b_m = 0$ are exact $n$ rădăcini complexe. Deci $n = m$ şi, de asemenea, $a_0 = b_0$. Presupunînd $a_1 \neq b_1$, rezultă $\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x) = (a_1 - b_1)x^{n-1} + \ldots + a_n - b_n = 0$, $(\forall) x \in \mathbb{C}$, absurd, căci ecuaţia anterioară are exact $n$ rădăcini complexe. Deci $a_1 = b_1$, şi, mai departe, $a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$. Deci $f = g$.

Reciproca este evidentă.

**I.9.46^M.** Dacă $f$ este un polinom arbitrar, să se arate că $f \circ f - f$ este divizibil prin $f - X$.

**R.** Fie $f = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n$ polinomul dat. Atunci $f \circ f = a_0 f^n + a_1 f^{n-1} + \ldots + a_n$ şi $f \circ f - f = a_0(f^n - X^n) + a_1(f^{n-1} - X^{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(f - X)$ şi cum $(f^n - X^n) : (f - X)$ rezultă afirmaţia

**I. 9.47^M.** Folosind teorema lui BÉZOUT să se arate că:

a) Polinomul $f = (X + 1)^{6n+1} + X^{6n+2}$ se divide la $X^2 + X + 1$;

b) Polinomul $f = (X - 1)^{n+2} - X^{2(n-1)}$ se divide la $X^2 - X + 1$;

c) Polinomul $f = (X + 1)^{3n+2} + X + 2$ se divide la $X^2 + 3X + 3$;

d) Polinomul $f = (X^2 + 1)^{6n+2} + X^4 + 1$ se divide la $X^2 + X + 1$;

e) Polinomul $f = X^{6n+2} + X^{3n+4} + 1$ se divide la $X^2 + X + 1$;

f) Polinomul $f = (X + 1)^{12n+1} + X^{3n+1}$ se divide la $X^2 + X + 1$.

**R.** a). Fie $\alpha$ o rădăcină a polinomului $X^2 + X + 1$ (evident, rădăcinile acestui polinom sînt diferite) deci $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ şi încă, prin înmulţirea acestei relaţii cu $\alpha - 1$, $\alpha^3 - 1 = 0$, adică $\alpha^3 = 1$. Avem atunci $f(x) = (\alpha + 1)^{6n+1} + \alpha^{6n+2} = (-\alpha^2)^{6n+1} + \alpha^{6n} \cdot \alpha^2 = (-1)^{6n+1}\alpha^{12n+2} + (\alpha^3)^{2n} \cdot \alpha^2 = -(\alpha^3)^{4n} \cdot \alpha^2 + 1^{2n} \cdot \alpha^2 = -1^{4n} \cdot 1 \cdot \alpha^2 + \alpha^2 = 0$. Deci $f$ se divide, în baza teoremei lui BÉZOUT, cu $X - \alpha$. Dar $\alpha$ poate fi oricare din rădăcinile $\alpha_1$ şi $\alpha_2$ ale polinomului $X^2 + X + 1$ deci $f$ se divide cu $X - \alpha_1$ şi $X - \alpha_2$ deci cu $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) = X^2 + X + 1$.

b) Fie $\alpha$ o rădăcină a polinomului $X^2 - X + 1$ ($\alpha_1 \neq \alpha_2$) deci $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$ şi, prin înmulţire cu $\alpha + 1$, $\alpha^3 + 1 = 0$, deci $\alpha^3 = -1$. Avem $f(\alpha) = (\alpha - 1)^{n+2} - \alpha^{2(n-1)} = (\alpha^2)^{n+2} - \alpha^{2n-2} = \alpha^{2n+4} - \dfrac{\alpha^{2n}}{\alpha^2} = \dfrac{\alpha^{2n}(\alpha^6 - 1)}{\alpha^2} = \dfrac{\alpha^{2n}[(-1)^2 - 1]}{\alpha^2} = 0$. Deci $f$ se divide cu $X - \alpha_1$ şi $X - \alpha_2$ deci cu $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) = X^2 - X + 1$.

c) Fie $\alpha$ una din rădăcinile polinomului $X^2 + 3X + 3$ ($\alpha_1 \neq \alpha_2$) deci $\alpha^2 + 3\alpha + 3 = 0$. Avem $f(\alpha) = (\alpha + 1)^{3n+2} + \alpha + 2 = (\alpha + 1)^{3n}(\alpha + 1)^2 + \alpha + 2 = (\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1)^n(\alpha^2 + 2\alpha + 1) + \alpha + 2 = [\alpha(\alpha^2 + 3\alpha + 3) + 1]^n(\alpha^2 + 2\alpha + 1) + \alpha + 2 = (\alpha \cdot 0 + 1)^n(\alpha^2 + 2\alpha + 1) + \alpha + 2 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 + \alpha + 2 = \alpha^2 + 3\alpha + 3 = 0$ deci $f$ se divide la $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) = X^2 + 3X + 3$.

d) Fie $\alpha$ una din rădăcinile polinomului $X^2 + X + 1$, deci $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ şi $\alpha^3 = 1$. Avem $f(x) = (\alpha^2 + 1)^{6n+2} + \alpha^4 + 1 = (-\alpha)^{6n+2} + \alpha^3 \cdot \alpha + 1 = \alpha^{6n} \cdot \alpha^2 + \alpha + 1 = (\alpha^3)^{2n} \cdot \alpha^2 + \alpha + 1 = 1^{2n} \cdot \alpha^2 + \alpha + 1 = \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. Deci $f$ se divide la $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) = X^2 + X + 1$.

e) Fie $\alpha$ una din rădăcinile polinomului $X^2 + X + 1$, deci $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ şi $\alpha^3 = 1$. Avem $f(\alpha) = \alpha^{6n+5} + \alpha^{3n+4} + 1 = (\alpha^3)^{2n} \cdot \alpha^5 + (\alpha^3)^n \cdot \alpha^4 + 1 = 1^{2n} \cdot \alpha^3 \cdot \alpha^2 + 1^n \cdot \alpha^3 \cdot \alpha + 1 = \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ deci $f$ se divide cu $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) = X^2 + X + 1$, $\alpha_1$ şi $\alpha_2$ fiind rădăcinile (diferite) ale polinomului $X^2 + X + 1$.

f). Analog ca în exerciţiile precedente, $f(\alpha) = (\alpha + 1)^{12n+2} + \alpha^{3n+1} = (-\alpha)^{12n+2} + (\alpha^3)^n \cdot \alpha = -(\alpha^3)^{4n} \cdot \alpha + 1^n \cdot \alpha = -\alpha + \alpha = 0$.

**I.9.48**[M]. Fie ecuaţia $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ avînd rădăcinile $x_1, x_2, x_3$. Să se determine ecuaţia care are rădăcinile $y_1, y_2, y_3$ dacă:

a) $y_1 = 3x_1 + x_2 + x_3$, $y_2 = 3x_2 + x_1 + x_3$, $y_3 = 3x_3 + x_1 + x_2$;

b) $y_1 = \dfrac{1}{2}x_1$, $y_2 = \dfrac{1}{2}x_2$, $y_3 = \dfrac{1}{2}x_3$;

c) $y_1 = -x_1 + x_2 + x_3$, $y_2 = -x_2 + x_1 + x_3$, $y_3 = -x_3 + x_1 + x_2$;

d) $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$, $y_3 = x_3^2$;

e) $y_1 = x_1 + x_2x_3$, $y_2 = x_2 + x_1x_3$, $y_3 = x_3 + x_1x_2$.

**R.** Conform relaţiilor lui VIÉTE:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a,$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b,$$
$$x_1x_2x_3 = -c.$$

a) *Soluţia I.* Avem $y_i = x_1 + x_2 + x_3 + 2x_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$ deci $y_i = -a + 2x_i$. Avem, succesiv:

$$y_1 + y_2 + y_3 = -a + 2x_1 - a + 2x_2 - a + 2x_3 = -3a + 2(x_1 + x_2 + x_3) = -3a - 2a = -5a;$$

$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = (-a + 2x_1)(-a + 2x_2) + (-a + 2x_1)(-a + 2x_3) +$

$$+(-a+2x_2)(-a+2x_3) = 3a^2 - 4a(x_1 + x_2 + x_3)+4(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) =$$
$$= 3a^2 - 4a(-a) + 4b = 7a^2 + 4b$$
$$y_1y_2y_3 = (-a+2x_1)(-a + 2x_2)(-a + 2x_3) = -a^3 + 2a^2(x_1 + x_2+x_3) -$$
$$- 4a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + 8x_1x_2x_3 = -3a^2 - 4ab - 8c.$$

Ecuaţia căutată este deci :

$$y^3 - (y_1 + y_2 + y_3)y^2 + (y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3)y - y_1y_2y_3 = 0$$

adică :

$$y^3 + 5ay^2 +(7a^2 + 4b)y + 3a^3 + 4ab + 8c = 0. \tag{1}$$

*Soluţia a II-a.* Relaţiile $y_i = -a + 2x_i$, $i = 1, 3$, ne arată că putem face substituţia $x = \dfrac{y+a}{2}$ care înlocuită în ecuaţia din enunţ conduce la ecuaţia :

$$\left(\frac{y+a}{2}\right)^3 + a\left(\frac{y+a}{2}\right)^2 + b\left(\frac{y+a}{2}\right) + c = 0$$

adică, după calcule, tocmai ecuaţia (1).

b) Cu substituţia $y = \dfrac{x}{2}$, deci $x = 2y$, ecuaţia devine :

$$8y^3 + 4ay^2 + 2by + c = 0,$$

adică tocmai ecuaţia căutată.

c) Relaţia $y_1 = -x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + x_2 + x_3 - 2x_1 = -a - 2x_1$ ne arată că putem face substituţia $y = -a - 2x$, adică $x = -\dfrac{y+a}{2}$.

Obţinem deci ecuaţia :

$$\left(-\frac{y+a}{2}\right)^3 + a\left(-\frac{y+a}{2}\right)^2 + b\left(-\frac{y+a}{2}\right) + c = 0$$

sau, după calcule :

$$y^3 + ay^2 + (4b - a^2)y - 3a^3 + 4ab - 8c = 0.$$

??

d) Cu substituţia $y = x^2$ obţinem :

$$x^3 + ax^2 + bx + c = x \cdot x^2 + ax^2 + bx + c = xy + ay + bx + c = 0.$$

De aici, $x(y + b) = -ay - c$ deci $x = \dfrac{-ay-c}{y+b}$ sau $y = x^2 = \left(\dfrac{-ay-c}{y+b}\right)^2$, deci :

$$y(y + b)^2 - (ay + b)^2 = 0. \quad \text{?!??!!}$$

e) Relaţia $y_1 = x_1 + x_2x_3 = x_1 + \dfrac{x_1x_2x_3}{x_1} = \boxed{x_1 - \dfrac{c}{x_1}}$ conduce la substituţia $y = x - \dfrac{c}{x}$. Obţinem ecuaţia :

$$y^3 - (-a + b)y^2 + (b + ac - ab + 3c)y - c(-c + c^2 + b^2 - 2ab +$$
$$+ a^2c - 2bc) = 0.$$

**I.9.49**[M]. Să se determine parametrul $m$ astfel ca o rădăcină a ecuației $x^3 - 28x + m = 0$ să fie dublul altei rădăcini.

**R.** Fie $x_1, x_2, x_3$ rădăcinile ecuației date. Prin ipoteză $x_1 = 2x_2$ deci $x_2^3 - 28x_2 + m = 0$ și $8x_2^3 - 56x_2 + m = 0$. Prin scăderea celor două ecuații obținem $7x_2^3 - 28x_2 = 0$ de unde $x_2 = 0$ sau $x_2 = 2$ sau $x_2 = -2$. Soluția $x_2 = 0$ nu convine căci conduce la $0^3 - 28 \cdot 0 + m = 0$ adică $m = 0$ și ecuația are soluțiile $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ dar condiția $x_1 = 2x_2$ nu este îndeplinită. Pentru $x_2 = 2$ obținem $m = 48$ și rezultă ecuația $x^3 - 28x + 48 = 0$ cu soluțiile $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = -6$.

Pentru $x_2 = -2$ rezultă $m = -48$ cu soluțiile $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 6$.

**I.9.50**[M] Să se determine $\lambda$ astfel încît suma a două rădăcini ale ecuației $2x^3 - 4x^2 - 7x + \lambda = 0$ să fie egală cu 1.

**R.** Cum $x_1 + x_2 = 1$ și, potrivit relațiilor lui VIÉTE, $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, rezultă $x_3 = 1$. Deci $2 - 4 - 7 + \lambda = 0$ deci $\lambda = 9$. Rezultă $x_1 = \dfrac{1 + \sqrt{19}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{19}}{2}$.

**I.9.51**[M]. Să se determine relația între $p$ și $q$ complexe astfel încît rădăcinile $x_1, x_2, x_3$ ale ecuației $x^3 + px + q = 0$ să se găsească în relația $x_3 = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$. Dacă $p = q$ și $p \in \mathbb{R} - \{0\}$, să se arate că, condiția din enunț nu poate fi îndeplinită.

**R.** Relația devine $x_3 = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 - x_3}{x_1x_2} = \dfrac{-x_3}{x_1x_2}$ de unde, sau $x_3 = 0$, sau $x_1x_2 = -1$. Dacă $x_3 = 0$, atunci $q = 0$ și obținem $x_1 = \sqrt{-p}$, $x_2 = -\sqrt{-p}$. Dacă $x_3 \neq 0$, deci $x_1x_2x_3 = -x_3$ rezultă $x_3 = q$ deci $q^3 + pq + q = 0$.

Dacă $p = q$, relația de mai sus devine $p^3 + p^2 + p = 0$, adică $p(p^2 + p + 1) = 0$, și cum $p = 0$ avem $p^2 + p + 1 = 0$ care nu este satisfăcută pentru $p \in \mathbb{R}$.

**I.9.52**[M]. Să se rezolve ecuațiile algebrice:

a) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 6 = 0$,

?! b) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0$, — greșit -

c) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 3 = 0$,

știind că suma a două rădăcini este egală cu suma celorlalte două rădăcini.

**R.** a) Avem relațiile lui VIÉTE:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \tag{1}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 5, \tag{2}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 2, \tag{3}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = -6, \tag{4}$$

și condiția din ipoteză $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. Din relația (1) și relația anterioară rezultă $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 2$. Relația a doua se mai poate scrie:

$$\underbrace{(x_1 + x_2)}_{2} \cdot \underbrace{(x_3 + x_4)}_{2} + x_1x_2 + x_3x_4 = 5$$

$= 4$

de unde $x_1x_2 + x_3x_4 = 1$. Avînd în vedere și relația (4), rezultă că $x_1x_2$ și $x_3x_4$ sînt rădăcinile ecuației $z^2 - z - 6 = 0$, cu soluțiile $z_1 = +3$, $z_2 = -2$. Deci $x_1x_2 = +3$, $x_1 + x_2 = 2$, $x_3x_4 = -2$, $x_3 + x_4 = 2$ (celelalte cazuri, $x_1x_3 = -2$, $x_3x_4 = +3$ conduc la aceleași soluții). obținem $x_1 = 1 + i\sqrt{2}$, $x_2 = 1 - i\sqrt{2}$, $x_3 = 1 + \sqrt{3}$, $x_4 = 1 - \sqrt{3}$.

b) În mod analog, rezultă rădăcinile $x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 1 - 2i$, $x_3 = -2 + i$, $x_4 = -2 - i$.

c) Avem $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2}$, $x_4 = \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2}$.

**I. 9.53**[M] Să se rezolve ecuațiile algebrice:

$$4x^3 - 12x^2 + 11x - 3 = 0, \quad x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$

știind că rădăcinile sale sînt în progresie aritmetică.

**R.** Rădăcinile $x_1, x_2, x_3$ fiind în progresie aritmetică avem $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$, și cum $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ rezultă $x_2 = \frac{3 - x_2}{2}$ deci $x_2 = 1$. Rădăcinile $x_1$ și $x_2$ sînt date de cîtul împărțirii $(4X^3 - 12X^2 + 11X - 3) : (X - 1)$ adică de ecuația $4x^2 - 8x + 3 = 0$ deci $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{2}$ Rația este

$$r = \frac{1}{2}.$$

Pentru a doua ecuație, $x_1 + x_2 + x_3 = -3$ care împreună cu relația $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$ conduce la $x_2 = -1$. Soluțiile $x_1$ și $x_3$ sînt date de ecuația $(x^3 + 3x^2 - x - 3) : (x + 1) = x^2 + 2x - 3 = 0$ cu rădăcinile $x_1 = +1$, $x_3 = -3$.

**I. 9.54**[M]. Dacă $x_1, x_2, x_3$ sînt rădăcinile polinomului $X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3$ să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ și $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

**R.** Avem, potrivit relațiilor lui VIÈTE, $x_1 + x_2 + x_3 = -a_1$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a_2$, deci $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = a_1^2 - 2a_2$. Pentru calculul lui $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$ scriem că $x_1, x_2, x_3$ verifică ecuația $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$:

$$x_1^3 + a_1x_1^2 + a_2x_1 + a_3 = 0; \quad (1)$$

$$x_2^3 + a_1x_2^2 + a_2x_2 + a_3 = 0; \quad (2)$$

$$x_3^3 + a_1x_3^2 + a_2x_3 + a_3 = 0. \quad (3)$$

Adunînd cele trei relații obținem $S_3 + a_1S_2 + a_2S_1 + 3a_3 = 0$, unde $S_k \overset{\text{not}}{=} x_1^k + x_2^k + x_3^k$. De aici $S_3 = -a_1S_2 - a_2S_1 - 3a_3 = -a_1^3 + 3a_1a_2 - 3a_3$. Înmulțind relația (1) cu $x_1$, relația (2) cu $x_2$ și relația (3) cu $x_3$ obținem:

$$x_1^4 + a_1x_1^3 + a_2x_1^2 + a_3x_1 = 0 \quad (1')$$

$$x_2^4 + a_1x_2^3 + a_2x_2^2 + a_3x_2 = 0 \quad (2')$$

$$x_3^4 + a_1x_3^3 + a_2x_3^2 + a_3x_3 = 0 \quad (3')$$

Adunînd aceste din urmă relații, membru cu membru, obținem:

$$S_4 + a_1S_3 + a_2S_2 + a_3S_1 = 0$$

de unde $S_4 = -a_1S_3 - a_2S_2 - a_3S_1 = a_1^4 - 4a_1^2a_2 + 4a_1a_3 + 2a_2^2.$

23/115 **I. 9.55**[M]. Fie ecuația $x^3 + 3x + 1 = 0$. Să se determine ecuația de gradul al treilea care are rădăcinile $y_1, y_2, y_3$ date de formulele:

a) $y_1 = \dfrac{x_2 + x_3}{x_1}, \quad y_2 = \dfrac{x_3 + x_1}{x_2}, \quad y_3 = \dfrac{x_1 + x_2}{x_3};$

b) $y_1 = \dfrac{x_2x_3}{x_1} + 1, \quad y_2 = \dfrac{x_1x_3}{x_2} + 1, \quad y_3 = \dfrac{x_1x_2}{x_3} + 1;$

c) $y_1 = 1 + \dfrac{1}{x_1^2}, \quad y_2 = 1 + \dfrac{1}{x_2^2}, \quad y_3 = 1 + \dfrac{1}{x_3^2}.$

**R.** a) Cum $y_1 = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 - x_1}{x_1} = -1$ și, analog, $y_2 = -1$, $y_3 = -1$, ecuația căutată este $(y + 1)^3 = 0$ sau $y^3 + 3y^2 + 3y + 1 = 0$.

b) Ecuația căutată este $y^3 + 6y^2 - 21y + 15 = 0$.

22/115 **I. 9.56**[M]. Să se arate că 1 este o rădăcină dublă pentru polinomul:

$$f = X^{3n} - nX^{n+2} + nX^{n-1} - 1.$$

**R.** Evident, $f(1) = 1 - n + n - 1 = 0$. De asemenea:

$$f = (X^{3n} - 1) - nX^{n-1}(X^3 - 1) = (X - 1)(X^{3n-1} + X^{3n-2} + \dots + 1) - nX^{n-1}(X - 1)\cdot(X^2 + X + 1) = (X - 1)\,[X^{3n-1} + X^{3n-2} + \dots + 1 - nX^{n-1}(X^2 + X + 1)].$$

Avem, notînd $g = X^{3n-1} + X^{3n-2} + \dots + 1 - nX^{n-1}(X^2 + X + 1)$, că $g(1) = \underbrace{1 + \dots + 1}_{3n \text{ ori}} - n(1 + 1 + 1) = 0$ deci $g \;\vdots\; X - 1$, deci $f \;\vdots\; (X - 1)^2$.

**I. 9.57**[M]. Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii 2 pentru polinomul $X^6 - 6X^5 + 12X^4 - 9X^3 + 6X^2 + 12X + 8$.

**R.** Se constată, făcînd împărțiri succesive că polinomul dat se divide la $(X - 2)^3$ și nu se divide la $(X - 2)^4$, deci ordinul de multiplicitate este 3.

**I. 9.58**[M]. Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii $-1$ pentru polinomul $X^5 + 6X^4 + 14X^3 + 16X^2 + 9X + 2$ și apoi să se afle rădăcinile polinomului dat.

**R.** Prin împărțiri succesive, se constată că $-1$ are ordinul de multiplicitate 4. Prin împărțirea polinomului cu $(X + 1)^4$ obținem cîtul $X + 2$.

**I. 9.59**[M]. Să se rezolve ecuațiile bipătrate:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; b) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$; c) $x^4 - (1 + \sqrt{2})x^2 + \sqrt{2} = 0$; d) $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$; e) $x^4 - 6x^2 + 6 = 0$; f) $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$; g) $32x^4 - 12x^2 + 1 = 0$; h) $x^4 - 1 = 0$.

**R.** a) Notînd $x^2 = y$, obținem ecuația $y^2 - 10y + 9 = 0$, cu soluțiile $y_1 = 1$, $y_2 = 9$ care conduc la ecuațiile $x^2 = 1$, $x^2 = 9$ care dau $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$, $x_4 = -3$.

b) Notînd $x^2 = y$, obținem $y^2 - 17y + 16 = 0$ cu $y_1 = 16$, $y_2 = 1$ deci $x_1 = 4$, $x_2 = -4$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

c) Notînd $x^2 = y$, obținem ecuația $y^2 - (1 + \sqrt{2})y + \sqrt{2} = 0$ cu soluțiile $y_1 = 1$, $y_2 = \sqrt{2}$, deci $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \sqrt[4]{2}$, $x_4 = -\sqrt[4]{2}$.

d) Facem substituția $x^2 = y$ și obținem ecuația $y^2 - 4y + 1 = 0$ cu soluțiile $y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ astfel că obținem $x_1 = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$, $x_2 = -\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$, $x_3 = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$, $x_4 = -\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$.

e) Soluțiile sînt $x_1 = \sqrt{3 + \sqrt{3}}$, $x_2 = -\sqrt{3 + \sqrt{3}}$, $x_3 = -\sqrt{3 - \sqrt{3}}$, $x_4 = \sqrt{3 - \sqrt{3}}$.

f) Avem $x_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$, $x_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x_4 = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$.

g) Soluțiile sînt $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $x_4 = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

h) Avem $x_1 = i$, $x_2 = -i$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

**I. 9.60**[M]. Să se rezolve ecuațiile. ( în $\mathbb{C}$ ) $(\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C})$

a) $x^2 + \left(\dfrac{12}{x}\right)^2 = 40$; b) $\sqrt{2x^3 + 7x^2 - 5} = x^2 + x$; c) $\sqrt{x^2+3} = 4 - 2x^2$;

d) $x^2 - \left(\dfrac{6}{x}\right)^2 = 5$.

**R.** a) Cu substituția $x^2 = y$ ecuația devine $y + \dfrac{144}{y} = 40$ cu soluțiile $y_1 = 36$, $y_2 = 4$, deci $x_1 = 6$, $x_2 = -6$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$.

b) Prin ridicare la pătrat obținem ecuația $2x^3 + 7x^2 - 5 = x^4 + 2x^3 + x^2$ sau $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$ cu soluțiile $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \sqrt{5}$, $x_4 = -\sqrt{5}$.

c) Avem $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$, $x_4 = \dfrac{-\sqrt{13}}{2}$.

d) Avem $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = i\sqrt{12}$, $x_4 = -i\sqrt{12}$.

**I. 9.61.**[M] Să se formeze ecuația de gradul IV avînd ca rădăcini:

a) $x_1 = -4$, $x_2 = 4$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$;

b) $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_3 = -\dfrac{1}{6}$, $x_4 = \dfrac{1}{6}$;

c) $x_1 = -3i$, $x_2 = 3i$, $x_3 = -2i$, $x_4 = 2i$;

d) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -5$, $x_4 = 5$.

**R.** a) Ecuaţia este $(x-4)(x+4)(x-3)(x+3)=0$ sau $x^4-$ $-25x^2+144=0$;

b) Ecuaţia este $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x+\frac{1}{6}\right)=0$ sau $x^4-\frac{5}{18}x^2+\frac{1}{144}=0$;

c) Ecuaţia este $(x-3\mathrm{i})(x+3\mathrm{i})(x-2\mathrm{i})(x+2\mathrm{i})=0$ sau $x^4+13x^2+$ $+36=0$;

d) Ecuaţia este $(x-2)(x+2)(x-5)(x+5)=0$ sau $x^4-29x^2+$ $+100=0$.

**I. 9.62**[M]. Să se determine natura rădăcinilor ecuaţiilor:

a) $x^4-2(m-2)x^2-m^2=0$;

b) $4x^4+mx^2+9=0$;

c) $mx^4+4x^2+1=0,\ m\neq 0$;

d) $m^4x^4-2(2m^2+3)x^2+1=0$; $m\neq 0$;

e) $3x^4-5mx^2-2m^2=0$;

f) $x^2(2x^2+5)-m(x^2+3)=3$,

în funcţie de parametrul real $m$.

**R.** Facem în toate ecuaţiile substituţia $x^2=y$.

a) Ecuaţia dată devine $y^2-2(m-2)y-m^2=0$. Avem $y_1y_2=-m^2$, Dacă $m=0$ ecuaţia devine $y^2+4y=0$ cu soluţiile $y_1=0$, $y_2=-4$ care conduc la ecuaţiile $x^2=0$ şi $x^2=-4$ cu soluţiile $x_1=x_2=0$, $x_3=2\mathrm{i}$. $x_4=-2\mathrm{i}$. Dacă $m\neq 0$, atunci $y_1y_2<0$ deci ecuaţia în $y$ are o rădăcină strict pozitivă care conduce la două rădăcini reale, pentru ecuaţia în $x$ şi una negativă, care conduce la două rădăcini nereale. Totdeauna, $\Delta_y>0$

b) Ecuaţia devine $4y^2+my+9=0$. Avem $\Delta=m^2-144$. Dacă $m\in(-12,12)$, ecuaţia în $y$ nu are rădăcini reale, deci nici ecuaţia în $x$ nu are rădăcini reale. Dacă $m=-12$, ecuaţia în $y$ devine $(2y-3)^2=0$ cu soluţiile $y_1=y_2=+\frac{3}{2}$ care conduce, la rădăcini reale pentru ecuaţia în $x$: Dacă $m<-12$, cum $P_y=\frac{9}{4}$ rezultă că $y_1$ şi $y_2$ au acelaşi semn (şi sînt reale), iar $S_y=\frac{-m}{4}>0$ deci $y_1$ şi $y_2$ sînt strict pozitive şi conduc la 4 rădăcinile reale. Dacă $m=12$, ecuaţia în $y$ devine $(2y+3)^2=0$ cu soluţiile $y_1=y_2=-\frac{3}{2}$ care conduce la 4 rădăcini nereale pentru ecuaţia în $x$. Dacă $m>12$ atunci $S_y<0$ deci ecuaţia în $y$ are ambele rădăcini strict negative care conduc la 4 rădăcini nereale pentru ecuaţia în $x$.

c) Ecuaţia devine $my^2+4y+1=0$. Avem $\Delta y=4(4-m)$. Dacă $m>4$ atunci $\Delta_y<0$ deci ecuaţia în $y$ nu are rădăcini reale şi, cu atît mai mult, ecuaţia în $x$ nu are rădăcini reale. Dacă $m=4$, ecuaţia în $y$ devine $(2y+1)^2=0$, cu soluţiile $y_1=y_2=-\frac{1}{2}$ care conduc la rădăcini nereale pentru ecuaţia în $x$. Fie $m<4$. Atunci $\Delta_y>0$ şi $S_y=\frac{-4}{m}$, $P_y=\frac{1}{m}$.

Dacă $m \in (0, 4)$ atunci $P_y > 0$ deci $y_1$ şi $y_2$ au acelaşi semn, şi $S_y < 0$ deci ambele rădăcini sînt negative, deci ecuaţia în $x$ are 4 rădăcini nereale. Dacă $m < 0$, atunci $S_y > 0$, $P_y < 0$ deci ecuaţia în $y$ are o rădăcină pozitivă şi una negativă care conduc la două rădăcini reale şi două nereale pentru ecuaţia în $y$.

d) Ecuaţia devine $m^4y^2 - 2(2m^2 + 3)y + 1 = 0$ cu $\Delta_y = 4[3m^4 + 12m^2 + 9] > 0$, $(\forall)$ $m \in \mathbb{R}^*$. Cum $S_y = \frac{2(2m^2+3)}{m} > 0$, $P_y = \frac{1}{m^4} > 0$, $(\forall)$ $m \in \mathbb{R}^*$, rezultă că ecuaţia în $y$ are două rădăcini strict pozitive care conduc, pentru ecuaţia în $x$, la patru rădăcini reale.

e) Ecuaţia devine $3y^2 - 5my - 2m^2 = 0$ cu $\Delta_y = 49m^2 \geq 0$, $(\forall)$ $m \in \mathbb{R}$. Cum $P_y = \frac{-2m^2}{3} < 0$, cînd $m \in \mathbb{R}^*$, rezultă că ecuaţia în $y$ are o rădăcină strict pozitivă şi una strict negativă, care conduc, pentru ecuaţia în $x$, la două rădăcini reale şi două nereale. Dacă $m = 0$, ecuaţia în $x$ devine $3x^4 = 0$, cu soluţiile $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

f) Ecuaţia se mai poate scrie $2x^4 + (5 - m)x^2 - 3m - 3 = 0$, sau, cu substituţia $x^2 = y$, $2y^2 + (5 - m)y - 3m - 3 = 0$. Rezolvînd această ecuaţie, obţinem $y_1 = -3$, $y_2 = \frac{m+1}{2}$. Dacă $m + 1 < 0$, evident, ecuaţia în $x$ are patru rădăcini nereale, iar dacă $m + 1 \geq 0$, ecuaţia în $x$ are două rădăcini reale, $x_1 = +\sqrt{\frac{m+1}{2}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{m+1}{2}}$, şi două nereale, $x_3 = i\sqrt{3}$, $x_4 = -i\sqrt{3}$.

**I.9.63**[M] Să se rezolve ecuaţia $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, şi apoi să se aplice formulele găsite pentru cazurile particulare:

a) $x^6 + 15x^3 - 16 = 0$, b) $x^8 + 2x^4 - 3 = 0$;

c) $x^6 - 7x^3 + 6 = 0$; d) $x^8 + 12x^4 - 13 = 0$.

**R.** Notînd $x^n = y$, ecuaţia dată devine $ay^2 + by + c = 0$, cu rădăcinile $y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Scriem pe $y_1$ şi $y_2$ sub formă trigonometrică, $y_{1,2} = \rho_{1,2}(\cos \theta_{1,2} + i \sin \theta_{1,2})$. Evident, dacă $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \in \mathbb{R}$ (deci dacă $\Delta_y \geq 0$) atunci $\theta_{1,2} \in \{0, \pi\}$. Atunci, pentru ecuaţia în $x$ avem cazurile $x^n = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ deci $x_k = \sqrt[n]{\rho_1}\left(\cos \frac{\theta_1 + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta_1 + 2k\pi}{n}\right)$ şi $x_k' = \sqrt[n]{\rho_2}\left(\cos \frac{\theta_2 + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta_2 + 2k\pi}{n}\right)$, pentru ecuaţia:

$$x^n = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2).$$

Aici $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

a) Ecuaţia devine $y^2 + 15y - 16 = 0$ cu soluţiile $y_1 = 1$, $y_2 = -16$. Obţinem ecuaţiile $x^3 = 1$ şi $x^3 = -16$. Dar:

$$1 = \cos 0 + i \sin 0, \quad -16 = 16 (\cos \pi + i \sin \pi)$$

deci ecuațiile devin $x^3=1\,(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0)$, cu soluțiile $x_k=\sqrt[3]{1}\cos\left(\frac{0+2k\pi}{3}+\right.$ $\left.+\mathrm{i}\sin\frac{0+2k\pi}{2}\right)=\cos\frac{2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{3}$, $k\in\{0,1,2\}$, respectiv $x^3=$ $=16\,(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$, deci $x'_k=\sqrt[3]{16}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)$, $k\in\{0,1,2\}$. Obținem, așadar, numerotînd, soluțiile:

$$x_1=\cos 0+\mathrm{i}\sin 0=1,\quad x_2=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x_3=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\quad x_4=\sqrt[3]{16}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$x_5=-\sqrt[3]{16},\quad x_6=\sqrt[3]{16}\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

b) Ecuația rezolventă este $y^2+2y-3=0$, cu soluțiile $y_1=1$, care conduce la soluțiile $x_k=\cos\frac{2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{4}$, $k\in\overline{0,3}$, respectiv $y_2=-3$, care conduce la soluțiile $x'_k=\sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$, $k\in\overline{0,3}$.

c) Ecuația rezolventă este $y^2-7y+6=0$, cu soluțiile $y_1=1$, $y_2=6$. Obținem deci ecuațiile $x^3=1$, cu soluțiile:

$$x_k=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{0+2k\pi}{3}\right),\ k\in\overline{0,2},$$

respectiv $x^3=6$, cu soluțiile:

$$x'_k=\sqrt[3]{6}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{0+2k\pi}{3}\right),\ k\in\overline{0,2}.$$

d) Ecuația rezolventă este $y^2+12y-13=0$, cu soluțiile $y_1=1$, $y_2=-13$, care conduc la soluțiile $x_k=\cos\frac{2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{4}$, $k\in\overline{0,3}$,

$$x'_k=\sqrt[4]{13}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right),\ k\in\overline{0,3}.$$

**I.9.64$^{\mathrm{M}}$.** Să se rezolve ecuațiile de gradul III:

a) $5x^3+31x^2+31x+5=0$; b) $2x^3+3x^2+3x+2=0$;
c) $5x^3-31x^2+31x-5=0$; d) $2x^3-x^2+x-2=0$;
e) $x^3+4x^2+4x+1=0$; f) $3x^3+2x^2+2x+3=0$;
g) $x^3+x^2+x+1=0$; h) $2x^3+5x^2+5x+2=0$.

**R.** Ecuațiile, cu excepția lui c) d), sînt reciproce de grad impar, deci admit toate rădăcina $-1$. Ecuațiile c), d) admit rădăcina 1. Efectuînd împărţirile cu $X+1$, respectiv $X-1$, obţinem ecuaţiile: a) $5x^2+26x+5=0$; b) $2x^2+x+2=0$; c) $5x^2-26x+5=0$; d) $2x^2+x+2=0$; e) $x^2+3x+1=0$; f) $3x^2-x+3=0$; g) $x^2+1=0$; h) $2x^2+3x+2=0$.

Rezultă rădăcinile: a) $x_1=-1$, $x_2=-5$, $x_3=-\dfrac{1}{5}$; b) $x_1=-1, x_2=\dfrac{-1+i\sqrt{15}}{4}$, $x_3=\dfrac{-1-i\sqrt{15}}{4}$; c) $x_1=1$, $x_2=5$, $x_3=\dfrac{1}{5}$; d) $x_1=1$, $x_2=\dfrac{-1+i\sqrt{15}}{4}$, $x_3=\dfrac{-1-i\sqrt{15}}{4}$; e) $x_1=-1$, $x_2=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $x_3=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$; f) $x_1=-1$, $x_2=\dfrac{1+i\sqrt{35}}{6}$, $x_3=\dfrac{1-i\sqrt{35}}{6}$; g) $x_1=-1$, $x_2=i$, $x_3=-i$; h) $x_1=-1$, $x_2=\dfrac{-3+i\sqrt{7}}{4}$, $x_3=\dfrac{-3-i\sqrt{7}}{4}$.

**I.9.65**[M]. Să se determine relaţia între $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încît ecuaţia reciprocă de gradul III, $ax^3+bx^2+bx+a=0$ să aibă:

i) Două rădăcini egale; ii). Toate rădăcinile reale; iii) Două rădăcini nereale.

**R.** Ecuaţia fiind reciprocă de grad impar, admite rădăcina $x_1=-1$. Evident, presupunem $a \neq 0$. Rădăcinile $x_2$ şi $x_3$ vor fi date de ecuaţia $(ax^3+bx^2+bx+a):(x+1)=ax^2+(b-a)x+a=0$.

i) Sau rădăcina dublă este dată de ecuaţia $ax^2+(b-a)x+a=0$, deci $\Delta=(b-a)^2-4a^2=0$, adică $(b-3a)(b+a)=0$. Dacă rădăcina dublă este $-1$, ea trebuie să fie rădăcină a ecuaţiei $ax^2+(b-a)x+a=0$, adică $a-(b-a)+a=0$, deci $3a-b=0$. Dacă $b=3a$, ecuaţia devine $(x+1)^3=0$, cu rădăcina triplă $-1$; dacă $a=-b$, ecuaţia devine $(x+1)(x-1)^2=0$, cu rădăcina dublă 1.

ii) Pentru ca toate rădăcinile ecuaţiei date să fie reale, trebuie ca rădăcinile ecuaţiei $ax^2+(b-a)x+a=0$ să fie reale, adică $\Delta=(b-a)^2-4a^2=(b-3a)(b+a)\geqslant 0$.

iii). Pentru ca ecuaţia să aibă două rădăcini nereale trebuie ca $\Delta=(b-3a)(b+a)<0$.

**I.9.66**[M]. Să se rezolve ecuaţiile reciproce de gradul IV:

a) $2x^4+7x^3+9x^2+7x+2=0$; b) $x^4+x^3-18x^2+x+1=0$;
c) $4x^4-x^3+5x^2-x+4=0$; d) $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$;
e) $x^4+2x^3-6x^2+2x+1=0$; f) $x^4+3x^3-2x^2+3x+1=0$;
g) $x^4+3x^3-16x^2+3x+1=0$.

**R.** Ecuaţiile sînt reciproce de grad par. După cum se ştie, algoritmul de rezolvare este următorul: se împarte ecuaţia cu $x^2$ (puterea lui $x$ care se află la mijloc); se notează $x+\dfrac{1}{x}=y$ şi atunci $y^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$, deci $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$. Obţinem o ecuaţie în $y$ al cărei grad este de două ori mai mic decît gradul ecuaţiei iniţiale.

a) Avem succesiv, împărţind cu $x^2$ şi folosind substituţia $y = x+\frac{1}{x}$:

$$2x^2 + 7x + 9 + 7 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0,$$

$$2(y^2 - 2) + 7y + 9 = 0,$$

$$2y^2 + 7y + 5 = 0$$

cu soluţiile $y_1 = -1$, $y_2 = -\frac{5}{2}$. Obţinem ecuaţiile în $x$:

$$x + \frac{1}{x} = -1; \; x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2},$$

adică $x^2 + x + 1 = 0$, respectiv $2x^2 + 5x + 2 = 0$, care conduc la soluţiile:

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \; x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \; x_3 = -\frac{1}{2}, \; x_4 = -2.$$ ok

b) Avem, succesiv:

$$x^2 + x - 18 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 18 = 0,$$

$$y - 2 + y - 18 = 0,$$

$$y^2 + y - 20 = 0,$$

deci $y_1 = 4$, $y_2 = -5$, care conduc la ecuaţiile:

$$x + \frac{1}{x} = 4, \; x + \frac{1}{x} = -5,$$

adică $x^2 - 4x + 1 = 0$, $x^2 + 5x + 1 = 0$, cu soluţiile:

$$x_1 = 2 + \sqrt{3}, \; x_2 = 2 - \sqrt{3}, \; x_3 = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}, \; x_4 = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2}.$$ OK!

c) Avem, succesiv:

$$4x^2 - x + 5 - \frac{1}{x} + 4\frac{1}{x^2} = 0,$$

$$4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0,$$

$$4(y^2 - 2) - y + 5 = 0,$$

$$4y^2 - y - 3 = 0,$$

cu $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{3}{4}$, care conduc la ecuaţiile:

$$x + \frac{1}{x} = 1, \quad x + \frac{1}{x} = -\frac{3}{4}$$

adică $x^2 - x + 1 = 0$, $4x^2 + 3x + 4 = 0$ de unde rezultă rădăcinile:

$$x_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = \frac{-3 + i\sqrt{55}}{8}, \quad x_4 = \frac{-3 - i\sqrt{55}}{8}.$$

d) Avem, succesiv:

$$x^2 + 2x - 1 + 2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0,$$

$$y^2 - 2 + 2y - 1 = 0,$$

deci $y^2 + 2y - 3 = 0$, cu soluţiile $y_1 = 1$, $y_2 = -3$, deci $x + \frac{1}{x} = 1$ şi $x + \frac{1}{x} = -3$, adică $x^2 - x + 1 = 0$, $x^2 + 3x + 1 = 0$, cu soluţiile:

$$x_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_4 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}.$$

e) Avem, succesiv:

$$x^2 + 2x - 6 + 2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0,$$

$$y^2 - 2 + 2y - 6 = 0$$

deci $y^2 + 2y - 8 = 0$, cu soluţiile $y_1 = -4$, $y_2 = 2$, deci $x + \frac{1}{x} = -4$, $x + \frac{1}{x} = 2$, adică $x^2 + 4x + 1 = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$, de unde:

$$x_1 = -2 + \sqrt{3}, \quad x_2 = -2 - \sqrt{3}, \quad x_3 = +1, \quad x_4 = +1.$$

f) Avem, succesiv:

$$x^2 + 3x - 2 + 3 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$$

$$y^2 - 2 + 3y - 2 = 0,$$

deci $y^2 + 3y - 4 = 0$, cu soluțiile $y_1 = 1$, $y_2 = -4$, deci $x + \frac{1}{x} = 1$, $x + \frac{1}{x} = -4$, adică $x^2 - x + 1 = 0$, $x^2 + 4x + 1 = 0$, de unde:

$$x_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2},\ x_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2},\ x_3 = -2 + \sqrt{3},\ x_4 = -2 - \sqrt{3}.$$

g) Avem, succesiv:

$$x^2 + 3x - 16 + 3 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 1,$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0,$$

$$y^2 - 2 + 3y - 16 = 0,$$

de unde $y^2 + 3y - 18 = 0$, deci $y_1 = -6$, $y_2 = 3$, de unde $x + \frac{1}{x} = -6$, $x + \frac{1}{x} = 3$, adică $x^2 + 6x + 1 = 0$, $x^2 - 3x + 1 = 0$, care conduc la soluțiile:

A9

9/123

$$x_1 = -3 + 2\sqrt{2},\ x_2 = -3 - 2\sqrt{2},\ x_3 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2},\ x_4 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

**1.9.67**[M]. Să se determine numărul real $a$ astfel încît ecuația:

$$x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + 1 = 0 \quad | x^2$$

să aibă toate rădăcinile reale.

**R.** Ecuația este reciprocă de grad par. Avem, succesiv:

$$x^2 + 2x + a + 2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + a = 0,$$

$$y^2 - 2 + 2y + a = 0,$$

de unde $y^2 + 2y + a - 2 = 0$. Să observăm că dacă $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, atunci $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geqslant 2$. În adevăr, $(x - 1)^2 \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, sau $x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$, sau $x^2 + 1 \geqslant 2x$.

Dacă $x > 0$, prin împărțire cu $x$ obținem $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$, iar dacă $x < 0$, atunci din $(x + 1)^2 \geqslant 0$ rezultă $x + \frac{1}{x} \leqslant -2$, deci, oricum $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geqslant 2$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}^*$.

Aşadar, pentru ca rădăcinile ecuaţiei iniţiale să fie reale este necesar ca $y_{1,2} \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$. Pentru ca $y_1$ şi $y_2$ să fie reale trebuie ca $\Delta_y = 12 - 4a \geqslant 0$, adică $a \leqslant 3$. Aşadar, sau $y_1 \geqslant 2$, $y_2 \geqslant 2$, sau $y_1 \geqslant 2$, $y_2 \leqslant -2$, sau $y_1 \leqslant -2$, $y_2 \geqslant 2$, sau $y_1 \leqslant -2$, $y_2 \leqslant -2$.

Luînd $y_1 = -1 - \sqrt{12 - 4a}$, $y_2 = -1 + \sqrt{12 - 4a}$, condiţia $y_2 \leqslant -2$, $y_1 \geqslant 2$ se mai poate scrie $y_1 - 2 \geqslant 0$, $y_2 + 2 \leqslant 0$ sau $(y_1 - 2)(y_2 + 2) \leqslant 0$, adică $y_1 y_2 + 2(y_1 - y_2) - 4 \leqslant 0$, sau, cum $y_1 y_2 = a - 2$, $y_1 - y_2 = -2\sqrt{12 - 4a}$:

$$a - 2 - 4\sqrt{12 - 4a} - 4 \leqslant 0,$$

evidentă pentru $a \leqslant 3$. Deci, dacă $a \in (-\infty, 3]$, ecuaţia în $x$ are toate cele patru rădăcini reale.

**I.9.68**[M]. Să se arate că orice ecuaţie reciprocă de gradul $n = 2p$ se reduce la rezolvarea unei ecuaţii de gradul $p$ şi apoi a $p$ ecuaţii de gradul 2.

**R.** Fie ecuaţia reciprocă:

$$a_0 x^{2p} + a_1 x^{2p-1} + \ldots + a_{2p} = 0, \quad a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_{2p} \cdot \frac{1}{x^p} = 0,$$

cu $a_i = a_{2p-i}$, $(\forall)$ $i \in \overline{0, 2p}$. Folosind substituţia $x + \frac{1}{x} = y$, avem:

$$y^k = \left(x + \frac{1}{x}\right)^k = x^k + \frac{1}{x^k} + C_k^1\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) + C_k^2\left(x^{k-2} + \frac{1}{x^{k-2}}\right) + \ldots$$

Dînd lui $k$ valorile $1, 2, \ldots, p$, se determină $x^k + \frac{1}{x^k}$ în raport cu $y^k$ $y^{k-1}, \ldots, y^2, y^1, y^0$. Ecuaţia dată se transformă astfel într-o ecuaţie în $y$ de grad $p$, cu rădăcini. Fiecare rădăcină conduce la o ecuaţie de gradul 2, $x^2 - y_k x + 1 = 0$, $k \in \overline{1, p}$.

**I.9.69**[M]. Să se rezolve ecuaţiile reciproce de gradul V:

a) $20x^5 - 81x^4 + 62x^3 + 62x^2 - 81x + 20 = 0$;

b) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$;

c) $5x^5 - 4x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 4x + 5 = 0$.

**R.** Fiind reciproce de grad impar, ecuaţiile propuse spre rezolvare admit rădăcina $x_1 = -1$. După împărţirea polinoamelor asociate expresiilor din primul membru al fiecărei ecuaţii, obţinem ecuaţiile reciproce de gradul IV:

a) $20x^4 - 101x^3 + 163x^2 - 101x + 20 = 0$; b) $x^4 + x^2 + 1 = 0$; c) $5x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 5 = 0$.

Rezolvînd ecuaţiile de mai sus, obţinem soluţiile:

a) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{5}{4}$, $x_3 = \frac{4}{5}$, $x_4 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, $x_5 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$;

b) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, $x_4 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$,

$x_5 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$;

c) $x_1 = -1$, $x_2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $x_4 = \dfrac{2+i\sqrt{21}}{6}$;

$x_5 = \dfrac{2-i\sqrt{21}}{6}$,

**I.9.70**[M]. Să se arate că dacă $a \neq b$, polinomul $f = aX^3 + X^2 + bX + 1$ nu are rădăcinile i sau $-$i.

**R.** Dacă $x_1 = i$ este rădăcină a ecuației atunci, $f(i) = -ai - \cancel{1} + bi + \cancel{1} = i(b-a) = 0$, deci $a = b$, contrar ipotezei. Analog: $f(-i) = ai - 1 - bi + 1 = (a-b)i \neq 0$, deci $a = b$, contrar ipotezei.

**I.9.71**[M]. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ și apoi să se rezolve ecuația $x^4 - 7x^3 + 21x^2 + ax + b = 0$, știind că $1 + 2i$ este rădăcină a ecuației.

**R.** Deoarece coeficienții ecuației sînt numere reale, ea admite și rădăcina $1-2i$, deci polinomul $X^4 - 7X^3 + 21X^2 + aX + b$ se divide cu $[X-(1+2i)][X-(1-2i)] = X^2 - 2X - 3$. Restul împărțirii polinomului $X^4 - 7X^3 + 21X^2 + aX + b$ la $X^2 - 2X - 3$ este dat de schema:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & -7X^3 & +21X^2 & +aX & +b & X^2 - 2X - 3 \\
\cline{6-6}
-X^4 & +2X^3 & +3X^2 & & & X^2 - 5X + 14 \\
\hline
 & -5X^3 & +24X^2 & +aX & +b & \\
 & +5X^3 & -10X^2 & -15X & & \\
\cline{2-5}
 & & 14X^2 & +(a-15)X & +b & \\
 & & -14X^2 & +28X & +42 & \\
\cline{3-5}
 & & & (a+13)X & +b+42 &
\end{array}
$$

deci $a = -13$, $b = -42$.

Celelalte două rădăcini sînt date de ecuația $x^2 - 5x + 14 = 0$, adică $x_{3,4} = \dfrac{5 \pm i\sqrt{31}}{2}$.

BAC 1993

**I.9.72**[M]. Fie ecuația:

$$x^4 + (2a+1)x^3 + 2(a+1)^2x^2 + bx + c = 0,$$

$\boxed{\sum_{i=1}^{4} x_i^2 < 0}$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$. Să se arate că această ecuație admite cel mult două rădăcini reale.

**R.** Avem, potrivit relațiilor lui VIÈTE, $\sum x_1 = -2a - 1$, $\sum x_1x_2 = 2a^2 + 4a + 2$. De aici, $\sum x_1^2 = (\sum x_1)^2 - 2\sum x_1x_2 = -4a - 3 < 0$, căci $a \geq 0$. Dacă toate rădăcinile ecuației date sînt reale, ar rezulta $\sum x_1^2 \geq 0$. Ca atare, cum $\sum x_1^2 < 0$, rezultă că ecuația propusă are cel puțin o rădăcină nereală, și deoarece coeficienții săi sînt reali, rezultă că ecuația admite ca rădăcină și conjugata rădăcinii nereale anterioare, deci ea admite cel puțin două rădăcini nereale, deci cel mult două rădăcini reale.



08/XII/93

**I.9.73[M].** Să se determine rădăcinile polinomului:

$$f = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1$$

ştiind că admite rădăcina i.

**R.** Polinomul admite şi rădăcina $-\mathrm{i}$, deci se divide cu $(X + \mathrm{i})\cdot(X - \mathrm{i}) = X^2 + 1$. Cîtul împărţirii lui $f$ la $X^2 + 1$ este dat de schema:

$$\begin{array}{l|l}
X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1 & X^2 + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-X^6 \qquad\; - X^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad} & X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1 \\
\qquad X^5 + 2X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1 & \\
\qquad \underline{-X^5 \qquad\quad - X^3 \qquad\qquad\qquad\quad} & \\
\qquad\qquad 2X^4 + X^3 + 3X^2 + X + 1 & \\
\qquad\qquad \underline{-2X^4 \qquad\quad - 2X^2 \qquad\quad} & \\
\qquad\qquad\qquad X^3 + X^2 + X + 1 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-X^3 \qquad\; - X \quad} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad X^2 + 1 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-X^2 - 1} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\; - \quad - &
\end{array}$$

Ecuaţia $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ este reciprocă de grad par. Rezultă $x_3 = \mathrm{i}$, $x_4 = -\mathrm{i}$, $x_5 = \dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, $x_6 = \dfrac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

5/14 **I.9.74[M].** Să se rezolve ecuaţia:

$$x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x + 2 = 0,$$

ştiind că admite rădăcina $1 + \mathrm{i}$.

**R.** Polinomul $X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 4X + 2$ se divide cu $(X - 1 - \mathrm{i})\cdot(X - 1 + \mathrm{i}) = X^2 - 2X + 2$. Cîtul împărţirii este polinomul $X^2 - X + 1$ care are rădăcinile $x_3 = \dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, $x_4 = \dfrac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

6/145 **I.9.75[M].** Să se rezolve ecuaţia $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = 0$, ştiind că admite rădăcina $2 - \mathrm{i}$.

**R.** Polinomul $X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 5$ se divide cu $[X - (2 - \mathrm{i})]\cdot[X - (2 + \mathrm{i})] = X^2 - 4X + 5$. Cîtul împărţirii este dat de schema:

$$\begin{array}{l|l}
X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 5 & X^2 - 4X + 5 \\ \cline{2-2}
\underline{-X^4 + 4X^3 - 5X^2 \qquad\qquad\quad} & X^2 + 1 \\
\qquad\qquad\qquad X^2 - 4X + 5 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-X^2 + 4X - 5} & \\
\qquad\qquad\qquad\; - \quad - \quad - &
\end{array}$$

care conduce la ecuaţia $x^2 + 1 = 0$, cu soluţiile $x_1 = \mathrm{i}$, $x_2 = -\mathrm{i}$.

8/145 **I.9.76[M].** Să se determine $m, n \in \mathbb{C}$ şi apoi să se rezolve ecuaţia:

$$x^4 - x^3 + mx^2 + 2x + n = 0,$$

ştiind că admite rădăcina $1 + \mathrm{i}$.

**R.** Polinomul $X^4 - X^3 + mX^2 + 2X + n$ se divide cu $[X-(1+i)]\cdot[X-(1-i)] = X^2 - 2X + 2$. Cîtul și restul se determină potrivit schemei:

$$\begin{array}{l|l}
X^4 - X^3 + mX^2 + 2X + n & X^2 - 2X + 2 \\
\cline{2-2}
-X^4 + 2X^3 - 2X^2 & X^2 + X + m \\
\cline{1-1}
\quad X^3 + (m-2)X^2 + 2X + n & \\
\quad -X^3 + 2X^2 - 2X & \\
\cline{1-1}
\qquad mX^2 \qquad + n & \\
\qquad -mX^2 + 2mX - 2m & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 2mX + n - 2m &
\end{array}$$

Deci $m = 0$, $n - 2m = 0$, deci $n = 0$ iar $x_3$ și $x_4$ sînt date de ecuația $x^2 + x = 0$, de unde $x_3 = 0$, $x_4 = -1$.

9/415

**I.9.77[M].** Știind că polinomul $f = 3X^4 - 5X^3 + 3X^2 + 4X - 2$ are rădăcina $1 + i$, să se găsească celelalte rădăcini și să se descompună polinomul $f$ în produs de polinoame de gradul I și II cu coeficienți reali.

**R.** Polinomul admite și rădăcina $1 - i$, deci $f$ se divide cu $(X - 1 - i)(X - 1 + i) = X^2 - 2X + 2$. Obținem $f = (3X^2 + X - 1)\cdot(X^2 - 2X + 2) = 3(X^2 - 2X + 2)\left(X + \frac{1 - \sqrt{13}}{6}\right)\left(X + \frac{1 + \sqrt{13}}{6}\right)$ deci $x_3 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}$, $x_4 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{6}$.

**I.9.78[M].** Să se descompună în factori cu coeficienți reali polinomul $f = X^4 + X^2 + 1$.

**R.** Avem:

$$f = X^4 + X^2 + 1 = X^4 + 2X^2 + 1 - X^2 = (X^2 + 1)^2 - X^2 =$$

$$= (X^2 - X + 1)\ (X^2 + X + 1).$$

**I.9.79[M].** Să se descompună în factori cu coeficienți reali polinomul $f = X^4 + 1$.

**R.** Avem:

$$f = X^4 + 1 = X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2 = (X^2 + 1)^2 - (X\sqrt{2})^2 =$$

$$= (X^2 - X\sqrt{2} + 1)(X^2 + X\sqrt{2} + 1).$$

**I.9.80[M].** Fie $f$ și $g$ două polinoame nenule cu coeficienți reali. Dacă polinomul $f(X^3) + X^n g(X^3)$ este divizibil cu $X^2 + X + 1$, unde $n$ este un număr natural care nu este divizibil cu 3, atunci $f$ și $g$ au rădăcina 1.

**R.** Fie $\alpha$ una din rădăcinile polinomului $X^2 + X + 1$, deci:

$$\alpha \in \left\{\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3},\ \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right\}.$$

Avem, prin ipoteză:

$$f(\alpha^3) + \alpha^n g(\alpha^3) = 0.$$

Din $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ rezultă, prin inmulţire cu $\alpha - 1$, că $\alpha^3 = 1$, deci avem $f(1) + \alpha^n g(1) = 0$. Dar, potrivit formulei lui MOIVRE:

$$\alpha_{1,2}^n = \left(\cos \frac{2\pi}{3} \pm i \sin \frac{2\pi}{3}\right)^n = \cos \frac{2n\pi}{3} \pm i \sin \frac{2n\pi}{3},$$

deci:

$$f(1) + \left(\cos \frac{2n\pi}{3} \pm i \sin \frac{2n\pi}{3}\right) g(1) = 0,$$

de unde:

$$f(1) + g(1) \cos \frac{2n\pi}{3} = 0, \; g(1) \sin \frac{2n\pi}{3} = 0.$$

Cum $3 \nmid n$, rezultă $\sin \frac{2n\pi}{3} \neq 0$, deci $g(1) = 0$ şi deci şi $f(1) = 0$, adică $f$ şi $g$ admit rădăcina 1.

**I.9.81**[M]. Să se determine polinoamele cu coeficienţi reali de gradul cel mai mic care au ca rădăcini:

a) Rădăcina dublă 2 şi rădăcina simplă $1 + i$;

b) Rădăcina dublă $i$ şi rădăcina dublă $2 - i$;

c) Rădăcina triplă $-1 - i$ şi rădăcinile simple 1 şi $-1$.

**R.** a) Polinomul căutat admite ca rădăcină simplă pe $1-i$, deci:

$$P = a(X - 2)^2(X - 1 + i)\,(X - 1 - i), \; a \in \mathbb{R} - \{0\};$$

b) Polinomul căutat admite rădăcini duble pe $-i$ şi $2 + i$, deci:

$$P = a(X - i)^2(X + i)^2\,(X - 2 + i)^2(X - 2 - i)^2, \; a \in \mathbb{R} - \{0\};$$

c) Polinomul admite rădăcina triplă $-1 + i$, deci:

$$P = a(X + 1 + i)^3(X + 1 - i)^3(X - 1)(X + 1), \; a \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Izvnt. 45(425

**I.9.82**[M]. Să se rezolve ecuaţia:

$$(x + i)^n + (x - i)^n = 0$$

şi să se arate că are toate rădăcinile reale.

**R.** Avem, succesiv:

$$\frac{(x + i)^n}{(x - i)^n} + 1 = 0,$$

$$\left(\frac{x + i}{x - i}\right)^n = -1 = \cos \pi + i \sin \pi$$

de unde:

$$\frac{x_k + i}{x_k - i} = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{n}, \; k \in \overline{0, n - 1}\,.$$

De aici, folosind proprietățile proporțiilor:

$$\frac{x_k + \mathrm{i}}{x_k - \mathrm{i} - x_k - \mathrm{i}} = \frac{\cos\frac{\pi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\pi + 2k\pi}{n}}{1 - \cos\frac{\pi + 2k\pi}{n} - \mathrm{i}\,\sin\frac{\pi + 2k\pi}{n}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}}{2\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2n} - 2\mathrm{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}}{-2\mathrm{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} + \mathrm{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)} =$$

$$= \frac{\cos\left[\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right] + \mathrm{i}\sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right]}{-2i\,\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} + \mathrm{i}\,\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}}{-2\mathrm{i}\,\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}};$$

De aici:

$$\frac{x_k + \mathrm{i}}{-2\mathrm{i}} = \frac{\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} + \mathrm{i}\,\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}}{-2\mathrm{i}\,\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

sau:

$$x_k + \mathrm{i} = +\operatorname{ctg}\frac{(2k+1)\pi}{2n} + \mathrm{i}$$

de unde $x_k = \operatorname{ctg}\frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $k \in \overline{0,\ n-1}$.

Evident, $x_k \in \mathbb{R}$, $(\forall)$ $k \in \overline{0,\ n-1}$.

*Observație.* Dezvoltînd după NEWTON primul membru al ecuației, obținem ecuația :

$$x^n - C_n^2 x^{n-2} + \ldots = 0$$

Potrivit relațiilor lui VIÈTE :

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$$

deci :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ctg} \frac{(2k+1)\pi}{2n} = 0}$$

16/125 **I.9.83$^M$.** Să se arate că poliomul $f = X^{4a} + X^{4b+1} + X^{4c+2} + X^{4d+3}$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, este divizibil prin $X^3 + X^2 + X + 1$.

**R.** Fie $\alpha_i$, $i \in \overline{1, 3}$ rădăcinile, diferite între ele, ale polinomului $X^3 + X^2 + X + 1$. Avem $\alpha_i^3 + \alpha_i^2 + \alpha_i + 1 = 0$ și, prin înmulțire cu $\alpha_i - 1$, avem $\alpha_i^4 - 1 = 0$. Evident, $f(\alpha_i) = (\alpha_i^4)^a + (\alpha_i^4)^b \cdot \alpha_i + (\alpha_i^4)^c \cdot \alpha_i^2 + (\alpha_i^4)^d \alpha_i^3 = 1 + \alpha_i + \alpha_i^2 + \alpha_i^3 = 0$. Deci $f \vdots (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3) = X^3 + X^2 + X + 1$. vezi manualul !

**I.9.84$^M$.** Să se rezolve ecuația $2x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 1 = 0$, știind că admite rădăcina $1 + \sqrt{2}$.

**R.** Fiind cu coeficienți întregi, ecuația admite și rădăcina $1 - \sqrt{2}$ deci polinomul $2X^5 - 5X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 1$ se divide cu $(X - 1 - \sqrt{2})(X - 1 + \sqrt{2}) = X^2 - 2X - 1$. Obținem ecuația $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ cu soluțiile $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 1$, $x_5 = -1$.

**I.9.85$^M$.** Să se rezolve ecuația $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$ știind că admite rădăcina $1 - \sqrt{3}$.

**R.** Ecuația admite și rădăcina $1 + \sqrt{3}$ deci polinomul $f = X^4 - 2X^3 - X^2 - 2X - 2$ se divide cu $[X - (1 - \sqrt{3})] \cdot [X - (1 + \sqrt{3})] = X^2 - 2X - 2$.

Prin împărțirea lui $f$ la $X^2 - 2X - 2$ obținem cîtul $X^2 + 1$ ale cărui rădăcini sînt $x_3 = \mathrm{i}$, $x_4 = -\mathrm{i}$.

**I.9.86$^M$.** Să se determine rădăcinile polinomului $f = X^5 - 3X^4 - 19X^3 + 91X^2 - 80X - 50$, știind că una din rădăcinile lui este $3 + \mathrm{i}$, iar alta este $1 - \sqrt{2}$.

**R.** $f$ admite și rădăcinile $3 - \mathrm{i}$ și $1 + \sqrt{2}$ deci polinomul $f$ se divide prin $(X - 3 - \mathrm{i})(X - 3 + \mathrm{i})(X - 1 + \sqrt{2})(X - 1 - \sqrt{2}) = X^4 - 8X^3 + 21X^2 - 14X - 10$.

Efectuînd împărțirea, obținem cîtul $X + 5$ cu rădăcina $x_5 = -5$.

**I.9.87$^M$.** Să se determine rădăcinile polinomului $f = X^5 + 3X^4 + X^3 - 5X^2 - 6X - 2$ știind că admite rădăcina $\sqrt{2}$.

**R.** Polinomul $f$ admite şi rădăcina $-\sqrt{2}$ deci se divide cu $(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2}) = X^2 - 2$. Împărţind pe $f$ la $X^2 - 2$ obţinem cîtul $X^3 + 3X^2 + 3X + 1 = (X + 1)^3$, cu rădăcina triplă $-1$.

**I.9.88.**[M] Să se afle rădăcinile raţionale ale următoarelor polinoame:

a) $X^3 + 3X - 14$; b) $X^4 - X^3 - 12X^2 + 6X + 36$; c) $X^5 + 7X^4 + 18X^3 + 22X^2 + 13X + 3$; d) $X^5 + 6X^4 + 13X^3 + 14X^2 + 12X + 8$; e) $X^5 + 8X^4 + 5X^3 - 50X^2 - 36X + 72$; f) $6X^4 - 43X^3 + 107X^2 - 108X + 36$.

**R.** Ştim (v. Manual X, algebră p. 154) că dacă polinomul $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ cu coeficienţi întregi ($a_n \neq 0$) admite rădăcina raţională $\alpha = \dfrac{p}{q}$ cu $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, atunci $p | a_0$, $q | a_n$. Cu excepţia ecuaţiei f), rezultă $q \in \{-1, 1\}$ deci rădăcinile raţionale ale ecuaţiilor a)—e), dacă există, sînt întregi şi trebuie căutate printre divizorii termenului liber. În cazul ecuaţiei f), $p \in \{-36, -18, -12, -9, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$, $q \in \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$. Obţinem rădăcinile, după încercări:

a) 2; b) $-2$, 3; c) $-3$, $-1$, $-1$, $-1$, $-1$; d) $-2$, $-2$, $-2$; e) 1, $-2$, 2, $-3$, 6; f) 2, 3, $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{2}{3}$.

Ano 97/98

**I.9.89**[M] Fie $f$ un polinom nenul cu coeficienţi întregi. Dacă $\alpha = \dfrac{p}{q}$ este o fracţie raţională ireductibilă, rădăcină a lui $f$, atunci $p - q$ divide pe $f(1)$.

**R.** Avem, notînd $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$:

$$f(1) - f\left(\frac{p}{q}\right) = a_1\left(1 - \frac{p}{q}\right) + a_2\left(1 - \frac{p^2}{q^2}\right) + \ldots + a_n\left(1 - \frac{p^n}{q^n}\right)$$

Cum $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0$, rezultă:

$$q^nf(1) = a_1q^{n-1}(q - p) + a_2q^{n-2}(q^2 - p^2) + \ldots + a_n(q^n - p^n).$$

Dar $(q^i - p^i) \vdots (q - p)$ deci al doilea membru al egalităţii precedente se divide cu $q - p$, deci şi cu $p - q$, deci $(p - q) | q^n f(1)$.

Dar $(p - q) \nmid q^n$, căci altfel ar rezulta $p$ şi $q$ neprime între ele, deci $(p - q) | f(1)$.

03/01/96

**I.9.90**[PO]. Fie $n$ un număr natural şi $p$ un număr prim. Să se arate că polinoamele:

$$P_1(X) = X^{2^n} + 1$$

şi

$$P_2(X) = X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1$$

Sfîrşitul manualului!

nu pot fi scrise ca produs de polinoame de grad nenul cu... nali (adică sînt ireductibile în $\mathbb{Q}[X]$).

**R.** Vom folosi criteriul lui EISENSTEIN. Fie $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$; dacă $P(X)$ este reductibil în $\mathbb{Q}[X]$ atunci şi $P(X+1)$ este reductibil, căci din faptul că:

$$P(X) = A_1(X) \cdot B_1(X)$$

cu $A_1(X)$, $B_1(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ar rezulta şi:

$$P(X+1) = A_1(X+1) \cdot B_1(X+1),$$

şi, evident $A_1(X+1)$, $B_1(X+1) \in \mathbb{Q}[X]$.

Reciproca este, de asemenea, adevărată, raţionamentul pentru demonstraţie fiind analog.

Să arătăm atunci că polinomul:

$$P_1(X+1) = (X+1)^{2^n} + 1$$

este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$. Avem:

$$P_1(X+1) = X^{2^n} + C_{2^n}^1 X^{2^n-1} + \ldots + C_{2^n}^{2^n-1} X + 2.$$

Fie $p = 2$. Evident, coeficientul lui $X^{2^n}$ nu este congruent cu zero, modulo 2. Termenul liber, 2, este congruent cu zero modulo 2, dar nu şi modulo $2^2$. Să arătăm în fine, că:

$$C_{2^n}^i \equiv 0 \pmod{2}, \quad (\forall)\ i \in \overline{1,\ 2^n-1}.$$

Avem:

$$C_{2^n}^i = \frac{(2^n)!}{i!(2^n-1)!}$$

Exponentul lui 2 în descompunerea lui $C_{2^n}^i$ în factori primi este:

$$\left[\frac{2^n}{2}\right]_* + \ldots + \left[\frac{2^n}{2^n}\right]_* - \sum_{t=1}^{\infty}\left(\left[\frac{i}{2^t}\right]_* + \left[\frac{2^n-i}{2^t}\right]_*\right). \tag{1}$$

Să arătăm că expresia anterioară este cel puţin egală cu 1, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $i \in \overline{1, 2^n-1}$.

Fie $i$ oarecare. Evident:

$$\left[\frac{i}{2^t}\right]_* + \left[\frac{2^n-i}{2^t}\right]_* \leqslant \frac{i}{2^t} + \frac{2^n-i}{2^t} = \frac{2^n}{2^t} = \left[\frac{2^n}{2^t}\right]_*$$

pentru $t \in \overline{1, n}$, deci:

$$\left[\frac{2^n}{2^t}\right]_* - \left(\left[\frac{i}{2^t}\right]_* + \left[\frac{2^n-i}{2^t}\right]_*\right) \geqslant 0.$$

...e egală cu zero dacă și numai dacă:

$$\left[\frac{i}{2^t}\right]_* + \left[\frac{2^n - i}{2^t}\right]_*, \ (\forall)\ t \in \overline{1, n}.$$

...că:

$$\left[\frac{i}{2^t}\right]_* = \frac{i}{2^t},$$

$$\left[\frac{2^n - i}{2^t}\right]_* = \frac{2^n - i}{2^t}.$$

De aici rezultă că $i = 2^n$, absurd (căci $i \in \overline{1, 2^n - 1}$).

Deci, conform criteriului lui EISENSTEIN, polinomul $P_1(X)$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

Demonstrația pentru polinomul $P_2(X)$ este analoagă, aplicînd criteriul lui EINSESTEIN polinomului:

$$P_2(X + 1) = \frac{(x + 1)^p - 1}{(x + 1) - 1} = X^{p-1} + C_p^1 X^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1}.$$

**I.9.91**PO. Fie $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că pentru orice întregi $a_1, a_2, \ldots, a_n$, diferiți între ei, polinomul:

$$(X - a_1)^2(X - a_2)^2 \ldots (X - a_n)^2 + 1$$

nu se poate descompune în produsul a altor două polinoame neconstante cu coeficienți întregi.

**R.** Presupunem, prin absurd, că polinomul:

$$P(X) = (X - a_1)^2(X - a_2)^2 \ldots (X - a_n)^2 + 1$$

contrazice afirmația enunțului. Aceasta înseamnă că există $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$ cu grad $Q \geqslant 1$, grad $R \geqslant 1$, așa încît:

$$P(X) = Q(X)R(X).$$

Făcînd $X \to a_i$, $i \in \overline{1, n}$, rezultă:

$$Q(a_i)R(a_i) = 1, \ i \in \overline{1, n}.$$

Evident, $P(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$. Dacă unul din polinoamele $Q$ sau $R$ ar lua valori negative, el ar trebui să se anuleze, absurd (căci $P$ nu se anulează), deci atît $P$ cît și $Q$ păstrează semn constant. Rezultă dec că, sau:

$$Q(a_i) = R(a_i) = 1, \ (\forall)\ i \in \overline{1, n},$$

sau:

$$Q(a_i) = R(a_i) = -1, \ (\forall)\ i \in \overline{1, n}.$$

Dar, cel puţin unul din polinoamele $Q$ şi $R$ au gradul cel mult egal cu $n$, căci în caz contrar nu am avea îndeplinită egalitatea :

$$\text{grad } Q + \text{grad } R = 2n$$

(polinomul $P$ are gradul $2n$). Rezultă de aici că, sau :

$$\text{grad } Q = \text{grad } R = n,$$

şi în acest caz :

$$R(X) = Q(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - a_k) + 1,$$

deci :

$$P(X) = \prod_{1=1}^{n} (X - a_k) + 1]^2,$$

absurd, sau, de exemplu, grad $Q < n$, si cum :

$$Q(a_i) = 1, \ (\forall) \ i \in \overline{1, n},$$

rezultă :

$$Q \equiv 1$$

contrar ipotezei.

În consecinţă, enunţul este demonstrat.

**I.9.92**[PO]. Să se descompună în fracţii simple fracţia :

$$\frac{1}{\cos(n \arccos x)}, \ n \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R} - \{y \mid \cos y = 0\}.$$

**R.** Fie :

$$P(X) = \cos(n \arccos X),$$

şi $\arccos X \to t$. Aşadar :

$$P(\cos t) = \cos nt = \cos^n t - C_n^2 \cos^{n-2} t \sin^2 t + \ldots +$$

sau încă :

$$P(X) = X^n - C_n^2 X^{n-2}(1 - X^2) + C_n^4 X^{n-4}(1 - X^2)^2 - \ldots$$

astfel că $P(X)$ este un polinom de gradul $n$. Coeficientul lui $X^n$ este :

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = 2^{n-1}.$$

Rădăcinile ecuaţiei $P(x) = 0$, sînt date de :

$$\cos(n \arccos x) = 0.$$

adică sînt :

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{2n}, \ x_2 = \cos\frac{3\pi}{2n}, \ \ldots, \ x_n = \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}.$$

În felul acesta:

$$\frac{1}{\cos(n \arccos X)} = \frac{1}{2^{n-1}(X - x_1)\dots(X - x_n)}$$

Fie:

$$\frac{1}{2^{n-1}(X - x_1)\dots(X - x_n)} = \frac{A_1}{X - x_1} + \dots + \frac{A_n}{X - x_n}.$$

Înmulţind succesiv egalitatea prin:

$$X - x_1, \dots, X - x_n,$$

şi atribuind lui $X$ respectiv valorile $x_1, x_2, \dots, x_n$ se obţin coeficienţii $A_k$, $k \in \overline{1, n}$, deci, în final:

$$\frac{1}{\cos(n \arccos x)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \sin \frac{2k-1}{2n}\pi}{x - \cos \frac{2k-1}{2n}\pi}.$$

**I.9.93**PO. Se consideră familia de polinoame $P_n$ definită prin relaţia de recurenţă:

$$P_n(X) = X^n - \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^k P_{n-2k}(X), \ (\forall) \ n \in \mathbb{N}.$$

unde $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, $(\forall) X \in \mathbb{R}$.

Să se demonstreze că rădăcinile polinomului $P_n$ sînt toate reale şi ele au forma:

$$x_k = 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k \in \overline{0, n-1}, \ n \geqslant 1.$$

**R.** Prin schimbarea de variabilă:

$$X = Y + \frac{1}{Y}$$

polinoamele $P_n$ iau forma:

$$P_n^0(Y) = Y^n + \frac{1}{Y^n}.$$

În adevăr, utilizînd relaţia de definiţie a polinoamelor $P_n$, pentru $n = 1$, afirmaţia este valabilă, şi apoi:

$$P_2(X) = X^2 - 2 = \left(Y + \frac{1}{Y}\right)^2 - 2 = P_2^0(Y).$$

Presupunem pentru polinoamele $P_m$, $m < n$, proprietatea adevărată. Să arătăm că proprietatea este adevărată şi pentru polinomul $P_n$. Conform relației de definiție și a dezvoltării binomului după NEWTON, rezultă că:

$$P_0^n(Y) = \left(Y + \frac{1}{Y}\right)^n - \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^k \left(Y^{n-2k} + \frac{1}{Y^{n-2k}}\right) = Y^n + \frac{1}{Y^n},$$

Polinoamele $P_n^0$ au rădăcinile date de:

$$\frac{Y^{2n}+1}{Y^n} = 0,$$

deci de:

$$Y^{2n} + 1 = 0$$

de unde:

$$y_k = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{2n} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{2n}$$

unde $k \in \overline{0,\ n-1}$. Deci:

$$x_k = y_k + \frac{1}{y_k} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n} + \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} -$$

$$- i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n} = 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n},$$

ceea ce trebuia demonstrat.
De aici mai rezultă:

$$P_n(X) = \left(\frac{X + \sqrt{X^2-4}}{2}\right)^n + \left(\frac{X - \sqrt{X^2-4}}{2}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\,[X^n + C_n^2 X^{n-2}(X^2-4) + C_n^4 X^{n-4}(X^2-4)^2 + \ldots].$$

**I.9.94<sup>ro</sup>.** a) Dacă $m$ este un număr natural impar, să se arate că există un polinom $P_m$ astfel încît:

$$\sin mx = P_m(\sin^2 x)\sin x,\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}.$$

b) Să se descompună în factori liniari polinomul $P_m$.
c) Să se arate că:

$$P_{m^3}(X) = P_m(X)P_m(X)P_m^2(X)).$$

**R.** Din dezvoltarea după NEWTON a binomului:

$$(\cos x + i\sin x)^m$$

și formula lui MOIVRE, deducem:

$$\sin mx = [C_m^1\cos^{m-1}x - C_m^3\cos^{m-3}x\sin^2 x + \ldots + (-1)^{2k+1}C_m^{2k+1}\cos^{m-(2k+1)}x\cdot$$

$$\cdot\sin^{2k}x + \ldots + (-1)^{m-2}C_m^{m-2}\cos^2 x\sin^{m-3}x + (-1)^m\sin^{m-1}x]\sin x.$$

Cînd $m$ este impar, toţi termenii din partea dreaptă conţin pe $\sin x$ la o putere pară, căci termenii $\cos x$ apar numai la puteri pare, şi, în baza formulei:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x,$$

ei conţin pe $\sin x$ la puteri impare. Deci, pentru $m = 2t + 1$, avem:

$$P_{2t+1}(X) = C^1_{2t+1}(1 - X^t - C^3_{2t+1}(1 - X)^{t-1}X + \ldots + (-1)^{2t+1}X^t, \quad (1)$$

astfel că, în adevăr, putem scrie:

$$\sin mx = P_n(\sin^2 x) \sin x.$$

b) Avem, din formula dedusă din a):

$$P_m(\sin^2 x) = \frac{\sin mx}{\sin x},$$

şi cum, pentru $x = \frac{k\pi}{m}$, $k \in \overline{0, \frac{m-1}{2}}$, are loc:

$$\sin mx = 0$$

rezultă că rădăcinile ecuaţiei:

$$P_m(X) = 0$$

sînt:

$$\sin^2 \frac{k\pi}{m}, \quad k \in \overline{0, \frac{m-1}{2}}.$$

deci:

$$P_m(X) = a \prod_{k=0}^{\frac{m-1}{2}} \left(X - \sin^2 \frac{k\pi}{m}\right)$$

unde $a$ este o constantă ce se determină calculînd coeficientul lui $X^{\frac{m-1}{2}}$ în ambii membri ai egalităţii precedente. Făcînd $x = 0$, găsim:

$$P_m(0) = a(-1)^{\frac{m-1}{2}} \prod_{k=0}^{\frac{m-1}{2}} \sin^2 \frac{k\pi}{m}$$

Dar:

$$P_m(0) = C^1_m,$$

deci:

$$a = \frac{C^1_m(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\prod_{k=0}^{\frac{m-1}{2}} \sin^2 \frac{k\pi}{2}}.$$

c) Avem:

$$\frac{\sin m^2x}{\sin x} = P_{m^2}(\sin^2 x),$$

$$P_m(\sin^2 x)\ P_m^2(\sin^2 x)) = P_m(\sin^2 mx) = \frac{\sin m^2x}{\sin mx},$$

astfel că relația de demonstrat devine:

$$\frac{\sin m^2x}{\sin x} = \frac{\sin mx}{\sin x}\cdot\frac{\sin m^2x}{\sin mx}$$

care este evidentă. Dar, cum polinoamele:

$$P_{m^2}(X),\ P_m(X)P_m(X)P_m^2(X))$$

sînt egale pentru o infinitate de valori atribuite nedeterminatei, ele sînt egale pentru orice valoare atribuită nedeterminatei, demonstrația acestei afirmații fiind cunoscută.

**I.9.95**[PO]. Fie $n \in \mathbb{N}$. Dacă numerele $x_1, \ldots, x_n$, reprezentate în planul complex sînt vîrfurile unui poligon regulat cu centrul în originea axelor, cu un vîrf pe axa reală, să se demonstreze că afixele rădăcinilor ecuației:

$$\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x} + \cdots + \frac{1}{x - x_n} + \frac{1}{x} = 0$$

formează vîrfurile unui poligon regulat, interior primului și omotetic cu el.

**R.** Eliminînd numitorii, obținem:

$$\sum x(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) + (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = 0. \quad (1)$$

Polinomul:

$$P(X) = \sum X(X - x_2)\ldots(X - x_n) + (X - x_1)\ldots(X - x_n)$$

este simetric în $x_1, x_2, \ldots, x_n$, deci se poate scrie:

$$P(X) = (n + 1)X^n + A_1 \sum x_1X^{n-1} + A_2 \sum x_1x_2X^{n-2} + \ldots$$
$$+ \ldots A_{n-1} \sum x_1x_2\ldots x_{n-1}X + (-1)^n x_1x_2\ldots x_n.$$

unde $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Dar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile ecuației:

$$X^n = A,$$

unde $A \in \mathbb{R}$ și deci:

$$\sum x_1 = 0,\ \sum x_1x_2 = 0, \ldots, \sum x_1x_2\ldots x_{n-1} = 0,$$

și:

$$(-1)^n x_1x_2\ldots x_n = -A$$

deci:

$$P(X) = (n+1)X^n - A.$$

Ecuaţia iniţială (1) devine:

$$(m+1)x^n = A,$$

cu soluţiile:

$$x'_k = \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}\, x_k,\ k \in \overline{1, n}\ .$$

Imaginile punctelor $x'_k$ vor fi omoteticele imaginilor punctelor $x_k$ în planul complex, centrul omotetiei fiind originea iar modulul ei:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} < 1.$$

Deoarece modulul omotetiei este inferior lui 1 şi centrul omotetiei se află în interiorul poligonului dat, rezultă că punctele $x'_k$ se vor afla, de asemenea, în interiorul poligonului dat şi vor fi vîrfurile unui poligon omotetic cu primul, deci regulat.

**I.9.96**$^{\text{PT}}$. Să se rezolve ecuaţia:

$$x^3 - (2+i)x^2 + 2(1+i)x - 4 = 0.$$

**R.** Ecuaţia se mai poate scrie:

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 4 - i\,(x^2 - 2x) = 0.$$

Se observă că:

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = (x-2)(x^2+2),$$

$$x^2 - 2x = x(x-2),$$

deci ecuaţia se scrie:

$$(x-2)[x^2 + 2 - ix] = 0.$$

Rezultă că singura rădăcină reală este $x_1 = 2$. Ecuaţia:

$$x^2 - ix + 2 = 0$$

dă:

$$x_2 = -i,\ x_3 = 2i.$$

**I.9.97**$^{\text{PO}}$. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei:

$$x = 1964 \sin x - 189,$$

fără a folosi noţiuni de analiză matematică.

**R.** Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin:

$$f(x) = \frac{x+189}{1964},\ g(x) = \sin x.$$

Se observă că $f$ este o funcţie monotonă iar:

$$|g(x)| \leqslant 1, \ (\forall) \ x \in \mathbb{R}.$$

Evident, soluţiile ecuaţiei din enunţ vor fi date de toţi $\zeta \in \mathbb{R}$ pentru care $f(\zeta) = g(\zeta)$.

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ aşa încît:

$$f(a) = -1, \ f(b) = 1, \ f(c) = 0$$

(astfel de numere există). Obţinem:

$$a = -2153, \ b = 1775, \ c = -189.$$

Pe segmentul $[0, 1775]$ putem distinge 282 de intervale disjuncte de lungime $2\pi$; pe intervalul $[-2153, 0]$, avem 342 astfel de intervale. Pe intervalul $[0, 1775]$, funcţia $f$ este strict pozitivă, iar pe fiecare interval de lungime $2\pi$, obţinut ca mai sus, dreapta de ecuaţie $f(x) = y$ intersectează graficul de ecuaţie $y = \sin^7 x$ în două puncte. Pe cel de-al 283-lea interval de lungime $2\pi$, în partea sa comună cu segmentul $[0, 1775]$, funcţia $f$ ia o valoare egală cu 1 într-un punct situat la dreapta lui $\zeta$ cu proprietatea $g(\zeta) = 1$, de aceea pe acest interval există două puncte de intersecţie.

Astfel, pe segmentul $[0, 1775]$ se află:

$$282 \cdot 2 + 2 = 566$$

rădăcini ale ecuaţiei.

Segmentul $[-2153, 0]$ se descompune în două segmente, $[-189, 0]$ şi $[-2153, -189]$.

Pe primul dintre acestea se pot aşterne 30, 60...intervale de lungime $2\pi$, pe care $f$ este strict pozitivă. De aceea, obţinem încă 60 de soluţii.

Pe cel de-al 31-lea interval, funcţia $f$ îşi schimbă semnul, deci egalitatea $f(\zeta) = g(\zeta)$ se realizează numai într-un singur punct. Pe celelalte 311 intervale, $f$ este strict negativă şi, în consecinţă, pe fiecare interval se vor găsi două soluţii. Pe partea care rămîne din cel de-al 343-lea interval, se aşterne mai mult de o jumătate de sinusoidă; deoarece, pe acest interval:

$$-1 \leqslant \sin x < 0, \ -1 < f(x) < 0,$$

mai găsim încă două soluţii. Astfel, se găsesc în total 685 de soluţii negative.

Ecuaţia va avea, în consecinţă, 1251 rădăcini.

**I.9.98**ro. Fie ecuaţia:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

unde $a$, $b$, $c$ sînt numere complexe şi presupunem că:

$$\arg a + \arg c = 2 \arg b \tag{2}$$

$$|a| + |c| = |b| \tag{3}$$

Să se arate că cel puţin o rădăcină a ecuaţiei are modulul 1.

**R.** Fie:

$$a = \rho_1 (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1); \ c = \rho_2 (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2).$$

Din relaţia (3) din enunţ, rezultă:

$$|b| = \rho_1 + \rho_2$$

şi:

$$\arg b = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

deci:

$$b = (\rho_1 + \rho_2)\left(\cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + i \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right).$$

De aici, notînd cu $x_1$ şi $x_2$ rădăcinile ecuaţiei (1), rezultă:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1}\left(\cos \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} + i \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \tag{*}$$

şi:

$$x_1 x_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}[\cos (\alpha_2 - \alpha_1) + i \sin (\alpha_2 - \alpha_1)].$$

Avem, în continuare:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{\rho_1^2}[\cos (\alpha_2 - \alpha_1) + i \sin (\alpha_2 - \alpha_1)],$$

deci, luînd:

$$x_1 - x_2 = -\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}\left[\cos \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{2} + i \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right] \tag{**}$$

găsim, adunînd (*) cu (**):

$$x_1 = -\left(\cos \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} + i \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right),$$

deci:

$$|x_1| = 1$$

**I.9.99**PO. Se dă polinomul:

$$P_n(X) = (X - 1 + i\sqrt{3})^n + (X - 1 - i\sqrt{3})^n$$

Se cere:

a) Să se rezolve ecuația:

$$P_3(X) = 0.$$

b) Să se rezolve ecuația:

$$\frac{P_n(X)}{(X - 1 - i\sqrt{3})^n} = 0;$$

c) Să se arate că fiecare rădăcină a ecuației de la punctul precedent se poate pune sub forma:

$$x_k = \sqrt{3}\ \mathrm{ctg}\ \alpha_k + 1$$

unde $\alpha_k$ este un unghi ce se va determina.

**R.** Avem:

$$P_3(X) = 2(X-1)^3 + 6(X-1)(i\sqrt{3})^2 = 2(X-1)(4X^2 - 2X - 8) =$$
$$= 2(X-1)(X-4)(X+2).$$

deci ecuația $P_3(X) = 0$ admite rădăcinile:

$$x_1 = 1,\quad x_2 = 4,\quad x_3 = -2.$$

b) Ecuația:

$$\frac{P_n(X)}{(X - 1 - i\sqrt{3})^n} = 0,$$

se scrie:

$$\left(\frac{X - 1 + i\sqrt{3}}{X - 1 - i\sqrt{3}}\right)^n = -1, \text{ etc.}$$

**I.9.100**PO. Fie $a$ și $b$ două numere naturale oarecare. Să se demonstreze că pentru $k \in \mathbb{N} - \{3m \mid m \in \mathbb{N}\}$ numărul:

$$a^{2k} + (a+b)^{2k} + b^{2k}$$

este divizibil prin:

$$a^2 + ab + b^2.$$

**R.** Fie $\alpha$ una din rădăcinile cubice ale unității, diferită de 1. Fie polinomul:

$$P(X) = (1+X)^{2k} + X^{2k} + 1.$$

Avem, folosind faptul că $\alpha^2 = -\alpha - 1$:

$$P(\alpha) = (1+\alpha)^{2k} + \alpha^{2k} + 1 = (-\alpha^2)^{2k} + \alpha^{2k} + 1 =$$

$$= (\alpha^3)^k \alpha^k + \alpha^{2k} + 1 = \alpha^{2k} + \alpha^k + 1 = \frac{(\alpha^3)^k - 1}{\alpha^k - 1} = 0,$$

pentru $k \in \mathbb{N} - \{3m \mid m \in \mathbb{N}\}$.

În mod analog:

$$P(\alpha^2) = (1+\alpha^2)^{2k} + \alpha^{4k} + 1 = (-\alpha)^{2k} + \alpha^k(\alpha^3)^k + 1 =$$

$$= \alpha^{2k} + \alpha^k + 1 = 0$$

Prin urmare, polinomul $P(X)$ se divide prin:

$$(X-\alpha)(X-\alpha^2) = X^2 + X + 1.$$

De aici rezultă că produsul $a^{2k}P(X)$ se divide cu:

$$a^2(X^2 + X + 1).$$

Dar, pentru $x = \frac{b}{a}$, găsim că:

$$a^{2k} + (a+b)^{2k} + b^{2k}$$

se divide prin $a^2 + ab + b^2$.

**I.9.101[T].** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = 0$$

știind că admite rădăcina $x_1 = 2 - i$.

**R.** Ecuația admite și rădăcina $2 + i$, deci, împărțind polinomul cu produsul $(X - 2 - i)(X - 2 + i) = X^2 - 4X + 5$, se obține un polinom de gradul II ale cărui rădăcini sînt celelalte două rădăcini ale polinomului dat. Avem $x_3 = i$, $x_4 = -i$.

A10 8/125 19.76 179.

**I.9.102[T].** Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ și să se rezolve ecuația:

$$x^4 - x^3 + mx + 2x + n = 0$$

știind că admite rădăcina $x_1 = 1 + i$.

**R.** 1) Fie $x_1 = 1 + i$, atunci ecuația admite și rădăcina $x_2 = 1 - i$. Avem:

$$S = x_1 + x_2 = 1 + i + 1 - i = 2$$

și:

$$P = x_1 \cdot x_2 = (1+i)(1-i) = 2.$$

Atunci $x_1$ și $x_2$ vor fi rădăcinile polinomului $X^2 - SX + P$; adică $X^2 - 2X + 2$. Conform teoremei lui BÉZOUT, polinomul $X^4 - X^3 +$

$+ mX^2 + 2X + n$ se va divide cu $(X^2 - 2X + 2)$ adică restul împărțirii polinomului la $X^2 - 2X + 2$ va fi polinomul nul, conform schemei:

$$\begin{array}{l|l}
\begin{array}{rrrrr}
X^4 & - X^3 & + mX^2 & + 2X & + n \\
-X^4 & + 2X^3 & - 2X^2 & & \\
\hline
/ & X^3 & + (m-2)X^2 & + 2X & + n \\
& -X^3 & + 2X^2 & - 2X & \\
\hline
& / & mX^2 & & + n \\
& & -mX^2 & + 2mX & - 2m \\
\hline
& & / & 2mX & + n - 2m
\end{array}
&
\begin{array}{l}
X^2 - 2X + 2 \\
\hline
X^2 + X + m
\end{array}
\end{array}$$

De aici rezultă că restul $R = 2mX + n - 2m$, trebuie să fie polinomul nul, adică $2m = 0$ și $n - 2m = 0$, deci $m = 0$, $n = 0$ iar cîtul este:

$$q = X^2 + X.$$

Deci, revenind la ecuația dată, ea va fi $x^4 - x^3 + 2x = 0$ care se poate scrie $x^4 - x^3 + 2x = (x^2 - 2x + 2) \cdot (x^2 + x)$, adică $x^2 - 2x + 2 = 0$, care are rădăcinile $x_{1,2} = 1 \pm i$ iar $x^2 + x = 0$, deci $x(x + 1) = 0$, de unde $x_3 = 0$ și $x_4 = -1$.

**I. 9.103**[PT]. Să se determine cîtul și restul împărțirii polinomului:

$$f \in \mathbb{Q}[X], f = 6X^4 - 7X^3 + aX^2 + 3X + 2$$

prin $g \in \mathbb{Q}[X]$, $g = X^2 - X + m$. Să se determine $a$ și $m$ astfel ca $g | f$ și să se descompună în acest caz polinomul divident în factorii săi.

**R.** Avem:

$$6X^4 - 7X^3 + aX^2 + 3X + 2 = (X^2 - X + m)(6X^2 - X + a - 6m - 1) + (a - 5m + 2)X + 6m^2 + m(1 - a) + 2.$$

Dacă $g | f$ atunci din:

$$a - 5m + 2 = 0,$$

$$6m^2 + m(1 - a) = 0$$

rezultă $m = 0$, $a = -2$, sau $a = 13$, $m = -3$.

Dacă $m = 0$, $a = -2$, atunci:

$$g = X(X - 1).$$

Dacă $a = 1$, $m = -3$, atunci:

$$g = X^2 - X - 3,$$

iar, de aici, $g$ este ireductidil în $\mathbb{Q}[X]$.

**I. 9.104**[PO]. Se consideră polinomul:

$$f_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!}X + \frac{1}{2!}X(X + 1) + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}X(X + 1)\ldots(X + n).$$

Se cere:

1) Să se descompună $f_{n+1}$ în produs de factori.

2) Să se stabilească o relație de recurență între $f_n$ și $f_{n+1}$.

**R.** 1) Pentru fiecare $k$ întreg cu $1 \leqslant k \leqslant n+1$, avem:

$$f_{n+1}(-k) = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p C_k^p = [1 + (-1)^k] = 0,$$

de unde:

$$f_{n+1} = a_0(X+1)(X+2)\dots(X+n+1),$$

iar:

$$f_{n+1}(0) = (n+1)!\,a_0.$$

Dar $f_{n+1}(0) = 1$, de unde $a_0 = \dfrac{1}{(n+1)!}$. De aici:

$$f_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}(X+1)(X+2)\dots(X+n+1)$$

2) Conform relației stabilite la punctul (1) avem:

$$f_n = \frac{1}{n!}(X+1)(X+2)\dots(X+n)$$

și deci:

$$f_{n+1} = \frac{1}{n+1}(X+n+1)\cdot f_n.$$

**I. 9.105**[PT]**.** Să se determine toate perechile de numere întregi $(a, b)$ cu proprietatea că polinomul $f = X^4 + aX^2 + bX + 1$ se descompune în produsul a două polinoame de grad mai mic decît 4 cu coeficienți numere întregi.

**R.** Vom determina perechile $(a, b)$ astfel ca polinomul dat să se descompună în produs de doi factori și anume:

a) polinomul să admită un factor de gradul întîi cu coeficienți întregi, sau:

b) polinomul să admită factori de gradul doi cu coeficienți întregi.

În primul caz rădăcinile intregi ale polinomului nu pot fi decît $-1$ și $1$. Admițînd că $-1$ este rădăcină trebuie să avem:

$$X^4 + aX^2 + bX + 1 = (X+1)(X^3 + mX^2 + nX + p),$$

de unde $m = -1$, $p = 1$, $a = n - 1$, $b = -n - 1$, $n$ fiind un întreg arbitrar.

În al doilea caz trebuie să avem $X^4 + aX^2 + bX + 1 = (X^2 + pX + q)(x^2 + mX + n)$, cu $q = n = 1$, sau $q = n = -1$. Dacă $q = n = 1$, atunci $b = 0$ şi $a = 2 - n^2$, $n \in \mathbb{Z}$. Dacă $q = n = -1$, atunci $b' = 0$ şi $a = -2 - n^2$, cu $n \in \mathbb{Z}$.

**I. 9.106**[PT]. Să se arate că polinoml $f \in \mathbb{Q}[X]$ dat de:

$$f = nX^{n+2} - (n+1)X^{n+1} + X, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

se divide prin $X - 1$. Să se afle cîtul.

**R.** Avem:

$$f = nX^{n+2} - nX^{n+1} - X^{n+1} + X = nX^{n+1}(X-1) - X(X^n - 1),$$

deci:

$$f = (X-1)(nX^{n+1} - X^n - X^{n-1} - \ldots - X^2 - X).$$

**I. 9.107**[PO]. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = aX^3 + bX^2 + cX + d$, şi $g = aX^2 + 2bX + c$.

Să se arate că dacă $g | f$, atunci $f$ este un cub perfect, iar $g$ un pătrat perfect.

**R.** Avem:

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = (aX^2 + 2bX + c)\left(X - \frac{b}{a}\right) + \frac{2b^2}{a}X + \frac{bc + ad}{a}.$$

Dacă $g | f$, atunci $b = 0$ şi $d = 0$.

În aceste condiţii avem imediat că $X | f$ şi $X | g$. Dar $X | g$ dacă $c = 0$, deci:

$$f = (\sqrt[3]{a}\,X)^3 \text{ şi } g = (\sqrt{a}X)^2.$$

**I. 9.108**[PT]. Se dă polinomul cu coeficienţi întregi:

$$f = aX^2 + bX + c.$$

Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încît polinomul să nu admită rădăcini raţionale.

**R.** Dacă expresia $b^2 - 4ac$ nu este pătrat perfect, atunci $f$ nu are rădăcini raţionale. Acest lucru este posibil dacă $a, b, c$ sînt numere impare.

03/01/96 **I. 9.109**[PT]. Să se arate că polinomul cu coeficienţi reali:

$$f = X^n + (a-2)X^{n-1} + (a^2 - a + 3)X^{n-2} + \ldots$$

nu poate avea toate rădăcinile reale.

**R.** Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$, rădăcinile polinomului. Avem conform relaţiilor lui VIÈTE:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2 - a;$$

$$\sum_{i<j}^{n} x_i x_j = a^2 - a + 3$$

de unde:

$$\sum x_1^2 = -(a+1)^2 - 1 < 0,$$

deci $x_i, i = \overline{1, n}$ nu pot fi toate reale.

03/01/96

**I. 9.110**[PO]. Dacă rădăcinile polinomului cu coeficienți complecși:

$$f = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + (-1)^n$$

au același modul, atunci $f(-1)$ este real.

**R.** Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile polinomului. Atunci:

$$x_1 x_2 \ldots x_n = 1$$

și:

$$|x_1| = |x_2| = \ldots = |x_n| = 1.$$

Avem atunci:

$$f(-1) = (-1)^n (1 + x_1) \ldots (1 + x_n)$$

și:

$$\overline{f(-1)} = (-1)^n (1 + \bar{x}_1) \ldots (1 + \bar{x}_n).$$

Dar, din $|x_k| = 1$, obținem $\bar{x}_k = \dfrac{1}{x_k}$, de unde:

$$\overline{f(-1)} = (-1)^n \frac{(1 + x_1) \ldots (1 + x_n)}{x_1 x_2 \ldots x_n} = f(-1)$$

ceea ce arată că $f(-1)$ este real.

**I. 9.111**[PT]. Se consideră polinoamele:

$$f = X^5 + aX^4 + a^2X^3 + a^3X^2 + a^4X + a^5,$$
$$g = X^2 + aX + a^2, \quad a \neq 0.$$

Fie $x_k$, $k = \overline{1, n}$, rădăcinile polinomului $f$.

a) Să se arate că $f$ e divizibil cu $g$ și că $f$ admite o singură rădăcină reală.

b) Să se arate că toate rădăcinile lui $f$ au același modul și dacă $x_1$ este rădăcina reală a polinomuuli $f$ atunci:

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0; \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} = 0.$$

**R.** Avem:

a) $$f = (X + a)(X^2 + aX + a^2)(X^2 - aX + a^2),$$

deci $g \mid f$.

Rădăcinile lui $f$ sînt:

$$x_1 = -a, \quad x_2 = \frac{a}{2}(1 + i\sqrt{3}), \quad x_3 = \frac{a}{2}(1 - i\sqrt{3}),$$

$$x_4 = -\frac{a}{2}(1 + i\sqrt{3}), \quad x_5 = -\frac{a}{2}(1 - i\sqrt{3}).$$

b) Toate rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ au modulul egal cu $|a|$. Egalitățile din enunț se deduc imediat.

**I. 9.112**[PO]. Fie $f$ și $g$ două polinoame cu coeficienți reali. Dacă există numerele reale $a$, $b$, astfel încît:

$$f(a) = g(b) \text{ și } f(b) = g(a),$$

să se arate că ecuația $f(x) = g(x)$ are cel puțin o soluție.

**R.** Fie $p(X) = f(X) - g(X)$. Avem:

$$p(a) \cdot p(b) = [f(a) - g(a)]\,[f(b) - g(b)] = -\,[f(a) - f(b)]^2 \leqslant 0,$$

deci $p$ are cel puțin o rădăcină în intervalul $[a, b]$, adică ecuația $f(x) = g(x)$ are cel puțin o soluție.

**I. 9.113**[T]. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația reciprocă:

$$4x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 4 = 0.$$

**R.** Cu notația $x + \frac{1}{x} = y$, ecuația devine:

$$4y^2 - y - 3 = 0$$

de unde rezultă soluțiile:

$$x_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2},$$

$$x_3 = \frac{-3 + i\sqrt{55}}{8}, \quad x_4 = \frac{-3 - i\sqrt{55}}{8}.$$

**I. 9.114**[T]. Să se rezolve în $\mathbb{R}$:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$;

b) $2x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$;

c) $\begin{cases} x + y = 3. \\ xy = 2. \end{cases}$

**R.** a) Avem $x_{1,2} = \pm 3$, $x_{3,4} = \pm 1$.

b) $x \in (-\infty, 1/2] \cup [1, \infty)$.

c) $x$, $y$ sînt soluțiile ecuației $z^2 - 3z + 2 = 0$, de unde avem:

$$x_1 = 1,\ y_1 = 2 \text{ sau } x_2 = 2,\ y_2 = 1.$$

**I. 9.115**[T]. Să se rezolve:

a) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ xy = 3 \end{cases}$

b) $3^{3-x} = 81$;

c) $5x^3 + 31x^2 + 31x + 5 = 0$.

**R.** a) Înmulţim a doua ecuaţie cu 2 şi sistemul devine:

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ x \cdot (2y) = 6 \end{cases}$$

Notînd $x = a$, $2y = b$, sistemul devine:

$$\begin{cases} a + b = 7 \\ ab = 6 \end{cases}$$

deci ecuaţia de gradul II, ale cărei rădăcini sînt $a$ şi $b$, este:

$$t^2 - 7t + 6 = 0$$

cu soluţiile $t_1 = 1$, $t_2 = 6$. Deci, sau $x = 1$, $y = 3$, sau $x = 6$, $y = 1/2$.

b) Deoarece $81 = 3^4$, ecuaţia devine $3^{3-x} = 3^4$, de unde $3 - x = 4$, deci $x = -1$.

c) Ecuaţia este reciprocă de grad impar, deci admite rădăcina $x_1 = -1$. Prin împărţirea polinomului $P = 5X^3 + 31X^2 + 31X + 5$ cu $X + 1$, rezultă cîtul $5X^2 + 26X + 5$, cu soluţiile:

$$x_2 = -5\,;\ x_3 = -1/5.$$

**I. 9.116[T].** a) Să se determine cîtul şi restul împărţirii polinomului $f$ la polinomul $g$, dacă:

$$f = X^4 - 3X^3 - 2X^2 - 6X - 1,$$

$$g = X - 2.$$

b) Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$ astfel ca polinomul $h = X^4 - mX^3 - 2X^2 - 6X - 1$ să se dividă cu polinomul $k = X + 1$.

**R.** a) Potrivit teoremei lui Bézout, restul împărţirii lui $f$ la $g$ este $f(2) = -29$, iar cîtul se determină conform schemei lui Horner:

| $X^4$ | $X^3$ | $X^2$ | $X$ | $X^0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −3 | −2 | −6 | −1 | 2 |
| | 1 | −1 | −4 | −14 | −29 |

deci cîtul este $q = X^3 - X^2 - 4X - 14$.

b) Conform teoremei lui Bézout, $h(-1) = 0$, de unde $m = -4$.

**I. 9.117[T].** Fie polinomul $f = X^3 - 10X^2 + 29X - 20$. Să se determine rădăcinile $x_1$, $x_2$, $x_3$ ale lui $f$, dacă $x_1 + x_2 = x_3$.

**R.** Soluţiile ecuaţiei $f(x) = 0$ sînt $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$.

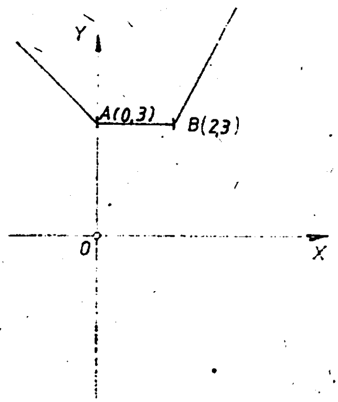
**I. 9.118[T].** Să se reprezinte grafic funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{pentru } x \leqslant 0 \\ 3 & \text{pentru } 0 \leqslant x < 2 \\ 2x - 1 & \text{pentru } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Să se determine pentru ce valori reale ale lui $x$ este adevărată relația:

$$f(x) + f(-x) = 6.$$

**R.** 1) Graficul este reprezentat în figura de mai jos. Singurul număr $x$ care verifică egalitatea $f(x) + f(-x) = 6$, este $x = 0$.




**I. 9.119ᵀ.** Să se rezolve ecuația:

$$1\frac{1}{7} + \left(\frac{55}{16} : \frac{\sqrt{756,25}}{\frac{3}{2}x - 9}\right) \cdot \frac{16}{21} = 2.$$

**R.** Soluția este $x = 12$.

**I. 9.120ᵀ.** 1). Să se determine numerele reale $p$ și $q$ $(p \neq q)$ astfel încît ecuația $x^2 + px + q = 0$ să aibă rădăcinile $p$ și $q$.

**R.** 1). Punînd condiția ca $p$ și $q$ să verifice ecuația obținem soluțiile:

$$p = 1, \quad q = -2.$$

**I. 9.121ᵀ.** a) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:

$$\left(\frac{1}{2} + 2x\right)^3 + \left(\frac{1}{2} - 2x\right)^3 \leqslant 1.$$

b) Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și $a + b = 1$ să se arate că:

$$a^3 + b^3 \geqslant \frac{1}{4}.$$

**R.** a) Mulțimea soluțiilor inecuației este:

$$\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right].$$

b) Se are în vedere că $a + b = 1$ implică $ab \leqslant \frac{1}{4}$.

**I. 9.122**$^{\mathrm{T}}$. Să se arate că pentru orice număr întreg $x$ are loc inegalitatea $9x^2 - 9x + 2 \geqslant 0$.

**R.** Vom determina mai întîi numerele reale $x$ care satisfac inegalitatea :

$$9x^2 - 9x + 2 \geqslant 0.$$

Rădăcinile ecuației $9x^2 - 9x + 2 = 0$ sînt $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Rezultă că mulțimea soluțiilor reale ale inecuației este $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$. Cum în intervalul $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ nu se află nici un număr întreg, rezultă afirmația enunțului.

**I. 9.123**$^{\mathrm{T}}$. Fie $E(x) = \dfrac{x^2 + (m+1)x + m + 2}{x^2 + x + m}$. Să se determine valorile lui $m$ astfel ca $E(x) > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Pentru ce valori ale lui $m$, expresia are sens, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$?

**R.** Condiția revine la a impune ca discriminantul numărătorului să fie strict negativ și discriminantul numitorului să fie strict negativ, intersectînd soluțiile obținute în cele două cazuri. Se obține $m \in \left(\frac{1}{4}, 1+2\sqrt{2}\right)$.

Expresia are sens pentru $m > \frac{1}{4}$.

**I. 9.124**$^{\mathrm{T}}$. Fie $x_1$ și $x_2$ rădăcinile ecuației $2x^2 + 2(m+2)x + m^2 + 4m + 3 = 0$, unde $m$ este un parametru real. Pentru ce valori ale lui $m$ are loc inegalitatea :

$$|x_1 + x_2 + 3x_1x_2| < 1 ?$$

**R.** Inecuația se scrie :

$$-2 < 3m^2 + 10m + 5 < 2$$

de unde se obține :

$$m \in (-3, -7/3) \cup (-1, -1/3).$$

**I. 9.125**$^{\mathrm{T}}$. Să se arate că egalitatea :

$$\sqrt[3]{20 + a\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - a\sqrt{2}} = 4, \quad a \in \mathbb{R},$$

are loc dacă și numai dacă $\cancel{x}$ a $= 14$ sau $a = -14$.

**R.** Se ridică la cub.

8/125 **I. 9.126**$^{\mathrm{T}}$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ și apoi să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația :

I.3.[illegible]/179 $$x^4 - x^3 + ax^2 + 2x + b = 0$$

știind că admite rădăcina $x_1 = 1 + i$.

**R.** Ecuaţia fiind cu coeficienţi reali admite şi rădăcina $1 - i$. Atunci polinomul se divide cu $[X - (1 + i)] \cdot [X - (1 - i)] = X^2 - 2X + 2$. Punînd condiţia:

$$X^4 - X^3 + aX^2 + 2X + b = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + cX + d)$$

obţinem soluţiile:

$$c = 1 \,;\; d = a = 0 \,;\; b = d = 0,$$

deci, celelalte două rădăcini ale ecuaţiei sînt:

$$x_3 = 0, \; x_4 = -1.$$

**I. 9.127^T.** Fiind dată ecuaţia $z^3 - 27 = 0$, se cere:

a) Să se rezolve ecuaţia în mulţimea numerelor complexe.

b) Rădăcinile ecuaţiei fiind notate cu $z_1, z_2, z_3$, să se scrie $z_1, z_2, z_3$ sub formă trigonometrică.

c) Să se arate că:

$$z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 81.$$

**R.** Rădăcinile ecuaţiei sub formă trigonometrică sînt:

$$z_k = 3\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right), \; k \in \{0, 1, 2\},$$

Aplicînd formula lui MOIVRE, adică:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,$$

obţinem:

$$z_k^3 = 3^3(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi) = 3^3,$$

de unde rezultă egalitatea de la punctul c).

**I. 9.128^T.** Folosind forma trigonometrică a numărului complex, să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $z^8 - 2z^4 + 2 = 0$.

**R.** Cu notaţia $z^4 = t$, se obţine ecuaţia:

$$t^2 - 2t + 2 = 0.$$

cu rădăcinile $t_1 = 1 + i$, $t_2 = 1 - i$, de unde soluţiile ecuaţiei date sînt:

$$z_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right),$$

$$k \in \{0, 1, 2, 3\},$$

$$z_k' = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right),$$

$$k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

#/125

**I. 9.129<sup>T</sup>.** Fie ecuaţia:

$$x^4 - ax^3 - ax + 1 = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

a) Să se rezolve ecuaţia în $\mathbb{C}$ în cazul $|a| = 1$.

b) Pentru $|a| < 1$, să se arate că toate rădăcinile ecuaţiei date au modulul egal cu 1.

**R.** a) Din faptul că $|a| = 1$ deducem $a = 1$ sau $a = -1$ şi deci ecuaţia dată conduce la ecuaţiile:

$$x^4 - x^3 - x + 1 = 0$$

respectiv:

$$x^4 + x^3 + x + 1 = 0.$$

Prima ecuaţie conduce la:

$$(x - 1)^2 (x^2 + x + 1) = 0$$

iar a doua:

$$(x + 1)^2 (x^2 - x + 1) = 0,$$

de unde deducem că pentru $a = 1$ avem rădăcinile $x_1 = x_2 = 1$ şi $x_3$, $x_4$ sînt rădăcinile cubice complexe ale unităţii, iar pentru $a = -1$ avem $x_1 = x_2 = -1$ şi $x_3$, $x_4$ sînt rădăcinile cubice complexe ale lui $-1$.

b) Vom da acestui punct mai multe soluţii, după cum urmează:

Fi ...

*Soluţia I.*

Dacă:

$$f(x) = x^4 - ax^3 - ax + 1 = 0$$

atunci $x \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. În adevăr, să presupunem că $x \in \mathbb{R}$ şi:

$$x^4 - ax^3 - ax + 1 = 0$$

adică $x \in \mathbb{R}$ şi:

$$x^4 + 1 = ax(x^2 + 1)$$

sau încă:

$$x^4 + 1 = |a|\,|x|\,(x^2 + 1)$$

sau:

$$x^4 + 1 < |x|\,(x^2 + 1)$$

sau:

$$|x|^4 - |x|^3 - |x| + 1 < 0$$

sau:

$$|x|^3 (|x| - 1) - (|x| - 1) < 0$$

sau:

$$(|x| - 1)^2 (|x|^2 + |x| + 1) < 0$$

ceea ce este absurd. Cu aceasta am demonstrat că ecuaţia nu poate avea rădăcini reale dacă $|a| < 1$.

Să mai observăm că pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$ avem $x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ şi deci, dacă $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{C}^*$, atunci $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, $x \in \mathbb{C}^*$, şi reciproc.

Fie $y = x + \frac{1}{x}$. În acest caz avem că $f(x) = x^2 g(y)$ unde $g(y) = y^2 - ay - 2$ şi prin urmare $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{C}^*$, dacă şi numai dacă $g(y) = 0$, $y \in \mathbb{R}^*$. În adevăr, egalitatea $g(y) = 0$ este echivalentă cu :

$$y^2 - ay - 2 = 0$$

adică cu :

$$\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2 + 8}{4} = 0$$

adică cu soluţia :

$$y \in \left\{\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 8}}{2}, \ \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 8}}{2}\right\} \subset \mathbb{R}.$$

Totodată avem :

$$|y| \leqslant \frac{|a|}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 8}}{2} < \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2,$$

au $y^2 < 4$, adică $y^2 - 4 < 0$.

Din $y = x + \frac{1}{x}$ deducem $x^2 - xy + 1 = 0$, de unde obţinem:

$$x \in \left\{\frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}\right\} \text{ deci } x \in \left\{\frac{y}{2} \pm i\frac{\sqrt{4 - y^2}}{2}\right\}$$

de unde deducem :

$$|x|^2 = \frac{y^2}{4} + \frac{4 - y^2}{4} = 1$$

adică $|x| = 1$.

*Soluţia a II-a.* Fie :

$$f = x^4 - ax^3 - ax + 1 = (x^2 - 2Ax + 1)(x^2 - 2Bx + 1)$$

de unde, prin identificarea coeficienţilor, deducem :

$$A + B = \frac{a}{2}, \ A \cdot B = -\frac{1}{2}$$

adică $A$ şi $B$ sînt soluţiile ecuaţiei :

$$t^2 - \frac{a}{2}t - \frac{1}{2} = 0$$

adică ale ecuației:

$$2t^2 - at - 1 = 0$$

care are soluțiile $t_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+8}}{4} \in \mathbb{R}$ deci cu:

$$|t_{1,2}| \leqslant \frac{|a|}{4} + \frac{\sqrt{a^2+8}}{4} < \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Prin urmare, $A$, $B \in (-1, 1)$ și deci există $u$, $v \in (0, \pi)$ astfel încît:

$$A = \cos u, \quad B = \cos v.$$

Deci:

$$f = (x^2 - 2x \cos u + 1)(x^2 - 2x \cos v + 1).$$

Rezultă atunci că $f(x) = 0$ este echivalentă cu:

$$x^2 - 2x \cos u + 1 = 0$$

sau:

$$x^2 - 2x \cos v + 1 = 0$$

deci cu:

$$x_{1,2} = \cos u \pm \mathrm{i} \sin u\,; \quad x_{3,4} = \cos v + \mathrm{i} \sin v$$

de unde obținem $|x| = 1$.

*Soluția a III-a.* Cu notația $x + \frac{1}{x} = y$ deducem că ecuația $f(x) = 0$ este echivalentă cu:

$$g(y) = y^2 - ay - 2 = 0,$$

unde $y \in \mathbb{R}^*$.

În adevăr, să presupunem că $y \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ adică $y = u + \mathrm{i}v$, cu $u, v \in \mathbb{R}$, și $v \in \mathbb{R}^*$. Atunci din (1) deducem:

$$u^2 - v^2 + 2\mathrm{i}uv - au - av\mathrm{i} - 2 = 0$$

și:

$$2uv = av$$

ceea ce este echivalent cu:

$$u^2 - v^2 - au - 2 = 0$$

și:

$$u = \frac{a}{2}$$

adică este echivalent cu:

$$a^2 - 4v^2 - 2a^2 - 8 = 0$$

și:

$$u = \frac{a}{2}, \quad v^2 = -2 - \frac{a^2}{4} < 0,$$

ceea ce este absurd.

Prin urmare, $x + \frac{1}{x} = y \in \mathbb{R}^*$ și deci $x + \frac{1}{x} = \bar{x} + \frac{1}{\bar{x}} = y$, adică:

$$x + \frac{1}{x} = \bar{x} + \frac{1}{\bar{x}}. \tag{2}$$

Să arătăm acum că $x \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Din $y^2 - ay - 2 = 0$ deducem:

$$y^2 = ay + 2,$$

sau:

$$|y|^2 < |y| + 2$$

sau încă $|y|^2 - |y| - 2 < 0$ de unde $|y| \in (0, 2)$. Să presupunem deci că $x \in \mathbb{R}^*$. Avem de analizat două situații:

a) $x > 0$. În acest caz $y = x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ (am aplicat inegalitatea mediilor), iar aceasta contrazice $|y| \in (0, 2)$.

b) $x < 0$, atunci $-y = -x + \frac{1}{-x} \geqslant 2$, iar aceasta contrazice $|y| \in (0, 2)$. Cu aceasta am demonstrat că $x \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Din relația (2) avem:

$$y = x + \frac{1}{x} = \bar{y} = \bar{x} + \frac{1}{\bar{x}},$$

$x \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, adică $x \neq \bar{x}$ și deci:

$$x - \bar{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\bar{x}},$$

sau:

$$x - \bar{x} = \frac{\bar{x} - x}{x\bar{x}},$$

echivalent cu:

$$1 = \frac{1}{x\bar{x}},$$

de unde:

$$|x|^2 = 1,$$

sau:

$$|x| = 1.$$

## §.10. Şiruri numerice

**I. 10.1[M].** Să se scrie primii cinci termeni ai şirului, cu termenul al $n$-lea dat de formula:

a). $a_n = 2^{-n}$; b). $x_n = 5 + 4n$; c). $b_n = 10 - n^2$; d). $c_n = \dfrac{3n-2}{2+n}$;

e). $x_n = \dfrac{1+(-1)n}{2}$; f). $z_n = \sin\dfrac{n\pi}{9}$; g). $d_n = (-1)^n$; h). $a_n =$ $= \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n+2}$, i). $b_n = (-1)^n \cdot 7 + \dfrac{1}{n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$.

**R.** a). Avem $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = \dfrac{1}{4}$, $a_3 = \dfrac{1}{8}$, $a_4 = \dfrac{1}{16}$, $a_5 = \dfrac{1}{32}$; b). Avem $x_1 = 9$, $x_2 = 13$, $x_3 = 17$, $x_4 = 21$, $x_5 = 25$; c). $b_1 = 9$, $b_2 = 6$, $b_3 = 1$, $b_4 = -6$, $b_5 = -15$; d). $c_1 = \dfrac{1}{3}$, $c_2 = 1$, $c_3 = \dfrac{7}{5}$, $c_4 = \dfrac{5}{3}$, $c_5 = \dfrac{13}{7}$; e). $x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, $x_3 = -1$, $x_4 = -\dfrac{3}{2}$, $x_5 = -2$; f). $z_1 = \sin\dfrac{\pi}{9}$, $z_2 = \sin\dfrac{2\pi}{9}$, $z_3 = \sin\dfrac{\pi}{3}$, $z_4 = \sin\dfrac{4\pi}{9}$, $z_5 = \sin\dfrac{5\pi}{9}$; g). $d_1 = -1$, $d_2 = 1$, $d_3 = -1$, $d_4 = 1$, $d_5 = -1$; h). $a_1 = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}$, $a_2 = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}$, $a_3 = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{5}$, $a_4 = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}$, $a_5 = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{7}$; i). $b_1 = -6$ $b_2 = \dfrac{15}{2}$, $b_3 = -\dfrac{20}{3}$, $b_4 = \dfrac{29}{4}$; $b_5 = -\dfrac{34}{5}$.

**I. 10.2[M].** Să se găsească formula termenului al $n$-lea, $n \geqslant 1$, pentru fiecare din şirurile:

a). $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$; b). $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$; c). $3, -3, 3, -3, 3, \ldots$; d). $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{81}, \ldots$; e). $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}, \ldots$; f). $\operatorname{tg} 45°$, $\operatorname{tg} 22°30$; $\operatorname{tg} 11°55', \ldots$; g). $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \ldots$; h). $1, 9, 25, 49, 81, \ldots$

**R.** Avem a). $x_n = 2n - 1$; b). $x_n = 2n$; c). $x_n = 3(-1)^{n-1}$; d). $x_n = \dfrac{1}{3^n}$; e). $x_n = \dfrac{n}{n+1}$; f). $x_n = \operatorname{tg}\dfrac{45°}{n}$; g). $x_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{2^n}$; h). $x_n = (2n-1)^2$.

**I.10.3[M].** Şirul $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ are termenul general dat de formula $x_n = 6 - 4n$. Este termen al acestui şir numărul:

a). $-102$; b). $-132$; c). $100$; d). $150$?

**R.** a) Din $x_n = -102$ rezultă $6 - 4n = -102$ de unde $n = 27$. Deci $-102$ este al 27-lea termen al şirului. b) $x_n = -132$ implică $6 - 4n = -132$ de unde rezultă $n \notin \mathbb{N}^*$ deci $-132$ nu este termenul al şirului. c). Ecuaţia $x_n = 100$ nu are soluţie în mulţimea numerelor naturale. d). Nici ecuaţia $x_n = 150$ nu are soluţie în mulţimea numerelor naturale.

**I. 10.4<sup>M</sup>.** Este termen al şirului $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, unde $a_n = n^2 - 17n$, numărul:

a). $-30$; b). $-72$; c). $-100$?

**R.** a). Ecuaţia $n^2 - 17n = -30$ are soluţiile $n_1 = 2$, $n_2 = 15$, deci $a_2 = a_{15} = -30$; b). Ecuaţia $n^2 - 17n = -72$ are ca soluţii $n_1 = 8$, $n_2 = 9$, deci $a_8 = a_9 = -72$; c). Ecuaţia $n^2 - 17n = -100$ nu are soluţii în $\mathbb{N}^*$, deci $-100$ nu este termen al şirului.

**I.10.5<sup>M</sup>.** Să se scrie primii 6 termeni ai şirului $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dacă:

a). $b_1 = 1$, $b_{n+1} = b_n - 1$; b). $b_1 = 1$, $b_{n+1} = b_n + 2$; c). $b_1 = -2$, $b_{n+1} = 2b_n$; d). $b_1 = 8$, $b_{n+1} = \dfrac{1}{b_n}$; e). $b_1 = -1$, $b_2 = 1$, $b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$; f). $b_1 = 3$, $b_2 = 1$, $b_{n+2} = b_n - b_{n+1}$.

**R.** a). 1; 0; $-1$; $-2$; $-3$; b). 1; 3; 5; 7; 9; c). $-2$; $-4$; 8; $-16$; 32; d). 8; $\dfrac{1}{8}$; 8; $\dfrac{1}{8}$; 8; e). $-1$, 1, 0; 1; 1; f). 3; 1; 2; $-1$; 3.

**I.10.6<sup>M</sup>.** Un şir este definit prin formula de recurenţă:

$$(n + 2)(n + 1)\, a_{n+2} - n^2 a_n = 0$$

şi $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. Să se deducă termenul general.

**R.** Făcînd în relaţia dată $n = 1$ obţinem $6a_3 = a_1 = 0$, deci $a_3 = 0$ În general, $a_{2k-1} = 0$, $k \in \mathbb{N}^*$. Pentru $n$ par avem $a_n \neq 0$ şi deci:

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}.$$

Iterînd această relaţie obţinem:

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{2^2}{3 \cdot 4},$$

$$\frac{a_6}{a_4} = \frac{4^2}{5 \cdot 6},$$

$$\vdots$$

$$\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} = \frac{(2k)^2}{(2k+1)(2k+2)},$$

care, înmulţite, conduc la:

$$\frac{a_4}{a_2}\cdot\frac{a_6}{a_4}\cdots\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}}=\frac{2^2\cdot 4^2\ldots(2k)^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot\ldots(2k+1)(2k+2)}=$$

$$=\frac{2^{2k}(k!)^2}{\frac{(2k+2)!}{2}}=\frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!}$$

de unde:

$$a_{2k+2}=\frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!}.$$

**I.10.7[M].** Să se scrie primii patru termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)$, dacă:

a). $a_1=7$, $r=2$; b). $a_1=-3$, $r=5$; c). $a_1=1{,}3$, $a_2=0{,}3$; d). $a_1=\frac{2}{7}$, $a_2=\frac{1}{5}$.

**R.** a). 7; 9; 11; 13; b). $-3$; 2; 7; 12; c). 1,3; 0,3; $-0{,}7$; $-1{,}7$; d). $\frac{2}{7}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{4}{35}$; $\frac{1}{35}$.

**I.10.8[M].** Să se găsească primii doi termeni ai progresiei aritmetice $(b_n)$ dată astfel:

a). $b_1, b_2, 15, 21, 27, \ldots$; b) $b_1, b_2, -9, -2, 5, \ldots$

**R.** a) Raţia $r$ este egală cu diferenţa a doi termeni consecutivi, adică $r=27-21=6$. Deci $b_2=15-6=9$, $b_1=9-6=3$.

b). Avem $r=5-(1-2)=7$, deci $b_2=-9-7=-16$, $b_1=-16-7=-23$.

**I.10.9[M].** Dacă se cunosc doi termeni ai unei progresii aritmetice $(c_n)$:

a). $c_3=7$, $c_5=13$, să se găsească $c_9, c_2, c_{15}$.

b). $c_8=40$, $c_{20}=-20$, să se găsească $c_{16}; c_7, c_{19}$.

**R.** a). Avem $c_1+2r=7$, $c_1+4r=13$, de unde, prin scădere, $2r=6$, deci $r=3$, de unde $c_1=1$. Rezultă $c_9=c_1+8r=25$, $c_2=c_1+r=4$, $c_{15}=c_1+14r=43$.

b). Avem $c_1+7r=40$, $c_1+19r=-20$ de unde, prin scădere, $12r=-60$, deci $r=-5$, deci $c_1=75$. De aici, $c_{16}=c_1+15r=20$, $c_7=c_1+6r=45$, $c_{19}=c_1+18r=-15$.

**I.10.10[M].** Într-o progresie aritmetică $(a_n)$ se cunoaşte $a_1$ şi $r$. Să se găsească $a_n$, dacă:

a). $a_1=2$, $r=0{,}5$, $n=12$; b). $a_1=3$, $r=-1{,}5$, $n=19$;

c). $a_1=-2{,}5$, $r=-2$, $n=50$; d). $a_1=\frac{3}{7}$, $r=\frac{1}{3}$, $n=25$.

**R.** a). Avem $a_{12}=a_1+11r=3{,}5$; b). Avem $a_{19}=a_1+18r=-24$;

c). Avem $a_{50}=a_1+49r=-100{,}5$; d). $a_{25}=a_1+24r=\frac{59}{7}$.

**I.10.11^M.** Să se găsească primul termen $a_1$ al unei progresii aritmetice, dacă :

a). $a_{10} = 131,\ r = 12$ ; b). $a_{52} = -125,\ r = -5$ ;
c). $a_{200} = 0,\ r = -3$ ; d). $a_{44} = 13{,}5,\ r = 0{,}5$.

**R.** a) Avem $a_{10} = a_1 + 9r$, deci $131 = a_1 + 9 \cdot 12$, de unde $a_1 = 23$ ; b). Avem $a_{52} = a_1 + 51r$, deci $-125 = a_1 + 51(-5)$, de unde $a_1 = 130$ ; c). Avem $a_{200} = a_1 + 199r$, deci $0 = 199 \cdot (-3)$ de unde $a_1 = 597$.

**I.10.12^M.** Să se găsească primul termen și rația unei progresii aritmetice, dacă :

a). $c_5 = 27,\ c_{27} = 60$ ; b). $c_{47} = 74,\ c_{74} = 47$ ; c). $c_{20} = 0,\ c_{66} = -92$ ; d). $a_1 + a_7 = 42,\ a_{10} - a_3 = 21$ ; e). $a_2 + a_4 = 16,\ a_1 a_5 = 28$ ; f). $S_{10} = 8S_5$, $S_3 = -3$.

**R.** a). Deoarece $c_5 = c_1 + 4r,\ c_{27} = c_1 + 26r$, obținem sistemul $c_1 + 4r = 27,\ c_1 + 26r = 60$, de unde $r = \frac{3}{2},\ c_1 = 21$.

b). Avem sistemul $c_1 + 46r = 74,\ c_1 + 73r = 47$ de unde $r = 1,\ c_1 = 28$.

c). Avem sistemul $c_1 + 19r = 0;\ c_1 + 65r = -92$ cu soluția $r = -2$, $c_1 = 38$.

d). Avem sistemul $a_1 + (a_1 + 6r) = 42,\ (a_1 + 9r) - (a_1 + 2r) = 21$, de unde $r = 3,\ a_1 = 12$.

e). Avem sistemul $(a_1 + r) + (a_1 + 3r) = 16,\ a_1(a_1 + 4r) = 28$ cu soluțiile $(a_1, r) \in \{(2, 3),\ (14, -3)\}$.

f). Deoarece, în general, $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$, avem sistemul :

$$\begin{cases} \dfrac{2a_1 + 9r}{2} \cdot 10 = 8 \cdot \dfrac{2a_1 + 4r}{2} \cdot 5, \\ \dfrac{2a_1 + 2r}{2} \cdot 3 = -3 \end{cases}$$

ok!

adică, după rezolvarea lui, $a_1 = -\cancel{21}\ 7$, $r = \cancel{18}\ 6$.

**I.10.13^M.** Șirul $(y_n)$ este dat prin formula termenului al $n$-lea :
a). $y_n = 2n - 5$ ; b). $y_n = 10 - 7n$.
Să se demonstreze că șirul $(y_n)$ este o progresie aritmetică. Să se găsească primul termen al său și rația.

**R.** Șirul $(y_n)$ este progresie aritmetică dacă diferența a oricăror doi termeni consecutivi este aceeași (diferență egală cu rația). În cazul nostru : a). $y_{n+1} - y_n = 2(n+1) - 5 - (2n - 5) = 2$. Primul termen este $y_1 = -3$.

b). $y_{n+1} - y_n = 10 - 7(n+1) - (10 - 7n) = -7$. Primul termen este $y_1 = 3$.

**I. 10.14^M.** Să se găsească suma primilor 100 de termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)$, dacă :
a). $a_1 = 10,\ a_{100} = 150$ ; b). $a_1 = 5{,}5,\ a_{100} = 7{,}5$ ;

c). $a_1 = 2$, $r = -5$; d). $a_1 = -1$, $r = 1$.

**R.** Folosim formula $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$. Deci:

a). $S_{100} = \frac{10 + 150}{2} \cdot 100 = 8000$; b). $S_{100} = \frac{5{,}5 + 7{,}5}{2} \cdot 100 = 650$;

c). $S_{100} = \frac{2 \cdot 2 + 99(-5)}{2} \cdot 100 = -24550$; d). $S_{100} = \frac{2(-1) + 99 \cdot 1}{2} \cdot 100 =$
$= 4850$.

**I.10.15^M.** Cunoscînd suma $S_n$ a primilor $n$ termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)$, să se găsească:

a). primii cinci termeni ai progresiei, dacă $S_n = \frac{n^2}{4} - n$;

b). primul termen şi raţia progresiei, dacă $S_n = 2n^2 + 3n$.

**R.** a). Deoarece $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$ rezultă, prin scăderea acestor două relaţii, $a_n = S_n - S_{n-1}$. Obţinem $a_n = \frac{n^2}{4} - n - \left[\frac{(n-1)^2}{4} - (n-1)\right] = \frac{2n - 5}{4}$. Primii cinci termeni vor fi $a_1 = -\frac{3}{4}$, $a_2 = -\frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{4}$, $a_4 = \frac{3}{4}$, $a_5 = \frac{5}{4}$.

b). Avem $a_1 = S_1 = 5$, $S_2 = a_1 + a_2 = 14$, deci $a_2 = 9$. Rezultă $= a_2 - a_1 = 4$.

**I.10.16^M.** Să se rezolve ecuaţiile:

a). $1 + 7 + 13 + \ldots + x = 280$;

b). $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \ldots + (x + 28) = 155$.

**R.** a). Să observăm că 1, 7, 13 sînt termenii unei progresii aritmetice cu raţia $r = 6$. Fie $x = a_n = a_1 + (n-1)r = 1 + 6(n-1)$. Obţinem:

$$280 = 1 + 7 + 13 + \ldots + x = \frac{1 + 1 + 6(n-1)}{2} \cdot n$$

care conduce la soluţia convenabilă $n = 10$. Deci $x = 55$.

b) Numerele $1, 4, 7, \ldots, 28$ formează o progresie aritmetică cu raţia $r = 3$. Numărul termenilor acestei progresii este $n$, dat de ecuaţia $1 + 3(n - 1) = 28$, adică $n = 10$. Deci ecuaţia devine:

$$10x + \frac{1 + 28}{2} \cdot 10 = 155$$

de unde $x = 1$.

**I.10.17^M.** Să găsească suma primilor douăzeci de termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)$, dacă:

$$a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20.$$

**R.** Avînd în vedere că $a_6 = a_1 + 5r$, $a_9 = a_1 + 8r$, $a_{12} = a_1 + 11r$, $a_{15} = a_1 + 14r$, relația din ipoteză devine $4a_1 + 38r = 20$, sau $2a_1 + 19r = 10$. Deoarece $S_{20} = \frac{2a_1 + 19r}{2} \cdot 20$, rezultă $S_{20} = 100$.

**I.10.18**[M]**.** Este progresie aritmetică un șir, pentru care suma primilor $n$ termeni ai săi este dată de formula:

a). $S_n = n^2 - 2n$; b). $S_n = -4n^2 + 11$;

c). $S_n = 7n - 1$; d). $S_n = n^2 - n + 3$?

**R.** Fie $(a_n)$ o progresie aritmetică cu rația $r$. Avem $a_n = S_n - S_{n-1}$ și $r = a_n - a_{n-1} = S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2}$.

a). Avem:

$$r = n^2 - 2n - 2[(n-1)^2 - 2(n-1)] + (n-2)^2 - 2(n-2) = 2,$$

deci șirul este progresie.

b). Avem:

$$r = (-4n^2 + 11) - 2([-4(n-1)^2 + 11] + [-4(n-2)^2 + 11] = -8$$

deci șirul este o progresie.

c). Avem:

$$a_1 = S_1 = 6,\ a_2 = S_2 - a_1 = 13 - 6 = 7,\ a_3 = S_3 - a_1 - a_2 = 20 - 6 - 7 = 7.$$

Dar $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, deci șirul nu este o progresie.

d). Avem:

$$r = n^2 - n + 3 - 2[(n-1)^2 - (n-1) + 3] + (n-2)^2 - (n-2) + 3 = 2,$$

deci șirul este o progresie.

**I.10.19**[M]**.** Într-o progresie aritmetică avem $S_{10} = 100$, $S_{30} = 900$. Să se găsească $S_{50}$.

**R.** Deoarece $S_{10} = \frac{2a_1 + 9r}{2} \cdot 10$, $S_{30} = \frac{2a_1 + 29r}{2} \cdot 30$, rezultă sistemul:

$$5(2a_1 + 9r) = 100,$$
$$15(2a_1 + 29r) = 900$$

care conduce la $a_1 = 1$, $r = 2$. De aici, $S_{50} = \frac{2a_1 + 49r}{2} \cdot 50 = 2500$.

OK!

**I.10.20**[M]**.** Suma primilor $n$ termeni ai unui șir oarecare $(b_n)$ este dată de formula $S_n = n^2 - 2n + 5$. Să se găsească primii patru termeni ai acestui șir. Este acest șir o progresie aritmetică?

**R.** Fie $r$ rația, dacă șirul este, în adevăr, o progresie. Avem:

$$r = S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2} = n^2 - 2n + 5 - 2[(n-1)^2 - 2(n-1) + 5] + (n-2)^2 - 2(n-2) + 5 = 2.$$

Şirul este, în adevăr, o progresie.

**I.10.21^M.** Să se demonstreze că numerele :

a). $\dfrac{a}{x+1}$, $\dfrac{x+a-1}{2x}$, $\dfrac{x^2+a-1}{x(x+1)}$, $x \neq -1$, $x \neq 0$;

b). $(a^2-2ab-b^2)^2$, $(a^2+b^2)^2$, $(a^2+2ab-b^2)^2$

sînt în progresie aritmetică.

**R.** Se ştie că trei numere $m$, $n$, $p$ sînt în progresie aritmetică, dacă $2n = m + p$, sau $2n - m - p = 0$.

a). Avem :

$$2\frac{x+a-1}{2x} - \frac{a}{x+1} - \frac{x^2+a-1}{x(x+1)} =$$

$$= \frac{2(x+a-1)(x+1) - 2ax - 2(x^2+a-1)}{2x(x+1)} =$$

$$= \frac{2(x^2+x+ax+a-x-1) - 2ax - 2x^2 - 2a + 2}{2x(x+1)} =$$

$$= \frac{2x^2+2ax-2a-2-2ax-2x^2-2a+2}{2x(x+1)} = 0,$$

deci numerele sînt în progresie aritmetică.

b). Avem :

$$2(a^2+b^2)^2 - (a^2-2ab-b^2)^2 - (a^2+2ab-b^2)^2 =$$

$$= 2(a^4+2a^2b^2+b^4) - (a^4+4a^2b^2+b^4-4a^3b+$$

$$+4ab^3-2a^2b^2) - (a^4+4a^2b^2+b^4+4a^3b-2a^2b^2-4ab^3) = 0$$

deci numerele sînt în progresie aritmetică.

**I.10.22^M.** Să se demonstreze că dacă numerele $a$, $b$, $c$ sînt în progresie aritmetică, atunci şi numerele :

a). $a^2-bc$, $b^2-ca$, $c^2-ab$;

b). $b^2+bc+c^2$, $c^2+ca+a^2$, $a^2+ab+b^2$

sînt în progresie aritmetică.

**R.** a). Deoarece numerele $a$, $b$, $c$ sînt în progresie aritmetică, rezultă $b = \dfrac{a+c}{2}$. Trebuie să arătăm că :

$$2(b^2-ca) - (a^2-bc) - (c^2-ab) = 0.$$

Avem :

$$2(b^2-ca) - (a^2-bc) - (c^2-ab) = 2b^2 - 2ac - a^2 + bc - c^2 +$$

$$+ ab = 2\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - 2ac - a^2 + \left(\frac{a+c}{2}\right)c - c^2 + a\left(\frac{a+c}{2}\right) =$$

$$= \frac{a^2+2ac+c^2}{2} - \frac{4ac}{2} - \frac{2a^2}{2} + \frac{ac+c^2}{2} - \frac{2c^2}{2} + \frac{a^2+ac}{2} = 0.$$

b). În aceeaşi ipoteză $b = \dfrac{a+c}{2}$ avem:

$$2(c^2 + ca + a^2) - (b^2 + bc + c^2) - (a^2 + ab + b^2) =$$
$$= 2c^2 + 2ca + 2a^2 - b^2 - bc - c^2 - a^2 - ab - b^2 =$$
$$= 2c^2 + 2ca + 2a^2 - \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+c}{2}\right)c - c^2 - a^2 -$$
$$- a\left(\frac{a+c}{2}\right) - \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = 0.$$

Reciproc, să presupunem că $a^2 - bc$, $b^2 - ac$, $c^2 - ab$ sînt în progresie aritmetică, adică:

$$b^2 - ac = \frac{(a^2 - bc) + (c^2 - ab)}{2}$$

sau, altfel scris:

$$2b^2 - 2ac - a^2 + bc - c^2 + ab = 0$$

sau încă:

$$2ab - a^2 - ac + 2b^2 - ab - bc + 2bc - ac - c^2 = 0$$

sau, grupînd:

$$a(2b - a - c) + b(2b - a - c) + c(2b - a - c) = 0$$

de unde:

$$(a + b + c)(2b - a - c) = 0.$$

Cum, prin ipoteză $a + b + c \neq 0$, rezultă $2b - a - c = 0$, deci $b = \dfrac{a+c}{2}$, adică $a, b, c$ sînt în progresie aritmetică.

Analog pentru punctul b).

**I.10.23**[M]. Să se determine $x$ astfel încît numerele:

a). $1 + x^2, (a + x)^2, (a^2 + x)^2$; $a \notin \{0, 2\}$

b). $a^2 + x, ab + x, b^2 + x$; $a \neq b$;

c). $a^2(b + x), b^2(a + x), x^2(a + b)$

să fie, separat, în progresie aritmetică.

**R.** a). Avem:

$$(a + x)^2 = \frac{1 + x^2 + (a^2 + x)^2}{2}$$

cu soluţia $\boxed{x = \dfrac{(a^2 - 1)^2}{2a(2 - a)};}$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

b). Nu există $x$ satisfăcînd enunţul.

c). $x_{1,2} = \dfrac{2b^2 - a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4b^4 - 4a^3b + 8ab^3}}{2}$.

**I. 10.24**[M]. Să se scrie primii cinci termeni ai progresiei geometrice $(b_n)$, dacă :

a). $b_1 = 6$, $q = 2$ ; b). $b_2 = -10$, $q = \frac{1}{2}$ ; c). $b_1 = -24$, $q = -0{,}5$ ;

d). $b_2 = 0{,}5$, $q = \sqrt{3}$.

**R.** a). Avem $b_1 = 6$, $b_2 = b_1q = 12$, $b_3 = b_1 q^2 = 24$, $b_4 = b_1q^3 = 48$, $b_5 = b_1q^4 = 96$ ;

b). Rezultă $b_1 = \frac{b_2}{q} = -20$. Deci $b_1 = -20$, $b_2 = -10$, $b_3 = b_2q = -5$, $b_4 = b_3q = -\frac{5}{2}$, $b_5 = b_4 q = -\frac{5}{4}$.

c). Avem $b_1 = -24$, $b_2 = b_1q = 12$, $b_3 = b_2q = -6$, $b_4 = b_3q = 3$, $b_5 = b_4q = -\frac{3}{2}$.

d). Rezultă $b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Deci $b_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $b_2 = \frac{1}{2}$, $b_3 = b_2 q = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_4 = b_3q = \frac{3}{2}$, $b_5 = b_4q = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

**I.10.25**[M]. Să se găsească primii doi termeni ai progresiei geometrice $(y_n)$ dată astfel :

a). $y_1 y_2$, 24, 36, 54, ..., ; b) $y_1 y_2$, 225 , $-135$, 81, ...

**R.** a). Rația $q$ este egală cu raportul a doi termeni consecutivi, adică $q = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$. Rezultă $y_2 = 24 : \frac{3}{2} = 16$, $y_1 = y_2 : \frac{3}{2} = \frac{32}{3}$.

b). Avem $q = \frac{-135}{225} = -\frac{3}{5}$. Deci $y_2 = 225 : \left(-\frac{3}{5}\right) = -375$ ; $y_1 = y_2 : \left(-\frac{3}{5}\right) = 625$.

**I. 10.26**[M]. Dacă se cunosc doi termeni ai unei progresii geometrice $(b_n)$ :

a). $b_3 = 6$, $b_5 = 24$, să se găsească $b_7$, $b_9$, $b_{10}$ ;

b). $b_5 = 10$, $b_8 = -10$, să se găsească $b_6$, $b_{12}$, $b_3$.

**R.** a). Avem, în general, $b_k = b_1 q^{k-1}$. Obținem sistemul $b_1q^2 = 6$, $b_1q^4 = 24$ care, prin împărțire, conduc la $q^2 = 4$ și $b_1 = \frac{3}{2}$. Deci, $b_7 = b_1 q^6 = 96$, $b_9 = b_1q^8 = 384$. Pentru $b_{10} = b_1 q^9$, să observăm că din $q^2 = 4$ rezultă sau $q = 2$, sau $q = -2$. Deci, sau $b_{10} = 768$, sau $b_{10} = -768$.

b). Condițiile date conduc la sistemul $b_1q^4 = 10$, $b_1q^7 = -10$, de unde, prin împărțire, obținem $q^3 = -1$, deci $q = -1$ (discutăm numai despre progresii formate din numere reale). Deci $b_1 = 10$.
Atunci $b_6 = b_1q^5 = -10$, $b_{12} = b_1 q^{11} = -10$, $b_3 = b_1q^2 = 10$.

**I. 10.27**[M]. Este progresie aritmetică sau progresie geometrică şirul $(a_n)$, dacă:

*a*). $a_1 = 5$ şi $a_{n+1} = 2a_n$; b). $a_1 = 5$ şi $a_{n+1} = 2 + a_n$;

c). $a_1 = -8$ şi $a_{n+1} = \frac{1}{3} + a_n$; *d*). $a_1 = -8$ şi $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$?

În caz afirmativ să se indice şi raţia.

**R.** a). Deoarece $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$, şirul este o progresie geometrică cu raţia $q = 2$.

b). Deoarece $a_{n+1} - a_n = 2$, şirul este o progresie aritmetică cu raţia $r = 2$.

c). Şirul este o progresie aritmetică cu raţia $\frac{1}{3}$, căci $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}$.

d). Şirul este o progresie geometrică cu raţia $\frac{1}{3}$, căci $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$.

**I. 10.28**[M]. Să se scrie formula termenului al $n$-lea al progresiei geometrice date prin:

a). $b_1 = 2$, $b_{n+1} = 3b_n$; b). $b_1 = 4$, $b_{n+1} = (-3)b_n$;

c). $b_1 = 9$, $b_{n+1} = 2b_n$; d). $b_1 = 10$, $b_{n+1} = \frac{1}{5} b_n$.

**R.** a). Raţia este $q = 3$. Cum, în general, avem $b_n = b_1 q^{n-1}$, rezultă $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$;

b). Avem $q = -3$, deci $b_n = 4\,(-3)^{n-1}$;

c). Avem $q = 2$, deci $b_n = 9 \cdot 2^{n-1}$;

d). Avem $q = \frac{1}{5}$, deci $b_n = 10 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$.

**I. 10.29**[M]. Să se găsească primul termen şi raţia unei progresii geometrice, dacă:

a). $\begin{cases} a_2 - a_1 = -4 \\ a_3 - a_1 = 8 \end{cases}$; b). $\begin{cases} a_4 + a_1 = \frac{7}{16} \\ a_3 - a_2 + a_1 = \frac{7}{8} \end{cases}$;

c). $\begin{cases} a_4 = 25 \\ a_8 = 9 \end{cases}$; d). $\begin{cases} a_4 = -12 \\ a_7 = 23\frac{7}{16} \end{cases}$.

**R.** a). Deoarece, în general, $a_k = a_1 q^{k-1}$, rezultă sistemul:

$$\begin{cases} a_1 q - a_1 = -4, \\ a_1 q^2 - a_1 = 8, \end{cases}$$

sau:

$$\begin{cases} a_1(q-1) = -4, \\ a_1(q^2-1) = 8. \end{cases}$$

Prin împărţirea celei de-a doua ecuaţii la prima rezultă $q + 1 = -2$, deci $q = -3$. Atunci $a_1 = 1$.

b). Avem sistemul:

$$\begin{cases} a_1q^3 + a_1 = \frac{7}{16}, \\ a_1q^2 - a_1q + a_1 = \frac{7}{8}, \end{cases}$$

sau:

$$\begin{cases} a_1(q^3 + 1) = \frac{7}{16} \\ a_1(q^2 - q + 1) = \frac{7}{8}. \end{cases}$$

Prin împărţirea primei ecuaţii la a doua obţinem $q + 1 = \frac{1}{2}$, deci $q = -\frac{1}{2}$. Atunci $a_1 = -\frac{1}{2}$.

c). Avem sistemul:

$$\begin{cases} a_1q^3 = 25 \\ a_1q^7 = 9. \end{cases}$$

Prin împărţirea celei de-a doua ecuaţii la prima, obţinem $q^4 = \frac{9}{25}$, de unde (vorbim numai despre progresii formate din numere reale), $q_1 = \sqrt[4]{\frac{9}{25}} = \sqrt[2]{\frac{3}{5}}$, $q_2 = -\sqrt[2]{\frac{3}{5}}$. Pentru prima raţie obţinem $a_1 = 25 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$, iar pentru a doua $a_1' = -25\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$.

d). Avem sistemul:

$$\begin{cases} a_1q^3 = -12, \\ a_1q^6 = \frac{375}{16}. \end{cases}$$

Prin împărţirea celei de-a doua ecuaţii la prima se obţine $q^3 = -\frac{125}{64}$, deci $q = -\frac{5}{4}$. Rezultă $a_1 = \frac{768}{125}$.

**I. 10.30[M].** Să se calculeze sumele:

a). $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{15}$; b). $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \ldots - \frac{1}{2^{16}}$;

c). $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^{12}}$; d). $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \ldots + 2^{12}$;

e). $1 + x + x^2 + \ldots + x^{100}$; f) $x - x^3 + x^5 - \ldots - x^{17}$.

**R.** Formula care exprimă suma primilor $n$ termeni ai unei progresii geometrice $(a_n)$ este $S_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

a). Avem $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{15} = 1 \cdot \dfrac{1-2^{16}}{1-2} = 2^{16} - 1$;

b). Avem $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} - \ldots - \dfrac{1}{2^{16}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{16}}{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)} = \boxed{\dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^{16}}\right)}$;

c). Avem $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots + \dfrac{1}{3^{12}} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1 - \dfrac{1}{3^{12}}}{1 - \dfrac{1}{3}}\right) = \boxed{\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3^{12}}\right)}$;

d). Avem $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \ldots + 2^{12} = 1 \cdot \dfrac{1-(-2)^{13}}{1-(-2)} = \boxed{\dfrac{1}{3}\left(1 + 2^{13}\right)}$;

e). Avem $1 + x + x^2 + \ldots + x^{100} = \dfrac{1 - x^{101}}{1-x}$;

f). Avem $x - x^3 + x^5 - \ldots + x^{17} = x \cdot \dfrac{1-(-x)^{17}}{1-(-x)} = \dfrac{x}{1+x}(1 + x^{17})$. ?

?

**I. 10.31ᴹ.** Să se rezolve ecuațiile:

a). $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{99} = 0$;

b). $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{100} = 0$.

**R.** a) Ecuația devine:

$$\frac{1 - x^{100}}{1 - x} = 0$$

de unde $x^{100} - 1 = 0$ cu soluțiile reale $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Convine $x_2$.

b). Ecuația devine:

$$\frac{1 - x^{101}}{1 - x} = 0$$

de unde $x^{101} - 1 = 0$ cu soluția reală $x = 1$ care însă nu convine.

**I. 10.32ᴹ.** Fie $(y_n)$ o progresie geometrică, astfel încît suma primilor $n$ termeni ai săi este $S_n = 2(5^n - 1)$. Să se determine $S_4$, $y_1$, $y_2$.

**R.** Avem $S_4 = 2(5^4 - 1) = 1248$ și $y_1 = S_1 = 2(5 - 1) = 8$, $y_2 = S_2 - S_1 = 2(5^2 - 1) - 8 = 40$.

**I. 10.33ᴹ.** Este progresie geometrică un șir $(y_n)$, pentru care suma primilor $n$ termeni ai săi este dată de formula:

a). $S_n = n^2 - 1$; b). $S_n = 2^n - 1$; c). $S_n = 3^n + 1$?

**R.** a) Avem $y_1 = S_1 = 1^2 - 1 = 0$, deci, dacă șirul ar fi o progresie, am avea $y_k = y_1 q^{k-1} = 0$, $(\forall) k$, absurd căci ar rezulta $S_k = 0$, $(\forall) k \in \mathbb{N}^*$. Deci șirul nu este progresie geometrică.

b). Deoarece, în general, $S_n = y_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$, rezultă $S_1 = y_1 = 2^1 - 1 = 1$, și $S_2 = \dfrac{1-q^2}{1-q} = 2^2 - 1 = 3$, de unde $q = 2$. Rezultă progresia 1, 2, $2^2$, ..., $2^{n-1}$ care verifică.

c). Avem $y_1 = S_1 = 4$, $y_2 = S_2 - y_1 = 10 - 4 = 6$, $y_3 = S_3 - y_1 - y_2 = 28 - 6 - 4 = 18$, dar $y_2^2 \neq y_1 y_3$. Deci șirul nu este o progresie geometrică.

**I.10.34**[M]**.** Într-o progresie geometrică $(y_n)$ avem $S_3 = 40$, $S_6 = 60$. Să se găsească $S_9$.

**R.** Avem $S_3 = y_1 \dfrac{1-q^3}{1-q} = 40$, $S_6 = y_1 \dfrac{1-q^6}{1-q} = 60$ de unde rezultă sistemul:

$$\begin{cases} y_1 \dfrac{1-q^3}{1-q} = 40, \\ y_1 \dfrac{1-q^6}{1-q} = 60. \end{cases}$$

Prin împărțirea celei de-a doua ecuații la prima obținem ecuația $\dfrac{1-q^6}{1-q^3} = \dfrac{3}{2}$, de unde $q^3 = 1$ sau $q^3 = 1/2$, deci, sau $q = 1$ care nu verifică, și $q = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$. Atunci $y_1 = 80\left(1 - \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\right)$. Deci:

$$S_9 = y_1 \frac{1-q^9}{1-q} = 70.$$

9 kf

**I.10.35**[M]**.** Să se determine $x$ astfel încît numerele $a + x$, $b + x$, $c + x$ să fie în progresie geometrică. *Discuție.*

**R.** Numerele $m$, $n$, $p$ fiind în progresie geometrică, rezultă $n^2 = mp$. Deci $(b + x)^2 = (a + x)(c + x)$. Rezultă $x = \dfrac{b^2}{a + c - 2b}$. Trebuie ca $a + c - 2b \neq 0$.

**I.10.36**[M]**.** Se dau două numere $a$ și $b$. Să se determine numerele $x, y, z$ astfel încît să fie satisfăcute simultan condițiile:

a). $x, y, z$ sînt în progresie geometrică;

b). $x, y + a, z$ sînt în progresie aritmetică;

c). $x, y + a, z + b$ sînt în progresie geometrică.

Caz particular: $a = 4$, $b = 32$.

**R.** Avînd în vedere condițiile date, rezultă sistemul:

$$\begin{cases} y^2 = xz, \\ y + a = \dfrac{x+z}{2}, \\ (y+a)^2 = x(z+b). \end{cases}$$

Din a doua ecuație rezultă $y = \dfrac{x+z}{2} - a$, de unde, substituind în celelalte:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x+z}{2} - a\right)^2 = xz, \\ \left(\dfrac{x+z}{2}\right)^2 = x(z+b), \end{cases}$$

sau:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x+z}{2}\right)^2 - a(x+z) + a^2 = xz \\ \left(\dfrac{x+z}{2}\right)^2 = x(z+b). \end{cases}$$

Substituind valoarea expresiei $\left(\dfrac{x+z}{2}\right)^2$ din a doua egalitate în prima, obținem ecuația:

$$x(z+b) - a(x+z) + a^2 = xz$$

de unde $x = \dfrac{az - a^2}{b - a}$. Obținem, pentru $z$, ecuația:

$$(2a - b)^2 z^2 - 2az(2a^2 + 2b^2 - ab) - 4a^3b + 4a^2b^2 + a^4 = 0,$$

etc.

**I. 10.37**[M]**.** Să se cerceteze dacă există numere în progresie geometrică $b_1, b_2, \ldots, b_n$ unde $b_1$ este un număr dat astfel încît trei termeni consecutivi verifică, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^* - \{1, 2, 3\}$ relația:

$$b_k - 5b_{k-1} + 6b_{k-2} = 0.$$

Să se generalizeze considerînd relația:

$$\alpha b_k + \beta b_{k-1} + \gamma b_{k-2} = 0.$$

**R.** Punînd $b_k = b_1 q^{k-1}$, obținem:

$$b_1 q^{k-1} - 5b_1 q^{k-2} + 6b_1 q^{k-3} = 0.$$

Simplificînd cu $b_1q^{k-3}$ obţinem ecuaţia $q^2 - 5q + 6 = 0$, cu soluţiile $q_1 = 2$, $q_2 = 3$. Deci progresiile căutate sînt $(b_n)$ şi $(b'_n)$ cu $b_n = b_1 2^{n-1}$, $b'_n = b'_1 3^{n-1}$, cu $b_1, b'_1 \in \mathbb{R}_*$, arbitrare.

Procedînd analog pentru cazul general, obţinem ecuaţia $\alpha q^2 + \beta q^2 + \gamma = 0$, ale cărei rădăcini le notăm $q_1$, $q_2$.

Dacă $q_1 \neq q_2$, obţinem două progresii, iar dacă $q_1 = q_2$, una singură.

**I. 10.38**[P.]. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir ai cărui termeni sînt în progresie aritmetică, cu primul termen $a$ şi raţia $r \neq 0$. Atunci $(a_n)_{n\geq 1}$ posedă un subşir ai cărui termeni sînt în progresie geometrică dacă şi numai dacă $a/r$ este raţional.

**R.** Presupunem că $(a_n)_{n\geq 1}$ posedă un subşir a cărui termeni sînt în progresie geometrică şi fie :

$$a + ir,\ a + jr,\ a + kr,$$

trei termeni consecutivi ai progresiei, cu $i < j < k$, deci :

$$(a + jr)^2 = (a + ir)(a + kr),$$

sau :

$$a(2j - i - k) = r(ik - j)^2.$$

Dacă :

$$2j - i - k = 0,$$

atunci :

$$ik - j^2 = 0$$

deci :

$$(i - k)^2 = (i + k)^2 - 4ik = (2j)^2 - 4j^2 = 0$$

sau, echivalent :

$$i = k,$$

absurd. Rămîne că $2j - i - k \neq 0$, deci :

$$\frac{a}{r} = \frac{ik - j^2}{2j - i - k} \in \mathbb{Q}.$$

Invers, dînd la o parte un număr finit de termeni, putem presupune că toţi termenii şirului dat au acelaşi semn, spre exemplu strict pozitivi. Putem presupune, deci, că $a > 0$ şi $r > 0$. Cum :

$$\frac{a}{r} \in \mathbb{Q}$$

avem :

$$\frac{a}{r} = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

Deoarece numărul $(1 + q)^m - 1$, $(\forall) m \in \mathbb{N}$, se divide la numărul $(1 + q) - 1$ adică la $q$, avem că :

$$\frac{a(1 + q)^m - a}{r} = p\,\frac{(1 + q)^m - 1}{q} \in \mathbb{N},$$

deci $(\forall)\ m \in \mathbb{N}$, există $n = n(m) \in \mathbb{N}$, astfel încît:

$$a(1+q)^m = a + rn = a_{n+1},$$

deci:

$$(a(1+q)^m)_{m\geq 1}$$

este un subşir al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ şi are termenii în progresie geometrică.

**I. 10.39**PO. Se dau numerele întregi:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n\ .$$

unde $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Să se demonstreze că există un subşir:

$$a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_m}$$

al şirului dat, în care:

$$1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leq n$$

aşa încît numărul:

$$a_{k_1}^2 + a_{k_2}^2 + \ldots + a_{k_m}^2$$

să se dividă la $n$.

**R.** Se consideră următoarele $n+1$ numere:

$$0,\ a_1^2,\ a_1^2 + a_2^2,\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \ldots, a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2.$$

Printre aceste numere se găsesc cel puţin două, de exemplu:

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_j^2,\ a_1^2 + \ldots + a_k^2,$$

în care $j < k$, avînd aceleaşi resturi la împărţirea prin $n$, deci:

$$a_{j+1}^2 + \ldots + a_k^2$$

este divizibil prin $n$.

**I. 10.40**PO. Se consideră 11 numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ care satisfac condiţiile:

$$\text{a}^\circ).\ a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{11}\ ;$$

$$\text{b}^\circ).\ a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{11}^2 = 1.$$

Să se determine aceste numere astfel încît $a_3$ să fie cel mai mare posibil.

**R.** Din:

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{11}^2 = 1,$$

rezultă, avînd în vedere relaţia de ordine între numerele date, că:

$$1 = a_1^2 + a_2^2 + + \ldots + a_{11}^2 \geq 9a_3^2$$

deci:

$$a_3^2 \leq \frac{1}{9}.$$

adică putem lua $a_3 = \frac{1}{3}$.

Putem deci satisface enunţul luînd :

$$a_1 = a_2 = 0, \; a_3 = a_4 = \ldots = a_{11} = \frac{1}{3}$$

Putem generaliza, considerînd numerele $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încît :

$$a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n,$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 1,$$

punînd problema ca $a_k$ să fie maxim. În acest caz găsim :

$$a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0,$$

$$a_k = \ldots = a_n = \frac{1}{\sqrt{n-k+1}}$$

**I. 10.41**[PO]**.** Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine produsul primilor $n$ termeni ai şirului $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin relaţia de recurenţă :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2, \; (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*,$$

cunoscînd primul termen $u_1 = a > 0$.

**R.** Fie şirul $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin relaţia :

$$v_n = u_{n-1} v_{n-1},$$

unde $v_1 = \sqrt{a^2 - 4}$. Făcînd simplificarea în :

$$\prod_{k=2}^{n+1} u_{k-1} v_{k-1} = \prod_{k=2}^{n+1} v_k$$

deducem :

$$u_1 u_2 \ldots u_n = \frac{v_{n+1}}{v_1}.$$

Notînd :

$$a = x + \frac{1}{x}$$

are loc :

$$u_1 = x + \frac{1}{x}.$$

$$u_2 = x^2 + \frac{1}{x^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$u_n = x^{2^{n-1}} + \frac{1}{x^{2^{n-1}}},$$

fapt ce se demonstrează direct, folosind relația de recurență și egalitățile:

$$v_1 = x - \frac{1}{x},$$

$$v_2 = x^2 - \frac{1}{x^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$v_n = x^{2^n-1} - \frac{1}{x^{2^n-1}}.$$

Cu notațiile folosite rezultă:

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2-4}}{2},$$

$$\frac{1}{x} = \frac{a - \sqrt{a^2-4}}{2},$$

cu care $v_{n+1}$ devine:

$$v_{n+1} = \left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^n} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^n}.$$

Astfel, se obține:

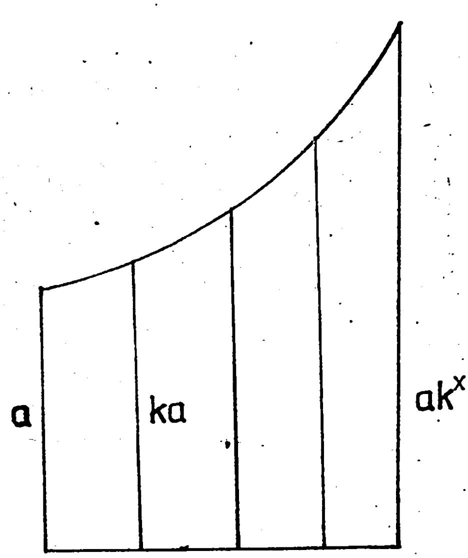
$$u_1u_2\ldots u_n = \frac{\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^n} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^n}}{\sqrt{a^2-4}}.$$

**I. 10.42PO.** Să se construiască un instrument muzical cu coarde (vezi figura), care să îndeplinească următoarele condiții:

i) Ultima coardă să fie de două ori mai lungă ca prima.

ii) Lungimile celorlalte coarde să fie în progresie geometrică.

iii) Să existe două coarde astfel încît una să fie cu lungimea de $\frac{3}{2}$ $\left(\text{respectiv a doua, cu lungimea de } \frac{4}{3}\right)$ ori mai lungă ca prima.




**R.** Să notăm cu $a$ mărimea lungimii primei coarde și cu $k$, rația progresiei geometrice. Ttrebuie găsite trei numere întregi pozitive, $x$, $y$, $z$, (care să reprezinte respectiv numărul de ordine al corzilor din enunț), astfel ca să avem:

$$ak^x = 2a;$$

$$ak^y = \frac{3}{2}a;$$

$$ak^z = \frac{4}{3}a,$$

cu $x > y > z$. Avem:

$$k^x = 2, \quad k^y = \frac{3}{2}, \quad k^z = \frac{4}{3}.$$

Logaritmînd într-o bază oarecare, avem:

$$\log k = \frac{\log 2}{x};$$

$$\log k = \frac{\log \frac{3}{2}}{y};$$

$$\log k = \frac{\log \frac{4}{3}}{z},$$

deci, obținem:

$$\frac{\log 2}{x} = \frac{\log \frac{3}{2}}{y} = \frac{\log \frac{4}{3}}{z}.$$

Astfel se observă că este imposibil pentru $x$, $y$, $z$ întregi pozitive, Deci construcția este imposibilă.

**I. 10.43**[PO]. Într-un șir finit de numere reale suma oricăror termeni consecutivi este pozitivă, iar suma oricăror 11 termeni consecutivi este negativă. Să se determine numărul maxim de termeni al unui astfel de șir.

**R.** Presupunem că există un șir finit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ cu proprietățile din enunț care are mai mult de 16 termeni și considerăm tabelul:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_7 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_8 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{17} \end{bmatrix}$$

Observăm că suma elementelor de pe fiecare linie (respectiv coloană) este pozitivă (respectiv negativă).

Aşadar, adunînd pe linii suma tuturor elementelor tabloului, obţinem un număr pozitiv, adunînd pe coaloane suma tuturor elementelor tabloului, obţinem un număr negativ, absurd. Rămîne că $n \leq 16$.

Să observăm că dacă considerăm $(x_i)_{1<i<n}$ un şir finit de numere reale cu proprietatea că suma oricăror $p$ termeni consecutivi este pozitivă, iar suma oricăror $q$ termeni consecutivi este negativă, avem atunci relaţia:

$$mn \leq p + q + d - 1,$$

unde $d = (p, q)_*$, $p, q \in \mathbb{N}$.

**I. 10.44**[PO]. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n$ numere reale nenule.

Atunci există $\alpha$ iraţional astfel încît toate numerele $\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n$ sînt iraţionale.

**R.** Se ştie că numerele $\sqrt{m}$, cu $m$ număr prim, sînt iraţionale. Să le notăm cu $\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \ldots$

Formăm tabloul infinit:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 x_1, \quad \alpha_1 x_2, \ldots, \alpha_1 x_n \\ \alpha_2 x_1, \quad \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_2 x_n . \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_m x_1, \quad \alpha_m x_2, \ldots, \alpha_m x_m \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}\right. \tag{1}$$

Presupunem prin absurd că proprietatea din enunţ este falsă. Atunci pe fiecare „linie" din (1), există cel puţin un număr raţional. Deoarece există o infinitate de linii şi numai un număr finit de coloane, rezultă că vor exista două numere raţionale pe o aceeaşi coloană, pe care o notăm cu $q$, iar numerele raţionale, respectiv cu $\alpha_i x_q$ şi $\alpha_j x_q$. Atunci, pe de o parte:

$$\frac{\alpha_i x_q}{\alpha_j x_q} \in \mathbb{Q},$$

pe de altă parte:

$$\frac{\alpha_i x_q}{\alpha_j x_q} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} = \sqrt{\frac{i}{j}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

absurd.

Prin urmare, $(\exists)\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încît:

$$\alpha x_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad (\forall)\ i \in \overline{1, n}.$$

**I. 10.45**[PT]. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$, este o progresie aritmetică, atunci:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}.$$

N

HX

27/03/96

**R.** Din identitatea:

$$(\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}})(\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}) = r,$$

unde $r$ este rația progresiei, înlocuind, obținem enunțul.

**I. 10.46^M** Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ un șir de numere reale. Să se arate că acest ~~șir formează~~ formează o progresie aritmetică dacă și numai dacă pentru orice $n$ număr natural avem:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

**R.** Presupunem că șirul dat e progresie aritmetică cu rația $r$. Atunci $a_{k+1} - a_k = r$, și deci:

$$\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}$$

de unde:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

Vom demonstra în continuare prin inducție, că șirul care satisface relația din enunț este progresie aritmetică, adică:

$$a_n = a_1 + (n-1) r, \qquad n > 3.$$

Din relația:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} = \frac{2}{a_1 a_3},$$

deducem: $a_1 + a_3 = 2a_2$, și deci $r = a_2 - a_1$.

Să presupunem acum că:

$$a_k = a_1 + (k-1)r, \; k = 1, \ldots, n.$$

și să arătăm că:

$$a_{n+1} = a_1 + nr.$$

Prin ipoteză, avem:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n},$$

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 a_{n+1}}.$$

De aici:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{n a_n - (n-1) a_{n+1}}{a_1 a_n a_{n+1}},$$

de unde $(n-1)a_{n+1} = n a_n - a_1$. De aici, $a_{n+1} = a_1 + nr$.

**I. 10.47[M].** Sa se arate că dacă $\frac{1}{a_2+a_3}$, $\frac{1}{a_3+a_1}$, $\frac{1}{a_1+a_2}$ sînt în progresie aritmetică, atunci $a_1^2$, $a_2^2$, $a_3^2$ sînt în progresie aritmetică.

**R.** Dacă numerele date sînt în progresie aritmetică, atunci:

$$\frac{1}{a_1+a_2}+\frac{1}{a_2+a_3}=\frac{2}{a_1+a_2},$$

de unde:

$$2a_2^2=a_1^2+a_3^2,$$

adică numerele $a_1^2$, $a_2^2$, $a_3^2$ sînt în progresie aritmetică.

**I. 10.48[PO].** Ce condiţie trebuie să îndeplinească primul termen şi raţia unei progresii aritmetice cu termeni întregi şi pozitivi pentru ca puterea a $n$-a a unui termen oarecare să fie termen al progresiei?

**R.** Dacă notăm cu $a$ primul termen al progresiei şi cu $r$ raţia, atunci un termen oarecare este $a+pr$, unde $p=0, 1, 2.$

Dacă $(a+pr)^n$ este termen al progresiei trebuie să avem $(a+pr)^n = a+qr$ pentru un anumit $q$ natural. Deducem:

$$q=C_n^1a^{n-1}p+C_n^2a^{n-2}p^2r+\ldots+p^nr^{n-1}+\frac{a^n-a}{r}.$$

Pentru ca $q$ să fie număr natural este necesar şi suficient ca $r$ să dividă pe $a^n-a$.

**I. 10.49[PO].** Arătaţi că există progresii aritmetice arbitrar de lungi, formate din numere naturale diferite, astfel încît fiecare 2 termeni ai progresiei sînt relativ primi.

Fie $m\in\mathbb{N}$, $m>1$. Numerele $m!\,k+1$, pentru $k=1, 2,\ldots, m$, sînt relativ prime, deoarece pentru numerele naturale $k$ şi $l$, cu $k<l\leqslant m$, dacă $d>1$ este divizorul comun al numerelor $m!\,k+1$ şi $m!\,l+1$, am avea:

$$d\,|\,l(m!\,k+1)-k(m!\,l+1)=l-k<m,$$

de unde $1<d<m$ şi $d\,|\,m!$. Asta înseamnă că din $d\,|\,km!+1$, avem $d\,|\,1$, contradicţie cu $d>1$.

**I. 10.50[PT].** Suma primilor 4 termeni ai unei progresii geometrice este 30, iar suma următorilor 4 termeni este 480. Determinaţi primul termen şi raţia progresiei.

**R.** Avem:

$$a\cdot\frac{1-q^4}{1-q}=30,\quad aq^4\cdot\frac{1-q^4}{1-q}=480.$$

Rezolvînd sistemul avem soluţiile:

$$a=2;\ q=2 \text{ sau } a=-6,\ q=-2.$$

**I. 10.51**[PT]**.** Fie $(a_n)$ o progresie aritmetică cu termeni pozitivi, astfel încît $a_2 = \sqrt{a_1 a_4}$.

Să se demonstreze că $a_4 . a_6, a_9$ sînt în progresie aritmetică.

Să se determine raţia.

**R.** Avem:

$$a_1 + r = \sqrt{a_1(a_1 + 3r)},$$

de unde $a_1 = r$. Aşadar $a_4 = 4a_1$, $a_6 = 6a_1$, $a_9 = 9a_1$, şi, evident, $a_4 \cdot a_9 = a_6^2$; $q = \frac{3}{2}$.

**I. 10.52**[PO]**.** Să se calculeze suma:

$$S = \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_k} + \frac{1}{a_2 a_3 \ldots a_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{a_n a_{n+1} \ldots a_{n+k-1}}$$

unde $(a_n)$ este o progresie aritmetică.

**R.** Dacă facem notaţia $p(n) = a_n a_{n+1} \ldots a_{n+k}$, avem:

$S = a_1 a_2 \ldots a_n + [(p(2) - p(1)) + (p(3) - p(2)) + \ldots + (p(n+1) - p(n)] \cdot \frac{1}{(k+1)r}$,

de unde:

$$S = a_1 a_2 \ldots a_k + \frac{a_{n+1} a_{n+2} a_{n+k-1} - a_1 a_2 \ldots a_{k+1}}{(k+1)\, r}.$$

## Capitolul II

# ARITMETICA ŞI TEORIA NUMERELOR

### 1. Aritmetica primitivă şi antică

Începuturile aritmeticii se pierd în negura vremurilor, dar vestigiile sînt foarte puţine şi de natură interpretabilă. Putem prezuma că strămoşii noştri aveau unele rudimente de aritmetică şi geometrie. Din paleoliticul superior ne-au rămas figuri geometrice ca puncte, linii, triunghiuri, pătrate, romburi şi chiar cercuri şi spirale ca ornamente pe pereţi de peşteri sau pe mobilier. Putea fi vorba de geometrie? Este greu de afirmat, dar şi de negat, dată fiind regularitatea şi alegerea figurilor. Paleoliticul superior este evaluat între 30.000 şi 10.000 ani î.e.n., precedat de paleoliticul mijlociu, între 100.000 şi 30.000 ani î.e.n. Din primul ne-au rămas crestături pe pereţi şi pe vergele de fildeş, care ar putea fi semne de răboj indicînd cunoaşterea unei numeraţii. Din cel de-al doilea dispunem de un baston de os cu crestături pe care cele 55 semne sînt împărţite în grupe de cîte cinci şi aşezate pe două şiruri. Era un memorator de calcul? Împărţirea în grupe de cinci ne îndeamnă să considerăm ca abac natural mîna cu cinci degete.

Aceste semne încurajatoare ne conduc să credem că în neolitic, cînd comerţul se dezvoltase, în intervalul 5000—2500 ani î.e.n., oamenii dispuneau de procedee aritmetice mai evoluate, dar vestigiile ne vor ajunge numai prin aritmetica egipteană şi babiloniană, a protoistoriei, a epocii metalelor. Racordarea se face prin papirusurile şi inscripţiile egiptene care amintesc de existenţa încă din mileniul al treilea î.e.n. a unui sistem de numeraţie zecimal, care ne întoarce la cele 55 semne grupate cîte cinci şi la gîndul că prima lor perfecţiunare a putut fi folosirea ambelor mîini ca abac.

Egiptenii aveau semne pentru numere naturale foarte mari, un semn special indica milionul, dar nu aveau semn pentru zero, deşi găsim lăsate spaţii goale acolo unde noi am pune astăzi un zero. Această scriere aveau inconveniente, dată fiind repetarea de pînă la 9 ori a semnului unei unităţi şi dificultatea de a efectua calcule cu ele, ceea ce se reflectă în greşelile pe care le găsim în calculele scribilor.

În ceea ce priveşte aritmetica, deşi apar cele patru operaţii elementare, ele se reduc la adunare, scăderea făcîndu-se prin compensaţie, iar înmulţirea prin dublări şi adunări succesive, împărţirea se deducea din înmulţire, efectuîndu-se în sens invers, adică se luau multiplii prin doi ai înmulţitorului şi se adunau pînă se realiza deînmulţitul. Fracţiile, cu excepţia lui 2/3, aveau toate numărătorul unu, ceea ce se explică poate prin caracterul practic al întregii aritmetici egiptene, scribii hotărînd să împartă, de exemplu, pîini sau cantităţi de cereale la mai mulţi oameni.

Împărţirea în părţi proporţionale era o operaţie importantă din acest punct de vedere, ca şi ridicarea la pătrat sau extragerea de rădăcini pătrate, precum şi proporţiile, progresia aritmetică şi chiar cea geometrică.

Evocarea începuturilor aritmeticii este impresionantă şi educativă pentru oricine, fiindcă arată cît de lungă a fost calea care a condus de la răboj la teoria analitică a numerelor. Desigur, putem ignora tot ce a fost cîndva şi ne putem bate joc de ignoranţa şi stîngăcia înaintaşilor, dar atunci, anticipînd şi exaltînd progresele fulgerătoare ale ştiinţei actuale şi angajîndu-ne în tunelul timpului spre viitor, ne vom da seama că, o privire retrospectivă de acolo asupra prezentului edificat şi glorificat de noi ne-ar putea pune în situaţia de primitivi, aşa cum facem noi astăzi privind în trecut.

De aceea, reîntorcîndu-ne la anticihitate, vom semnala că numeraţia babiloniană constituie un progres prin faptul că este *poziţională,* ceea ce ceilalţi antici nu au realizat, nici chiar romanii; în acelaşi timp, baza ei este *sexagesimală*, dar în interiorul fiecărui ordin de unităţi strîngeau unităţile cîte zece.

Aritmetica babiloniană este reprezentată pe tabele numerice prin care se dau rezultatele înmulţirilor, pătrate, cuburi, rădăcini pătrate sau cubice, precum şi aproximaţii ale lui $\sqrt{2}$ şi o metodă de calcul a rădăcinilor cubice. Este surprinzător faptul că alte tabele prezintă serii sau relaţii exponenţiale şi logaritmice, precum şi numere pitagorice, încă din secolul al XVIII-lea î.e.n. Se poate deduce cunoaşterea teoremei lui *Pitagora*, ca un rezultat de teoria numerelor. Dacă mai adăugăm regula de trei simplă sau împărţirea în părţi egale sau inegale, sîntem conduşi să ne exprimăm admiraţia pentru matematicienii babilonieni anonimi, fără a cunoaşte modele prin care ajungem la rezultatele înscrise în tabele. Această admiraţie creşte cînd luăm cunoştinţă de problemele pe care azi le încadrăm în algebră, dar care se pot rezolva şi fără recurgerea la ecuaţii de gradul I, şi care, sînt adunate pe tipuri, ca şi cum ar fi probleme din manuale.

Matematica elenă ne-a lăsat puţine documente autentice, cele de care dispunem fiind transmise prin epoca elenistică. În sec VI î.e.n., *Thales* îi atribuie lui *Pitagora* meritul de a fi introdus raţionamentul abstract geometric, de a fi descoperit iraţionalele şi de a fi înălţat numărul la rangul de principiu a tot ce există, ceea ce constituie o atitudine rustică faţă de numărul natural. *Numerele figurative* reprezintă modelul geometric al numerelor naturale şi jocurile cu ele pun în evidenţă proprietăţi remarcabile. Avem numere liniare, plane sau solide, după cum sînt figurate rectiliniu, în rînduri, formînd figuri plane sau paralelipipedice, piramidele etc.

Pitagoreicii au elaborat teoria numerelor pare şi impare, a rapoartelor, a iraţionalelor, pe baze geometrice. Ei descoperă că latura şi diagonala pătratului nu au o comună măsură, adică un raport raţional, iar teoria generală a rapoartelor este influenţată puternic de această descoperire prin care se constată că mărimile geometrice sînt în general incomensurabile şi numai excepţional comensurabile. În rezumat, aritmetica elenă era intuitivă şi tributară prin modelarea geometriei, ca atare limitată în posibilităţi, figura devenind simbol şi dînd posibilitatea unei înaintări spre abstracţie. Dar, cu toate acestea, aritmetica a trebuit să facă un salt calitativ pentru a căpăta autonomie şi rigoare, pentru a deveni o disciplină abstractă.

Nu avem informaţii directe asupra evoluţiei matematicii elene, dispunem însă de aprecierile lui *Platon* care, ca filozof, punea ştiinţa pe primul plan al activităţii intelectuale, iar matematicii îi acorda privilegiul maxim, astfel încît tradiţia ne spune că pe frontispiciul Academiei sale se gravase inscripţia: „Nimeni să nu intre dacă nu este geometru". El cunoştea toate preocupările matematicienilor epocii sale şi moştenirea celor dinaintea acestora şi concepea figurile geometrice ca modele idealizatoare ale celor din realitate, de asemenea, a aprofundat iraţionalele şi importanţa lor.

Cît despre *Aristotel*, acesta a manifestat rezerve faţă de matematică, regretînd că fusese aşezată în fruntea ştiinţelor, considerînd că ea este un mijloc de cercetare. În opera sa, el acordă matematicii trei capitole privind mecanica, liniile indivizibile şi problemele, ultimul părînd a fi o compilaţie ulterioară atribuite lui.

Gîndirea matematică a secolului al IV-lea în care a trăit *Platon* era consacrată teoriei iraţionalelor şi a poliedrelor regulate, ce s-a întîmplat în detaliu însă nu cunoaştem decît prin opera urmaşilor.

### 2. Aritmetica elenistică. Euclid. Arhimede, Diofant

Perioada elenistică începută în 325 î.e.n., după moartea lui *Alexandru cel Mare* este însă bogată în documente. Astfel, luăm cunoştinţă de opera lui *Euclid* în secolul al III-lea. Celebrul autor al *Elementelor* pune matematica pe baze axiomatice, ceea ce constituie un salt calitativ de amploare şi importanţă covîrşitoare. *Elementele* au fost tratatul de bază al matematicii elementare pînă în secolul al XIX-lea. Ele cuprind tot ce se ştia la acea epocă, într-o sistematizare care pune în lumină o concepţie unitară, geometrică, asupra cunoştinţelor privitoare la spaţiu, la numere şi la mărimi.

Împărţite în 13 cărţi, *Elementele* consacră geometriei plane primele patru cărţi, fără a îngloba asemănarea. Explicaţia o avem citind partea a doua formată din cărţile V şi VI. Cartea a V-a este consacrată unui studiu abstract al rapoartelor şi proporţiilor, deci priveşte aritmetica, iar cartea a VI-a aplică rezultatele cărţii a V-a în geometria plană.

Ne dăm seama de concepţia înaltă pe care o avea *Euclid* asupra matematicii. Geometru, ca toţi grecii, el avea însă un spirit analitic uimitor, astfel încît îl putem considera că primul mare aritmetician al antichităţii. Desigur, nu ştim care erau rezultatele sale originale, dar ca şi astăzi, autorul unui tratat de sinteză, gîndit original, păstrează meritele şi gloria pe care i le atribuie contemporanii şi apoi urmaşii.

Dar *Euclid* nu se oprește la elucidarea problemei rapoartelor care tulburase pe predecesorii săi, ci consacră cărțile VII, VIII și IX *teoriei numerelor întregi* și manualele noastre școlare cuprind și astăzi împărțirea cu rest, care este teorema fundamentală a teoriei numerelor, algoritmul lui *Euclid* care conduce la cel mai mare divizor comun a două numere naturale, descompunerea în factori primi și teorema de existență a unui număr infinit de numere prime, iar în cartea a VIII-a se studiază progresiile geometrice, cu scopul de a se stabili cazurile în care rădăcinile de ordinul $n$ ale unui întreg sau ale unui număr rațional sînt raționale.

În sfîrșit cartea a IX-a este consacrată numerelor iraționale, unde folosirea algoritmului lui *Euclid* pentru găsirea celei mai mari măsuri comune, cînd mărimile sînt incomensurabile sau pentru a decide incomensurabilitatea dacă algoritmul nu se închide după un număr finit de pași.

Marele *Arhimede* s-a ocupat de numerație, care era în suferință la greci. Aceștia foloseau sistemul zis atic analog celui roman, ambele fiind improprii calculelor mai complicate. Începînd din secolul al III-lea î.e.n. ei au adoptat o numerație semipozițională și zecimală în care se foloseau ca cifre primele nouă litere ale alfabetului grecesc, următoarele nouă litere fiind atribuite zecilor și următoarele, sutelor.

Pentru a scrie miile se relua alfabetul, dar cu un indice jos, apoi zecile de mii se marcau cu M sub semnul unităților etc. *Arhimede* își propune să perfecționeze sistemul pentru a scrie numere foarte mari, cu care figurează numărul grăunțelor de nisip din sfera cerească sau numărul 10 la puterea 800 milioane și scrie chiar un tratat, *Arenarium* asupra numerației.

Aritmetica nu fusese cultivată cu aceeași strălucire ca geometria în perioada elenă decît de școala pitagoreică și numai din punct de vedere filozofic, numerele figurative, mistica lor, descoperirea iraționalelor care o zguduia, fiind mai degrabă o analiză a esenței numărului natural, care conduce la numărul rațional prin compararea lungimilor și la cel irațional prin incomensurabilitatea raportului latură-diagonală în pătrat sau dreptunghi. Teorema lui Pitagora a condus în primul rînd la numerele pitagorice, pe care le cunoșteau și babilonienii și chiar și egiptenii prin sfoara cu nodurile la distanțele 3, 4, 5. Pitagoricienii cunoșteau mediile aritmetică, geometrică și armonică sub forme de rapoarte egale în care un termen era necunosut, formele actuale revenind la rezolvarea unor ecuații de gradul I sau II, ceea ce ei făceau prin construcții geometrice. *Euclid* este cel care fundamentează aritmetica și teoria numerelor reale, dar îi lipsește axioma lui *Arhimede*, astfel încît continuul aritmetic așteaptă secolul al XIX-lea și pe *Dedekind* pentru a-l desăvîrși.

Iraționalitatea rădăcinilor pătrate ale numerelor, care nu sînt pătrate perfecte, a fost pusă în lumină de *Teodor din Cirene* încă din secolul al V-lea, apoi *Tectet* în secolul VI dezvoltă sistematic teoria numerelor iraționale, introducînd radicali suprapuși și combinații lineare ale acestora.

În afară de elementele lui *Euclid* mai dispunem, ca urmare a școlii pitagoreice, de două tratate inspirate de concepțiile școlii lui *Pitagora*: primul, datorat lui *Nicomah*, apărut în jurul anului 100 î.e.n. este intitulat *„Introducere în aritmetică”* și constituie o sinteză a cunoștințelor aritmetice pe care evul mediu o păstrează, o cultivă și o transmite Renașterii. Pe la anul 130 î.e.n. o altă operă intitulată *„Expunerea celor utile pentru lectura lui Platon”*, este elaborată de *Theon din Smirna* și cuprinde probleme de aritmetică, aplicații în muzică, descoperite de pitagoricieni, precum și aplicații în astronomie. Este remarcabilă influența lui *Platon* care, deși n-a fost el însuși matematician, a acordat matematicii locul de frunte în întreaga știință. Faptul că la baza cărții lui *Theon* este gîndirea filozofică platoniciană se reflectă în teoremele de non existență pe care el a fost primul care le-a enunțat și demonstrat prin reducerea la absurd. Exemple, care s-au transmis și amplificat pînă astăzi, sînt cele prin care se stabilește că nu există pătrate perfecte de formele $3n + 2$, $4n + 2$ sau $4n + 3$, specifice teoriei numerelor.

În ceea ce privește șirurile de numere naturale, școala elenistică ne-a transmis numeroase cunoștințe, folosite și în prezent, ca numerele triunghiulare cu baza $n$, straturile succesive fiind $n - 1, n-2, \ldots, 1$ și a căror sumă este $n(n + 1)/2$. Numerele piramidale se obțineau prin însumarea celor *triunghiulare, pătratele perfecte* și *cuburile* se obțineau adunînd bilele dispuse în pătrate și cuburi, apoi prin sudarea numerelor triunghiulare se obțineau numere poligonale. Se poate lua ca exemplu de aplicare a raționamentului prin *inducție matematică* formarea numărului $m$ — poligonal de ordinul $n$, a cărui expresie este: $\frac{1}{2}n[2 + (n - 1)(m - 1)]$, obținut de *Hipsicle* în secolul II.

Exemplele transmise dovedesc preocuparea unor gînditori de înaltă fecunditate ca *Arhimede*, care evaluase suma pătratelor numerelor naturale sau suma primelor numere impare sau *Nicomah*, care descoperise că numerele de forma 1, 3+5, 7+9+11, 13+15+17+19, sînt cuburile numerelor naturale consecutive şi că orice pătrat perfect este suma a două numere triunghiulare.

Aritmetica geometrică a fost un titlu de glorie, dar şi o slăbiciune a grecilor antici, fiindcă posibilităţile acesteia erau limitate la modelele geometrice corespunzătoare. *Euclid* a eliberat-o de servitutea modelelor; deşi geometru, a folosit raportul mărimilor, avînd ca model cel al lungimilor. La *Euclid*, instrumentul de bază a fost formula împărţirii cu rest, algoritmul său fiind aplicabil mărimilor comensurabile, ca şi celor incomensurabile. Este remarcabilă aici concepţia sa despre algoritme infinite, fiindcă pe aceasta se bazează incomensurabilitatea.

Ultimul salt calitativ, pe care aritmetica antichităţii îl marchează, este cel realizat de *Diofant*, despre a cărui viaţă se ştie prea puţin, putînd fi plasată între anii 150 î.e.n. şi 350 î.e.n. Opera sa pare însă integrabilă în mijlocul secolului al III-lea î.e.n. El publică un tratat în 13 cărţi intitulat „*Aritmetica*" şi din care numai 6 s-au transmis pînă astăzi. Adresîndu-se cititorului în prefaţa primei cărţi, *Diofant* îl încurajează să înveţe să descopere „probleme cu numere", asigurîndu-l că folosind ajutorul demonstraţiilor sale, va izbuti să le înţeleagă. El concepe numărul ca format din unităţi şi în consecinţă procesul de formare poate fi extins la infinit.

Păstrează o viziune pitagoreică prin aceea că dă ca exemple de numere pătratele, dar le prezintă ca rezultînd din înmulţirea numărului cu el însuşi, numărul fiind numit latura pătratului. De asemenea, defineşte bipătratele ca pătrate înmulţite cu ele însele, pătratele-cuburi, deci puterile 5, ca rezultatul înmulţirii unui pătrat cu un cub etc. Problemele de aritmetică sînt concepute ca rezultînd din *operaţii* asupra numerelor: sume, diferenţe, produse, rapoarte între ele sau între ele şi rădăcinile lor.

Prin urmare, *Diofant* concepe aritmetica operaţional, algebric iar problemele sînt fie determinate din punct de vedere operaţional, fie *nedeterminate*, acestea fiind cazul majorităţii. Este o poziţie originală a acestui aritmetician şi algebrist, care a depăşit cu mult posibilităţile veacului său. El a fost ignorat de urmaşi şi redescoperit în timpul Renaşterii, pentru a-şi păstra actualitatea pînă în zilele noastre.

El caută numai soluţii raţionale, pozitive, unele întregi, altele fracţionare. În general, caută soluţii particulare, care nu se pot generaliza şi care cer artificii de gîndire şi de calcul ingenioase, de care beneficiem şi în prezent. El arată, de exemplu, că numerele de forma $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ se descompun în două moduri ca sume de pătrate. Este vorba de întregi, dar rezultatul este valabil pentru orice numere reale. Tot el arată că orice număr natural este suma a cel mult patru pătrate. Într-o formulare algebrică, ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = n$, cu $n$ natural, are totdeauna soluţii în mulţimea numerelor naturale. Ca exemplu de problemă cu soluţii raţionale este următoarea: să se găsească două numere cu proprietatea ca pătratul unuia dintre ele, micşorat cu celălalt număr, să fie tot un pătrat avînd ca soluţii $\frac{3}{5}$ pentru numărul mai mic şi $\frac{11}{5}$ pentru cel mai mare dintre ele.

*Diofant* este creatorul a ceea ce numim astăzi „*Analiza diofantică*", avînd ca obiect ecuaţiile diofantice, de tip nedeterminant şi admiţînd soluţii întregi sau raţionale.

Ecuaţia diofantică de gradul I, $ax + by = c$, cu $a$, $b$, $c$ naturale era, rezolvată de *Diofant* în numere naturale, dar ea se extinde şi la numere întregi. Tot el a introdus ecuaţia nedeterminată de gradul II, de forma $y^2 = ax^2 + bx + c$, cu coeficienţi întregi, pe care o rezolva în numere raţionale; un caz particular, $y^2 = ax^2 + 1$, a fost introdus de *Arhimede*.

Insistăm asupra operei lui *Diofant* pentru că el a introdus raţionamente ingenioase de natură aritmetică, pe care şi matematicienii actuali le folosesc în cazul ecuaţiilor şi sistemelor cu mai puţine necunoscute decît ecuaţii, cărora li se cer soluţii întregi sau raţionale.

*Diofant* a găsit pentru sistemul $y^2 = ax + b$; $z^2 = cx + d$ o soluţie raţională, $a$, $b$, $c$, $d$ fiind numere raţionale. Tot el a rezolvat în numere raţionale ecuaţia $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, cu $a$ şi $b$ întregi, ecuaţie care nu admite totdeauna soluţii întregi.

### 3. Aritmetica arabă şi europeană medievală

Metodele lui *Diofant* nu vor fi înţelese decît cînd algebra geometrică a geometrilor greci şi algebra aritmetică a lui *Diofant* vor fi sintetizate împreună şi vor lua naştere geometria analitică, algebra operaţională şi teoria numerelor.

În aşteptare, acumulări cantitative, precum şi salturi calitative, ca şi salturi tehnice se vor aduna în patrimoniul universal al matematicii. Dintre acestea un loc important se cuvine aritmeticii arabe.

Matematica arabă se caracterizează printr-o sinteză între preocupările legate de practică sau de astronomie, geografie şi optică şi acestea legate de practică şi, pe de altă parte, promovarea gîndirii teoretice moştenite de la greci.

Astfel, aritmetica a fost dezvoltată intens, începînd cu algoritmele şi ajungînd la teoria proporţiilor şi a numărului real. În ceea ce priveşte numeraţia, arabii au fost consideraţi de europeni pe nedrept inventatorii cifrelor „*arabe*". Acestea sînt indiene, ca şi scrierea poziţională, pe care arabii le-au adoptat la începutul secolului al IX-lea e.n. Unul din meritele cele mai prestigioase ale arabilor a fost cultivarea şi perfecţionarea aritmeticii zecimale poziţionale.

Tot lui *Al-Horezmi* îi datorăm primul manual de aritmetică, unde găsim cifrele 1—9 şi un cerculeţ pentru zero. Acesta a fost însuşit cu predilecţie de ştiinţa medievală europeană, care, modificînd numele lui *Al-Horezmi*, a creat termenul *algoritm*.

Fracţiile erau concepute ca la egipteni, ca părţi ale unităţii, dar şi ca raportul a două numere întregi. Înmulţirea, ca găsirea unui număr $q$ ce satisface proporţia $q : a : b : 1$ sau $q : b = a : 1$, unde $a$ şi $b$ sînt numere întregi sau raţionale, ceea ce permitea înmulţirea fracţiilor. Dacă observăm că şi împărţirea se definea în mod analog, vom înţelege ce progres important în generalitate şi eficienţă s-a realizat în aritmetica arabă.

Fracţiile zecimale sînt opera lui *Al-Kāshi*, care a pornit de la aceeaşi idee de a efectua cu ele operaţii identice cu cele asupra numerelor naturale. În Europa, de-abia *Stevin* le-a introdus sistematic în 1585.

Arabii au reuşit să extragă rădăcini pătrate cubice, *Omar Khayamm*, gen şi eralizînd procedeul prin folosirea regulilor pătratelor şi cuburilor sumelor, la rădăcinile de ordin întreg $n$ oarecare. De aici se poate prezuma că acesta cunoştea regula binomului, care revine lui *Newton*. De altfel, *Al-Kashi* cunoştea şi relaţia dintre coeficienţii binomiali $C_m^n = C_{m-1}^{n-1} + C_{m-1}^n$.

Un loc de cea mai mare importanţă îl ocupă în matematica arabă calculul aproximativ, numerele iraţionale fiind utilizate frecvent şi fiind studiate şi teoretic, ca şi operaţii cu radicali de diverse ordine. Prin aceste operaţii, numărul iraţional este aprofundat independent de incomensurabilitatea care era la baza teoriei elene şi elenistice a iraţionalelor. Comentînd cartea a X-a a lui *Euclid*, arabii explică iraţionalele algebrice şi operaţiile cu acestea prin iraţionalele aritmetice corespunzătoare, ceea ce înseamnă o abstractizare de ordin algebric a teoriei acestor iraţionale. Ei concep rapoartele între mărimi de orice natură ca numere, ceea ce este un proces teoretic de o deosebită importanţă, a cărui valoare gnoseologică se va înţelege deplin deabia la sfîrşitul secolului al XIX-lea, cînd va fi aprofundată noţiunea de număr real.

Un fapt demn de a fi relevat este spiritul critic în care arabii analizează moştenirea antică, în special cea greacă pe care o traduc cu grijă şi deosebită atenţie. Teoria proporţiilor lui *Eudoxos* şi a lui *Euclid*, analizată de *Al-Māhāni* şi reluată de alţi învăţaţi este considerată ca nesatisfăcătoare din punctul de vedere al semnificaţiei proporţiilor.
*Omar Khayamm* înlocuieşte definiţia prin egalitatea a două rapoarte, egalitate definită prin egalitatea citurilor parţiale în dezvoltările în fracţie continuă ale celor două rapoarte. Tot el demonstrează existenţa celei de a patra proporţionale, dar folosind un principiu de continuitate nefondat suficient, demonstraţia sa nu este riguroasă. De asemenea, *Khayamm* încearcă generalizarea noţiunii de număr, prin introducerea unităţii abstracte divizibile şi a cantităţilor abstracte corespunzînd unui raport; acesta este interpretat ca un număr real în sensul general al termenului, ca un element ideal care completează mulţimea numerelor, dîndu-i continuitate.

În ceea ce priveşte rolul aritmeticii în viaţa socială, arabii o aplică în comerţ, în stabilirea impozitelor, în împărţirea moştenirilor. Ei împrumutaseră de la indieni regula de trei simplă, dar o extinseseră la mai multe proporţii cu mai multe necunoscute.

În teoria numerelor ei rezolvă ecuaţii diofantice de gradul I sau sisteme de astfel de ecuaţii, de asemenea unele ecuaţii de gradul II. Dar, deosebit de remarcabilă este încercarea de a demonstra imposibilitatea rezolvării în numere întregi a ecuaţiei, caz particular al marii teoreme a lui *Fermat*, pe care o face *Al-Khujandi*.

Epoca de înflorire a ştiinţei arabe a început în secolul al VIII-lea şi s-a sfîrşit în secolul al XV-lea, *Al-Horezmi* a trăit în secolul al IX-lea, *Abū Kamil* în secolul al X-lea, *Al-Biruni* în al XI-lea, ca şi *Omar Khayamm*. Începînd din secolul al X-lea se fac transferuri ştiinţifice către Occidentul creştin. *Gerbert*, considerat ca primul savant care a popularizat cifrele arabe şi astrolabul care a trăit în acest secol, devenind papă sub numele de *Silvestru* al II-lea în 999. *Savasorda* scrie în secolul al XII-lea un tratat de arpentaj, consacrat calculului suprafeţelor în care dă valori aproximative pentru radicali şi pentru $\pi$ şi metode de calcul al suprafeţelor.

Secolul al XII-lea este dominat în domeniul matematicii de *Leonardo Pisano* (*Fibonacci*), Opera sa, *Liber abaci*, scrisă în 1202 şi reeditată în 1228 s-a bucurat de o celebritate care s-a menţinut şi în secolele următoare. Tematica tratată este într-o largă măsură practică, dar în cele 15 părţi el introduce cifrele indiene, operaţiile elementare cu întregi şi fracţii, progresii, proporţii, regulile falsei poziţii, rădăcinile pătrate şi cubice, calcule de preţuri, de trocuri, de rabaturi, regulile de asociaţie, calculul aliajelor şi monezilor etc.

Aici găsim fracţii continue şi celebrul *şir al lui Fibonacci* prin care, cu ajutorul unei recurenţe, se calculează descendenţii unei familii de iepuri. Este remarcabil acest model matematic a cărui valabilitate este mult mai generală şi a cărui actualitate a făcut ca o revistă de teoria numerelor, de mare autoritate să apară cu titlul „*Fibonacci*". Printr-unul din acele capricii ale întîmplării *Leonardo da Pisa* a rămas nereeditat pînă în secolul al XIX-lea, cînd a fost descoperit şi înălţat la rangul ce i se cuvenea.

**4. Aritmetica Renaşterii.** Se obişnuieşte să se afirme categoric că Renaşterea a risipit întunericul Evului Mediu, secolul al XVI-lea fiind salutar în această revoluţie spirituală. O analiză mai atentă şi mai obiectivă arată că saltul calitativ este urmarea unei evoluţii lente. Evenimentele politice, războiul de treizeci de ani, războaiele religioase, au zguduit edificiile medievale, descoperirea unor lumi noi prin expediţiile geografice, inventarea tiparului şi a prafului de puşcă au avut influenţe considerabile şi asupra dezvoltării ştiinţei şi pe bună dreptate revoluţia lui *Gutenberg* este considerată ca poarta de intrare în lumea şi ştiinţa modernă.

În secolul al XV-lea, *Peurbach* predă calculul după manualul său *Algorithmus*, publicat în 1492 şi republicat apoi ca manual de nivel universitar. Dar nu vom găsi demonstraţii, deşi vor fi folosite cifrele arabe. Este curios că în comerţ şi în documentele oficiale s-au folosit cifrele romane pînă în secolul al XVII-lea.

*Aritmetica de la Trevira* apărută în 1478, de autor anonim este primul manual de aritmetică practică şi este destinat tinerilor care se pregătesc pentru cariere comerciale. Este o adevărată expoziţie de tehnici de calcul ca înmulţirea pe coloană, în cruce sau în tablă de şah, dată în cinci variante diferite. Împărţirea se bucură, de asemenea, de algoritmul pe coloane şi în luntre. Apoi vom găsi proba cu 9, regula de trei, regula de amestecuri şi calculul numărului de aur.

Este demnă de menţionat tratarea unor probleme moştenite din antichitate ca cea a urmăririi unui iepure de un ogar sau a celor doi curieri care pornesc să se întîmpine reciproc.

În Germania apare în 1482 un manual de calcul pentru comerţ, semnat de *J. Widmann*. Acesta întrebuinţează semnele + şi —, dar nu ca simboluri operaţionale, ci pentru a marca lipsa sau surplusul. Insistăm asupra evoluţiei aritmeticii şi algebrei pentru a pune în lumină eforturile făcute de-a lungul secolelor pentru a se ajunge la noţiuni şi operaţii fundamentale.

O lucrare care a depăşit ca nivel toate cele precedente este „*Triparty en la science des nombres*", autorul fiind un medic parizian *Chuquet*. Lucrarea a rămas în manuscris pînă în 1880, cînd a fost tipărită şi pusă în adevărata lumină.

Numeraţia este expusă clar, cu rolul cifrei zero, iar numerele se împart în grupe de cîte trei cifre prin puncte, aşa cum facem şi azi: grupul sutelor, al miilor, al milioanelor etc. El pune în evidenţă corespondenţa dintre progresiile geometrice şi cele aritmetice, de unde ideea calculului logaritmic.

*Chuquet* operează perfect cu numere pozitive şi negative, aplicînd corect regula semnelor, foloseşte exponenţii pozitivi şi negativi, chiar şi exponentul zero. Soluţiile negative nu-l opresc şi nici ecuaţiile sau sistemele nedeterminate.

*Luca Pacioh* este autorul unei opere monumentale de 600 pagini, tipărită la Veneţia în 1494, sub titlul „*Summa de arithmetica, geometria, proporzioni e proporzionalita*". Autorul citează pe toţi cei de la care a împrumutat idei, studiază operaţiile aritmetice, numerele figurative şi remarcabile, probele cu 9 şi cu, 7, progresii, extrageri de rădăcini pătrate sau cubice, probleme de dobîndă compusă, de contabilitate în partidă dublă.

Secolul al XVI-lea se caracterizează şi printr-un avînt al învăţămîntului. La Universitatea din Viena sînt două catedre de matematică şi astronomie, în 1532, se înfiinţează o catedră de matematică la Colegiul Regal din Paris, iar în 1544, la Universitatea din Coimbra. Sub influenţa reformei şi a umanismului se înfiinţează o catedră de matematică la liceul din Nürenberg în 1526.

În acest secol vom găsi cîteva sute de volume de matematică, majoritatea manuale, în care nu apar contribuţii originale, dar sînt prezentate sistematizate cunoştinţele de pînă atunci. În limba germană apare cartea lui *Adam Riese, Calculul cu jetoane*, în 1525 şi se bucură de o popularitate excepţională, apoi în 1550 tot el publică un manual complet de aritmetică, în care se renunţă la jetoane şi adoptă calculul „cu pana", adică scris. Această aritmetică practică se tipăreşte în 38 ediţii de-a lungul secolului, ceea ce dovedeşte calitatea ei deosebită.

*Petrus Apianus* scrie în 1527 cartea „*Învăţarea calculului pentru negustori*", în care, ca şi *Chuquet*, compară progresiile aritmetice şi geometrice, apoi aduce în Europa triunghiul aritmetic şi dă numeroase reguli de calcul practic.

*Arithmetica integra*, publicată de *Michael Stifel* la Nürenberg în 1544, afirmă tendinţa simplificării notaţiilor, de sistematizare a teoriei, caracteristică la toţi aritmeticienii germani. Cartea tratează numerele raţionale şi numerele iraţionale. Autorul foloseşte triunghiul aritmetic pentru extragerea rădăcinilor, extinzîndu-l pînă la a 17-a linie şi este de părere că numerele iraționale nu sînt adevărate, ca și numerele negative care sînt numai figurate, deoarece sînt mai mici decît zero. El adoptă pentru rădăcini un semn aproape același ca cel actual, iar în privința rezolvării problemelor unde apar mai mulți termeni, el cere ca termenul ce conține necunoscuta să fie izolat de ceilalți, dar nu admite soluții negative.

Cu *Stifel*, ne găsim în etapa în care se vor decide notațiile moderne și este surprinzător că acesta n-a putut trece pragul, dacă ținem seama de faptul că el a extins seria aritmetică la numere negative, punînd exponenții negativi a seriilor geometrice în corespondență cu cei pozitivi.

De ce n-a făcut-o? Pentru că trecerea la notații simbolice implică detașarea noțiunii de operație de obiectele asupra căreia aceasta se exercită. Cercetarea operațiilor în sine, în abstract, reprezintă un salt calitativ pe care de-abia *Viète* și *Descartes* l-au conceput și care se va concretiza numai în secolul nostru prin teoria structurilor algebrice.

Școala italiană a fost reformatoarea algebrei, dar unele contribuții la formalismul aritmetic merită să fie relevate, fiindcă rezolvarea ecuațiilor de gradul III și IV necesită calcule cu radicali. *Cardano* publică la Milano în 1539, o lucrare intitulată „*Practica arithmeticae*" în care tratează complet progresiile aritmetice și geometrice și seriile de puteri. El recunoaște existența mărimilor negative, dar respinge hotărît pe cele imaginare. *Tartaglia* lasă ca operă postumă și neterminată „Tratatul general despre numere și măsuri", unde se vede influența lui *Stifel*, iar triunghiul aritmetic este folosit în calcule de analiză combinatorie și de extragere a rădăcinilor de ordin superior. *Bombelli* se distinge prin algebra sa, publicată în 1572, care atinge nivelul maxim al școlii italiene din secolul al XVI-lea. El o intitulează „*Algebra, parte maggiore dell'aritmetica*", subliniind prin aceasta că nu despărțea algebra de disciplina de bază, aritmetica, pătruns fiind totuși de necesitatea punerii unui accent esențial pe notații și pe formalismul operațiilor cu numere. Astfel, el aplică regulile extragerii rădăcinilor pătrate ale numerelor pozitive, numerelor negative, considerînd că o astfel de rădăcină este produsul rădăcinii valorii absolute a numărului prin rădăcina lui $-1$, pe care o scrie $\sqrt{0-1}$. Înmulțirea puterilor se face prin adunarea exponenților, dar nu concepe exponenții nuli și negativi.

În ceea ce privește formalismul algebric, *Bombelli* nu notează necunoscuta cu un simbol și cantitățile cuoscute cu litere.

Acest progres este realizat de *Maurolico*, în *Aritmetica* sa din 1575, unde folosește literele pentru notarea numerelor concrete și inducția matematică în stabilirea unor rezultate generale.

*Simeon Stevin*, care s-a afirmat ca un reformator al mecanicii, a fost și un prodigios matematician. Lui îi datorăm punerea la punct a conținutului aritmeticii. În 1585, el publică la Leiden „*Aritmetica lui Simeon Stevin din Bruges*", lucrare teoretică, în care se îmbină un tratat de aritmetică și de algebră și o colecție de studii intitulată „*Practica aritmeticii*". Aceasta din urmă traduce în franceză lucrarea sa din 1582, intitulată „*Tafelen van interest*", în olandeză, „*Disma*", prin care introduce fracțiile zecimale și un comentariu asupra mărimilor incomensurabile.

Numerele zecimale fuseseră descoperite cîndva și folosite între alții chiar de *Viete*, dar nimeni în Occident nu a substituit fracțiile ordinare prin fracții zecimale și n-a construit notații pentru extinderea operațiilor aritmetice la acestea.

Tot lui îi datorăm unificarea noțiunii de număr, pornind de la concepția lui *Diofant* că unitatea este număr, cu care se poate opera ca și cu celelalte. Unei mărimi continue îi corespunde un număr continuu, spune el, înțelegînd că inconmensurabilitatea definește numere iraționale, tot atît de reale ca și cele raționale.

**5. Artimetica și teoria numerelor.** Cu opera lui *Stevin*, deși notațiile nu erau încă puse la punct, aritmetica luată *stricto senso*, ca știință a numerelor concrete, naturale, întregi, raționale și iraționale, nu a mai progresat fiindcă, pe de o parte cunoștințele despre construcția numerelor pornind de la cele naturale erau considerate ca satisfăcătoare, pe de altă parte, problemele cu caracter monografic nu mai atrăgeau pe matematicieni. În schimb, anumite proprietăți ale diverselor categorii de numere se puneau într-un cadru din ce în ce mai general sau, dimpotrivă, într-un cadru strîmt rezervat doar acestora.

În Antichitate, *Diofant* fusese singurul matematician care abordase astfel de probleme, dacă lăsăm școlii pitagoreice gloria de a fi conceput teoria geometrică a numerelor întregi prin numerele figurative și de a fi avut surpriza de a constata că operații geometrice conduc și la numere iraționale.

Acum, în pragul secolului al XVII-lea începe să se distingă acumulări cantitative de proprietăți generale ale unor categorii de numere, definite prin astfel de proprietăți, dintre care unele sînt de natură algebrică, formulîndu-se prin ecuații, de exemplu, prin ecuații diofantice.

Este instructiv să regăsim cîteva jaloane puse în trecut de mari matematicieni, dar care n-au fructificat deplin ideile lor. Algoritmul lui *Euclid* este, de fapt, teorema fundamentală a teoriei numerelor naturale, fiindcă ne permite să analizăm raporturile între două numere naturale, în particular să evaluăm c.m.m.d.c. al lor. Dar descompunerea în factori primi cu teorema ei de unicitate? Dar teorema de existenţă a unui şir infinit de numere prime? Tot *Euclid* a avut ideea ingenioasă de a căuta *numerele perfecte*, deci cele ce sînt egale cu suma divizorilor lor. Expresia generală a acestora este $N = 2^{p-1}(2^p-1)$ unde $p$ şi $2^{p-1} - 1$ sînt prime, cu condiţia de a presupune $N$ par.

Astfel de proprietăţi au caracter teoretic şi dovedesc o pasiune pentru studiul teoretic al numerelor naturale. Dar există şi procedee practice, cum este ciurul lui *Eratostene* pentru construcţia subşirului de numere prime dintr-un şir $1, 2, \ldots N$. Se ştie că aceasta revine la a şterge pe rînd multiplii numerelor prime din tabel începînd cu $p^2$, cu condiţia ca $p^2 < N$. Este curios, dar pînă în prezent acest procedeu de obţinere a numerelor prime este unicul. Marele maestru al acestor probleme a fost *Diofant*. El lucra atît cu numerele naturale, cît şi cu cele raţionale. De exemplu, fiind dat un pătrat perfect $n$, el a arătat că îl putem pune într-o infinitate de moduri sub forma unei sume de pătrate de numere raţionale.

Celebra ecuaţie pitagoreică $x^2 + y^2 = z^2$ fusese tatonată atît în Egipt, cît şi în Babilon, dar şcoala pitagoreică îi dăduse o soluţie în numere prime între ele. Şcoala lui *Platon* a dat soluţia generală a acestei ecuaţii.

*Diofant* acorda numerelor raţionale consideraţia pe care o acorda şi celor naturale, rezolvînd în numere raţionale ecuaţii nedeterminate de gradul II, cum ar fi $y^2 = ax^2 + bx + c$ sau $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, unde $a, b, c$ sînt întregi.

Din preocupările medievale europene şi extraeuropene reţinem rezolvarea în numere naturale a ecuaţiei $ax + b = cy$, printr-un procedeu care revine la descompunerea în fracţii continue realizat de *Baskan* care a rezolvat în numere întregi ecuaţia $x^2 = ay^2 + 1$, printr-o reducere în cascadă a unei ecuaţii asociate. În sfîrşit, vom semnala problema propusă de *Leonardo da Pisa* de a se găsi numerele raţionale $x, y, z$, astfel încît toate sumele următoare:

$$x + y + z + x^2,\ x + y + z + x^2 + y^2,\ x + y + z + x^2 + y^2 + z^2$$

să fie perfecte. Soluţia dată de el este $x = \frac{16}{5}$, $y = \frac{48}{5}$, $z = \frac{144}{5}$. Nu ştim dacă este unica.

Secolul al XVI-lea a realizat fixarea simbolurilor matematice de calcul aritmetico-algebric. Este surprinzător pentru omul de astăzi să afle că se făcea matematică fără semne ca egal, plus, minus, înmulţit, împărţit etc. Semnul $=$ apare în 1556 şi este introdus de *Recorde*, semnele $+$ şi $-$, de *Widmann* în 1489, semnul virgulă de separare a a caracteristicii de mantisă la numerele zecimale este introdus de *Wallis* în 1657; acesta mai introduce şi exponenţii fracţionari şi negativi, ca şi semnul $\infty$.

Teoria fracţiilor continue, de o actualitate permanentă, a fost prezentată explicit de *Antonio Cataldi*, care calculează în 1613 rădăcina pătrată $\sqrt{a^2+b}$ prin aproximări succesive cu fracţii continue şi cercetează legea de formare a reduselor succesive. Legea de recurenţă este opera lui *Wallis*, iar *Huyghens* arată că numărul dat este cuprins între două reduse succesive.

Calculul funcţiilor trigonometrice a fascinat totdeauna pe matematicienii arabi şi europeni, ca şi cea a numărului $\pi$. Secolul al XVI-lea s-a distins printr-o contribuţie bogată, amplificată prestigios de secolul al XVII-lea. Astfel, *Viète* a calculat $\pi$ cu 10 zecimale, apoi, în 1593, foloseşte pentru prima dată un algoritm infinit pentru a exprima raportul dintre ariile unui pătrat şi cercului circumscris, adică $\frac{2}{\pi}$ prin produsul infinit:

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}+\ldots,$$

formula de recurenţă fiind:

$$u_n = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{1 + u_{n-1}}.$$

Astfel, *Viète*, precursor şi în algebră, unde a stabilit un izomorfism între algebra numerică a lui *Diofant*, reluată de *Cardano*, *Tartaglia*, *Bombelli* şi *Stifel* şi analiza geometrică fructificată de *Euclid*, *Arhimede* şi *Appolonius*, devine precursor şi în extinderea algoritmelor finite la algoritmele infinite, care joacă roluri prestigioase în analiza matematică.

Legată intim de tehnica de calcul trigonometric este şi descoperirea logaritmilor, datorată lui *Neper* la începutul secolului al XVII-lea, în 1614, generalizînd compararea progresiilor geometrică şi aritmetică, tratată de atîţia înaintea sa.

*Briggs* a luat ca bază 10, în locul bazei e, dînd un caracter mai practic noţiunii de logaritm şi a calculat cu 14 zecimale logaritmii primelor 31000 numere naturale în 1623. În 1683, *Vlacq* calculează şi logaritmii funcţiilor trigonometrice din minut în minut.

Se vede deci că, necesităţile astronomiei, geodeziei, topometriei, ca şi cele ale navigaţiei au determinat un avînt al calculului numeric al funcţiilor trigonometrice în secolul al XVII-lea.

În acelaşi timp, analiza lui Diofant stîrneşte un interes din ce în ce mai mare. Cel care, stimulat în gîndirea sa fecundă, a deschis o cale nouă, este *Fermat*. El face observaţii pe marginea lucrării lui *Diofant*, care îl conduc la crearea *teoriei numerelor*. Au rămas celebre cîteva din rezultatele sale, care conturează cadrul acestei teorii ce necesită o ingeniozitate deosebită în stabilirea unora dintre teoreme. De exemplu, „*mica teoremă a lui Fermat*", dată în 1640, priveşte numerele prime: dacă $p$ este prim şi $a$ nu se divide cu $p$, atunci $a^{p-1}-1$ este multiplu de $p$. „*Marea teoremă a lui Fermat*", enunţată în 1637, afirmă că ecuaţia $x^n + y^n = z^n$ cu $n$ întreg $>2$ nu are soluţii în mulţimea numerelor întregi. Ea a rămas pînă în prezent o conjectură, nimeni n-a putut s-o demonstreze sau s-o infirme. *Fermat* afirmase că avea o demonstraţie simplă, ceea ce nu este posibil. Ţinînd seama de exigenţa pe care o arăta în lucrările sale, această afirmaţie este surprinzătoare; ea a provocat ambiţiile a mii şi mii de amatori şi profesionişti, care au crezut că au obţinut demonstraţia acestei enigme matematice. Deşi au fost obţinute demonstraţii în cazuri particulare, rezultatul general rămîne încă o provocare pentru generaţiile succesive de matematicieni.

*Fermat* a mai enunţat şi alte propoziţii, care privesc proprietăţi generale ale numerelor naturale: Orice număr natural este suma a cel mult patru pătrate sau a trei numere triunghiulare sau a cinci numere pentagonale şi, în general, orice număr natural este suma a cel mult $n$ numere $n$-gonale.

La acestea se adaugă propoziţii ca: orice număr prim de forma $4n + 1$ este o sumă de pătrate sau orice număr prima de forma $8n + 1$ sau $8n + 3$ este reprezentabil sub forma $2x^2 + y^2$.

Teoria numerelor a început să se constituie, ca şi celelalte discipline matematice, prin acumularea de probleme monografice. Ea priveşte proprietăţi generale ale numerelor naturale sau raţionale, categorii speciale de numere, ecuaţii nedeterminate etc. *Wallis*, de exemplu, a dat numărul divizorilor unui număr descompus în factori primi şi suma acestor divizori. *Fermat* a enunţat şi conjectura că numerele de forma $2^{2^k} + 1$ sînt prime. Aceste numere îi poartă numele, dar el a verificat-o numai pentru $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

O altă problemă este cea pusă de *Mersenne*, care cere valorile lui $n$ pentru care numerele $2^n - 1$ sînt prime. Se ştie că $n$ trebuie să fie prim, dar nu oarecare, fiindcă pentru $n = 11$, numărul *Mersenne* este $2047 = \mathcal{M}\,23$.

În sfîrşit, tot lui *Fermat* îi datorăm rezolvarea în numere naturale a mai multor ecuaţii neliniare ca $x^3 + a = y^2$; $ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dx^3 + ex^4 = z^2$ precum şi a ecuaţiei lui *Pell-Fermat*:

$$px^2 + 1 = y^2.$$

### 6. Teoria modernă a numerelor, operă a secolului al XVIII-lea

În secolul al XVIII-lea teoria numerelor preocupă pe *Euler*, pe *Lagrange* şi *Legendre*. Primul arată că forma dată de *Euclid* numerelor perfecte este necesară şi suficientă, dacă $n$ este par dar în 1750 arată că $2^{31} - 1$ este perfect şi impar.

În ceea ce priveşte numerele lui *Fermat*, tot el arată în 1732, că pentru $k = 5$, numărul $2^{32} + 1 = 4294967297$ nu este prim, fiind divizibil cu 641. Această descoperire dovedeşte că *Euler* era în acelaşi timp un gînditor profund şi fecund, dar şi un calculator prodigios şi că oamenii mari din domeniul matematicii nu dispreţuiesc calculul, ceea ce justifică cercetările de tip calculatoriu care uneori sînd indispensabile chiar şi pentru salvarea unei teorii.

În 1758, *Euler* introduce noţiunea de indicator al unui număr natural $n$, notat şi astăzi prin $\varphi(n)$. Acesta este numărul numerelor prime cu $n$ şi mai mici decît el. Tot el generalizează mica teoremă a lui *Fermat* sub forma $a^{\varphi(n)} - 1 \vdots n$ unde $a$ este prim cu $n$.

Repartiţia numerelor prime a preocupat într-o măsură excepţională secolul al XVIII-lea. *Euler* îşi pune problema de a găsi o formulă de generare a numerelor prime, fie a tuturor numerelor prime, fie a unei infinităţi dintre ele. În 1772, el arată că trinomul $p(n) = n^2 + n + 41$ este generator de numere prime pentru $n = 0, 1, \ldots, 40$. Totuşi, pentru $n = 41$, $p(n) = \mathcal{M}\,41$ şi deci nu este prim. Se verifică însă, că şi pentru alte valori ale lui $n > 41$ se obţin numere prime. Pe aceeaşi linie *Euler* emite în 1783 conjectura că o progresie aritmetică, avînd ca prim termen pe 1, conţine o infinitate de numere prime.

O nouă cale de cercetare în teoria numerelor se deschide prin introducerea metodelor analizei matematice, cînd se caută funcția $\pi(x)$ de repartiție a numărului numerelor prime ca $x$ și mai mici decît $x$. *Euler* arată că $\lim_{x\to\infty} \pi(x)/x = 0$; dar intervenția lui *Legendre* aduce efectiv un rezultat care sugerează deschideri noi și neașteptate. El emite în 1798 legea asimptotică $\pi(x) = x : \log[x + a]$ *prin considerații empirice*, lege valabilă pentru valori mari ale lui $x$. Apoi, în 1808, tot el precizează valoarea lui $a$ ca fiind $a = 1{,}0866\ldots$ Tot lui *Legendre* îi datorăm noțiunea de *parte întreagă* $[x]_*$ a unui număr real $x$. El arată în 1808 că dacă $p$ este prim și $n$, natural, cel mai mare exponent $m$ pentru care $p^m$ divide pe $n!$ este dat de relația :

$$m = \left[\frac{n}{p}\right]_* + \left[\frac{n}{p^2}\right]_* + \left[\frac{n}{p^3}\right]_* + \ldots,$$

numărul termenilor fiind finit fiindcă dacă $\frac{n}{p^k} < 1$ vom avea $\left[\frac{n}{p^k}\right]_* = 0$.

Introducerea teoriei numerelor în programele analitice ale învățămîntului nostru secundar a făcut ca rezultatele marilor matematicieni ai secolelor trecute să intre în rîndul cunoștințelor cerute, astfel încît este instructiv să le relevăm în această introducere la capitolul II, cu atît mai mult că actualitatea teoriei numerelor este manifestată și în cultura generală a matematicienilor contemporani.

De aceea vom aminti și teorema lui *Wilson*, enunțată de *Waring* în 1770 : dacă $p$ este prim, $(p-1)! + 1 = \mathcal{M}\,p$. Ea este caracteristică pentru numerele prime fiind o condiție necesară și suficientă. Generalizarea acestei teoreme este datorată lui *Lagrange* care a stabilit că pentru orice $n$ natural și orice $p$ prim are loc relația :

$$(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1) + 1 = n^{p-1} + \mathcal{M}p.$$

Aceasta generalizează atît mica teoremă a lui *Fermat*, cît și teorema lui *Wilson*.

Un alt instrument de cercetare a proprietăților numerelor este *fracția continuă*, cu care putem scrie orice număr real pozitiv $p$ cu ajutorul unor numere naturale $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$, exprimînd prin redusele de ordinul $n$ aproximarea de ordinul $n$ a acestuia.

Forma actuală a teoriei fracțiilor continue este tot opera lui *Euler*, care a dat relația fundamentală între reduse :

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^n$$

unde

$$\frac{P_n}{Q_n} = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$$

este redusa de ordinul $n$. El a stabilit că orice număr rațional se exprimă printr-o fracție continuă finită și reciproc, ceea ce le caracterizează și caracterizează în același timp numerele iraționale prin fracții continue infinite.

Contribuția lui *Lagrange* este, de asemenea, esențială. El a dat un procedeu de rezolvare aproximativă a ecuațiilor numerice prin fracții continue, arătînd că în cazul în care fracția este periodică se obține ca rădăcină o irațională pătratică, deci exprimabilă printr-un radical de ordinul doi.

Cu ajutorul fracțiilor continue s-au dat dezvoltările lui $\pi$ și $\log 2$, apoi e, *Lambert* a arătat în 1767 că $\pi$ este irațional, iar sub rezerva demonstrării că fracțiile continue respective nu sînt periodice, rezultă că $\pi$ și e sînt iraționale nepătratice.

Acest gen de cercetări a extins teoria numerelor la numerele iraționale și ulterior la cele transcendente. Transcendența lui e și a lui $\pi$ se va demonstra în secolul al XIX-lea.

Ecuațiile diofantice au beneficiat și ele de metoda fracțiilor continue. Lagrange a dat soluția particulară din care se obține cea generală pentru ecuația $ax + by = c$, iar *Euler* a atacat ecuația generală cu $n$ necunoscute : $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ arătînd că are soluție cînd c.m.m.d.c. al coeficienților divide pe $b$ și că în acest caz se poate reduce problema la rezolvarea unei ecuații analoage cu mai puține necunoscute.

În vederea rezolvării ecuației lui *Pell*, pe care *Fermat* o rezolvase prin metoda cascadelor, *Euler* introduce noțiunea de *rest pătratic*, prin ecuația : $x^2 \equiv m \pmod p$, numind $m$ rest pătratic al lui $p$, dacă ecuația are soluție. Dacă și ecuația $x^2 \equiv p \pmod m$ are soluție, proprietatea se numește de reciprocitate pătratică. Pentru ecuația lui *Pell*, *Euler* arată că dacă aceasta este de forma $x^2 + py^2 = q$, condiția necesară și suficientă de existență a soluțiilor este ca $p$ să fie rest pătratic al lui $q$.

Curiozitatea stîrnită de marea teoremă a lui *Fermat* a stimulat pe mulți matematicieni să abordeze ecuații asemănătoare sau cazuri particulare ale acesteia. *Euler* arată că ecuația $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$ are soluții întregi, dar emite conjectura că ecuația $x^4 + y^4 + z^4 = u^4$ nu are soluții întregi, ceea ce nu s-a rezolvat pînă în prezent. Tot *Euler* consideră ecuația $x^y = y^x$, pe care o rezolvă în numere raționale.

După cum am văzut, din trecerea grăbită în revistă a contribuției secolului al XVIII-lea la teoria numerelor, spiritul care însuflețește cercetările matematicienilor este mai îndrăzneț, ca și viziunea lor asupra obiectivelor acestor cercetări.

Faptul că oameni de talia lui *Euler, Lagrange, Legendre, Waring, Lambert*, care s-au distins în domenii diferite ale matematicii și-au consacrat talentul și cunoștințele problemelor de teoria numerelor a determinat o așezare mai sigură a acesteia pe bazele moștenite încă din antichitate, dar care nu putuseră să fie explorate suficient din lipsa unei dezvoltări generale a corpului matematicii, chiar a lipsei notațiilor adecvate, a unei viziuni clare a mulțimii numerelor naturale, raționale și iraționale, a relațiilor dintre acestea, a posibilității de eliberare de interdicțiile pe care operațiile aritmetice le ridicau asupra numerelor negative etc.

Ceea ce caracterizează eforturile acestui secol luminos este încercarea de a se găsi metode generale de abordare a unor categorii de probleme. Ecuațiile nedeterminate arată însă că, astfel de încercări sînt condiționate de formele lor particulare. Singura metodă de largă deschidere pare a fi folosirea fracțiilor continue. Mai atrage atenția o categorie de probleme care a preocupat permanent pe matematicieni: *reprezentările numerelor naturale*. Un rezultat frumos este cel al lui *Bachet*, care încă din secolul al XVII-lea a afirmat că orice număr natural $p$ se poate scrie sub forma $p = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, deci ca suma de cel mult patru patrate. Apare atunci întrebarea: cînd acest număr se poate reduce la două sau trei pătrate? *Fermat* enunțase teoremele privitoare la numerele prime de formele $4k + 1$ ca sume de două pătrate sau de formele $8k + 1$ sau $8k + 3$, prin expresia $x^2 + 2y^2$, pe care *Euler* le-a demonstrat. Aceste ciudățenii, care impun multă imaginație și perseverență, pot fi demobilizatoare sau mobilizatoare. Pentru *Lagrange* ele au fost mobilizatoare, îndemnîndu-l să studieze reprezentarea numerelor întregi prin forme pătratice binare, $p = ax^2 + bxy + cy^2$, cu $a, b, c$ numere întregi cunoscute, a introdus noțiunea de forme echivalente și a legat existența reprezentării de soluțiile unor congruențe de gradul II.

*Lagrange* a demonstrat conjectura lui *Bachet*, iar *Waring* a generalizat-o în 1771, afirmînd că orice număr natural $m$ este reprezentabil ca o sumă de cel mult $p$ puteri de ordinul $n$, unde $p$ depinde de $n$.

*Euler* a abordat reprezentarea prin numere prime, enunțînd în 1742 conjecturile următoare:

— dacă $p$ este par $\geqslant 4$, atunci se poate pune sub forma unei sume de două numere prime;
— dacă $p$ este impar $> 7$, el este suma a cel mult trei numere prime;

Prima conjectură poartă numele lui *Goldbach*, dat chiar de *Euler*.

Forma generală dată de *Euler* în 1750, prin *teorema pentagonală*, este următoarea: numărul de descompuneri ale numărului natural $n$ ca sumă de 2, 4, 6 ... numere naturale, diferă cu o unitate de numărul descompunerilor aceluiași număr ca sumă de 1, 3, 5 ... numere naturale, cu excepția cazului $n = \frac{1}{2}(3m^2 + 3m)$, cînd numărul de descompuneri este același.

**7. Tematica orientativă a Capitolului II**

Am oprit parcurgerea fugitivă a evoluției aritmeticii și teoriei numerelor în pragul secolului al XIX-lea, avînd în vedere că programele analitice ale învățămîntului nostru cuprind numai acest cadru și pe bună dreptate, fiindcă secolele XIX și XX au adus teoriei numerelor cuceriri de un înalt nivel teoretic și i-au extins cadrul dincolo de posibilitățile învățămîntului secundar.

Totuși, aceasta nu înseamnă că cititorul va fi cantonat într-un ținut fără reliefuri și fără atracții. Dimpotrivă, așa cum s-a întîmplat și în dezvoltarea istorică, aritmetica și teoria numerelor au ridicat probleme cu aspect elementar destul de grele pentru a frămînta mințile subtile. Astfel de probleme se vor găsi și în capitolul II al acestei culegeri, în care cititorul va recunoaște destule dintre cuceririle menționate în introducerea istorică precedentă.

Desigur că dificultățile vor fi gradate și exemplele vor fi alese astfel încît să sublinieze proprietățile generale și importante ale numerelor, începînd cu cele naturale.

Primele exemple vor privi caracterele prim, relativ prim, natural, par, impar etc, cum este cazul problemelor II.47, II.49, II.51, proprietăți de divizibilitate ca II.53, II.54, II., 55 II. 60. O problemă căre ridică dificultăți și necesită o tehnică mai deosebită este II. 56, unde se cere să se decidă dacă $\sum\limits_{n<1} 1/2^{n^2}$ este un număr rațional sau nu. Intervenția unei serii și necesitatea unor estimări în care apare seria geometrică, rezolvă problema prin reducere la absurd: numărul este irațional. Ecuațiile nedeterminate apar de la început prin II. 62, care conduce la o ecuație de gradul II, ale cărei rădăcini trebuie să fie întregi.

Capitolul conține și destule probleme ale unor personalități. Astfel II. 64 semnată *Shapiro*, cere să se arate că într-o anumită secvență de numere naturale există un bloc de termeni consecutivi al căror produs este un pătrat perfect.

O problemă atractivă este II. 69, în care dîndu-se șirul de numere naturale 1 — 200, se extrag la întîmplare 101 numere și se cere să se arate că printre ele există o pereche în care unul este divizorul celuilalt. Problema admite și o generalizare care este tratată prin inducție.

Problema II. 72 cere chiar evaluarea indicatorului lui *Euler* și este tratată prin principiul includerii și al excluderii, apoi pe calea dată de *Euler*. În continuare, problema II. 73 este generalizarea dată de *Euler* micii teoreme a lui *Fermat* și se completează cu cîteva aplicații.

Pe linia urmată de înaintași se situează și problema II. 74 care arată că orice număr natural are un multiplu care se scrie numai cu cifrele 0 și 1 și căreia i se dau trei soluții.

O ecuație privind partea întreagă a unei expresii liniare $ax + b$ este tratată în detaliu în II. 76.

Șirurile de numere întregi pot pune, de asemenea, probleme interesante ca II. 78, în care un șir de $mn + 1$ întregi distincți trebuie să conțină un subșir descrescător mai lung decît $m$ sau un subșir crescător mai lung decît $n$. Șirul lui *Fibonacci* apare în problema II. 83 de reprezentare a oricărui număr natural.

Mulțimea numerelor naturale, abordată din punctul de vedere al teoriei mulțimilor, deci modern, ridică probleme interesante ca II. 84 în care se cere să se arate că împărțind-o în $k$ submulțimii disjuncte și nevide, vom găsi în cel puțin una dintre acestea trei numere $x, y, z$ astfel ca $x + y = z$.

Ecuația $x^y = y^x$ propusă și rezolvată de *Euler* face obiectul problemei II. 85, în care se determină și soluțiile în numere naturale diferite, care sînt $x = 2, y = 4$, singurele găsite și de *Euler*. Nu putem lăsa nesemnalată o a doua ecuație cu partea întreagă rezolvată în II. 86 prin două soluții, subliniind subtilitățile tehnice și de raționament necesare în aceste probleme întîlnite în revistele de specialitate actuale.

Problema II. 87 cere să se stabilească existența unei infinități de numere prime pe altă cale decît cea a lui *Euclid*, soluția a II-a fiind a lui *Euler*.

Problema de reprezentare a lui $n > 0$ ca sumă de patru pătrate de numere întregi, pusă și rezolvată de *Lagrange* este reluată în II. 88 cu o demonstrație amplă care arată dificultatea problemei.

O problemă, II. 92, de sumă de combinări, conduce la o identitate curioasă în care membrul II este aparent irațional. Este demn de subliniat raționamentul utilizat în care se folosesc submulțimi ale lui $\{1, 2, \ldots, n\}$ și reprezentări lingvistice.

Compararea numerelor $21!$ și $2541^7$ pusă de II. 93 implică folosirea inegalității mediilor date de *Cauchy*. Aceasta este stabilită prin două metode și aplicate ușor cazului din problemă.

Rezolvarea în numere naturale a ecuației cuadratice $x^2 + x - 2y^2 = 0$ face obiectul problemei II. 96. O soluție se obține construindu-se prin recurență un șir format din pătrate perfecte, o a doua soluție stabilește și forma soluțiilor.

Ecuația lui *Pell* apare în problema II. 98, raționamentul folosit fiind cel din prima soluție a lui II. 96.

Ecuația diofantică $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$ este tratată în II. 103 prin două soluții, din care cea de a doua folosește aranjamentele ca funcții definite pe mulțimea obiectelor cu valori în cea a căsuțelor de aranjare.

Probleme de extremum în teoria numerelor sînt mai puțin obișnuite. De aceea semnalăm II. 105 în care se cere minimul unui produs de factoriale cînd suma factorilor este constantă și alte cerințe analoage.

În unele probleme ne mulțumim cu o soluție mai mult sau mai puțin generală, cum este cazul problemei II. 121 care cere să se arate că există o infinitate de numere naturale $n$ care divid pe $2^n + 1$. Soluția este un exemplu de forma $8^k$, $k \in \mathbb{N}$.

În altele ca II. 126 se cere să se găsească toate numerele impare $n$ care divid pe $3^n + 1$ și se arată că nu există decît $n = 1$ printr-un raționament care folosește teorema mică a lui *Fermat* extinsă de *Euler*.

Problema II. 140 stabilește existența unei infinități de numere tetraedrale prime între ele două cîte două.

Urmează probleme privitoare la funcții raționale: în II. 141 se arată că fiecare dintre fracțiile unui șir se află într-unul din intervalele (1, 2) (2, 3) etc., în II. 142 se stabilește lungimile perioadelor unor fracții avînd la numitor puterile unui număr prim $p$.

În sfîrşit II. 148 priveşte perioada unei fracţii zecimale periodice simple, avînd un număr par de cifre la perioadă, media aritmetică a cifrelor acesteia este 4, 5, iar în cazul numărului impar media este diferită de 4, 5.

**8 Concluzii metodologice**

Conţinutul tematic al Capitolului II este variat şi dispersat. A fost imposibil de sistematizat tipurile de probleme, fiindcă la enunţuri analoage corespund adesea în teoria numerelor raţionamente diferite. Este suficient să ne referim la problemele privitoare la numere prime.

De aceea, s-a urmărit acoperirea tematicii rezultate din prezentarea evoluţiei istorice a aritmeticii şi teoriei numerelor, respectîndu-se prestigiul autorilor, dar folosindu-se adesea metode actualizate prin creşterea numărului de cunoştinţe şi a exigenţei în demonstraţie.

În afara primelor 46 probleme culese din manuale şi care îşi vor dovedi utilitatea prin sprijinul acordat elevilor în pregătirea lor, celelalte probleme sînt selectate din reviste sau cărţi de specialitate.

Multe prezintă un grad ridicat de dificultate, dar aceasta este inerent teoriei numerelor. N-am abordat probleme din patrimoniul secolelor XIX şi XX din cauza nivelului lor prea înalt, care depăşeşte pe cel al învăţămîntului secundar. De altfel, chiar revistele de specialitate cultivă încă materialele secolelor trecute introducînd metode noi.

**II.1$^{M}$.*** Să se efectueze împărţirile cu rest ale următoarelor perechi de numere întregi:

a) $-5437$ la $225$; b) $8745$ la $-319$;
c) $-2438$ la $-18$; d) $-84312$ la $-36$.

**R.** Potrivit teoremei împărţirii cu rest pentru numere întregi, dacă $a$ şi $b$ sînt două numere întregi, cu $b$ diferit de zero, atunci există două numere întregi $q$ şi $r$ astfel ca $a = bq + r$, cu $0 \leqslant r < |b|$. Avem, aşadar:

a) $5437 = 225 \cdot 24 + 37$; $-5437 = 225\ (-24) - 37 = 225(-24) - 225 + 225 - 37 = 225\ (-25) + 188$, deci $q = -25$, $r = 188$.

b) $8745 = 319 \cdot 27 + 132 = (-319)(-27) + 132$, deci $q = -27$, $r = 132$.

c) $2438 = 18 \cdot 135 + 8$; $-2438 = 135\,(-18) - 8 = 135\,(-18) - 18 + 18 - 8 = 136(-18) + 10$, deci $q = 136$, $r = 10$.

d) $84312 = 36 \cdot 2342$; $-84312 = 2342\ (-36)$, deci $q = 2342$, $r = 0$.

**II.2$^{M}$.** Să se găsească două numere naturale a căror sumă să fie 6612 şi cîtul împărţirii celui mai mare prin cel mai mic să fie 75. Este soluţia unică?

**R.** Fie $x$ şi $y$, $x > y$, numerele căutate. Avem, potrivit enunţului, $x + y = 6612$ şi că există $q$, $0 \leqslant q < y$, astfel încît $x = 75y + q$. Deoarece $0 \leqslant q < y$, rezultă $75y \leqslant x = 75y + q < 76y$, deci $75y \leqslant 6612 - y < 76y$, sau $76y \leqslant 6612 < 77y$, de unde $6612/77 < y \leqslant 6612/76$, adică $85 < y \leqslant 87$. Rămîne $y = 86$, $x = 6612 - 86 = 6526$, sau $y = 87$, $x = 6525$. Convin ambele soluţii.

**II.3$^{M}$.** Care este ultima cifră a numerelor $2156^{43}$, $425^{21}$, $251^{143}$, $5234^{129}$, $164^{21} + 453^{18}$, $17^{80} + 12^{60}$?

**R.** Evident, ultima cifră a lui $2156^{43}$ este 6, căci orice putere a lui 6 se termină în 6. De asemenea, rezultă uşor că ultima cifră a lui $425^{21}$ este 5 şi că ultima cifră a lui $251^{143}$ este 1. Se observă că $4^1$ se termină

---

* Datorită caracterului special al acestui capitol, destinat exclusiv elevilor care se pregătesc pentru olimpiade, în codificarea numerelor problemelor a fost trecut O în loc de PO.

în 4, $4^2$ se termină în 6, $4^3$ se termină în 4, $4^4$ se termină în 6, etc. Deci o putere impară a unui număr care se termină du 4, se termină cu 4, iar o puere pară a unui număr care se termină cu 4, se termină cu 6. Deci $5234^{129}$ se termină cu 4. De asemenea, $164^{21}$ se termină cu 4. Cum $453^{18} = (453^2)^9$, iar $453^2$ se termină în 9 rezultă că $453^{18}$ se termină în 9, căci o putere pară a unui număr care se termină în 9, se termină în 1, iar o putere impară a unui astfel de număr se termină în 1. Deci $164^{21} + 453^{18}$ are aceeaşi ultimă cifră ca şi numărul $4 + 9 = 13$, adică 3. Deoarece $17^{80}=[(17^2)^2]^{20}$ iar $17^2$ se termină în 9, $(17^2)^2$ se termină în 1, rezultă că $17^{80}$ se termină în 1. De asemenea, $12^{60} = (12^2)^{30}$ şi cum $12^2$ se termină în 4, în baza unor raţionamente anterioare, $12^{60}$ se termină în 6. Deci $17^{80} + 12^{60}$ se termină în $1 + 6 = 7$

**II.4^M^.** Fie $n$, $a$, $b$ şi $c$ numere naturale nenule. Să se arate că pentru a găsi cîtul împărţirii lui $n$ la $abc$ se poate proceda în felul următor: se împarte $n$ la $a$, apoi cîtul obţinut se împarte la $b$ şi noul cît se împarte la $c$. Cîtul obţinut la această ultimă împărţire este cel căutat.

**R.** Fie schemele de împărţire $n = aq_1 + r_1$, $q_1 = bq_2 + r_2$, $q_2 = cq_3 + r_3$. Prin eliminarea lui $q_2$ şi $q_3$ între relaţiile anterioare, obţinem $n = abcq_3 + abr_3 + ar_2 + r_1$. Din unicitatea cîtului şi restului, rezultă imediat că, prin împărţirea lui $n$ la $abc$, cîtul este $q_3$.

**II.5^M^.** Fie $x$ şi $y$ două numere reale, cu $y \neq 0$. Să se arate că există două numere reale $q$ şi $r$ cu proprietăţile:

$$x = yq + r,\ q \in \mathbb{Z},\ 0 < r < |y|$$

În plus, $q$ şi $r$ sînt unice cu proprietăţile de mai sus.

**R.** Vom demonstra exerciţiul numai cînd $y > 0$, cazul în care $y < 0$ fiind analog.

Pentru $q$ luăm $q = \left[\frac{x}{y}\right]_*$. Din proprietatea părţii întregi, $a - 1 < [a]_* < a$, găsim $\frac{x}{y} - 1 < \left[\frac{x}{y}\right]_* = q < \frac{x}{y}$, sau $x - y < qy < x$. Făcînd $x = qy + r$, obţinem $qy + r - y < qy < qy + r$, de unde, prin reducere cu $qy$, rezultă $0 < r < y$.

Pentru a demonstra unicitatea lui $q$ şi $r$ cu proprietăţile din enunţ, fie:

$$x = q_1y + r_1,\ q_1 \in \mathbb{Z},\quad 0 < r_1, < y,$$

$$x = q_2y + r_2,\ q_2 \in \mathbb{Z},\quad 0 \leqslant r_2 < y.$$

Rezultă imediat $q_1y < x < q_1y + y = (q_1 + 1)y$, respectiv $q_2y \leqslant x < (q_2 + 1)y$, adică $q_1 < \frac{x}{y} < q_1 + 1$, deci $q_1 = \left[\frac{x}{y}\right]_*$, respectiv $q_2 \leqslant xy < q_2 + 1$, deci $q_2 = \left[\frac{x}{y}\right]_*$ (am folosit axioma lui ARHIMEDE).

Deci $q_1 = q_2$ şi, imediat, $r_1 = r_2$.

**II.6^M^.** Fie $a$, $b$, $c$ numere întregi, $c \neq 0$, şi $r_1$, $r_2$ resturile împărţirii lui $a$ şi $b$ la $c$. Atunci restul împărţirii lui $a + b$ la $c$ este acelaşi cu restul împărţirii lui $r_1 + r_2$ la $c$, iar restul împărţirii lui $ab$ la $c$ este egal cu restul împărţirii lui $r_1r_2$ la $c$.

**R.** Fie schemele de împărţire $a = cq_1 + r_1$, $b = cq_2 + r_2$. Avem, prin adunare, $a + b = c(q_1 + q_2) + r_1 + r_2$. Dacă $r_1 + r_2 \geqslant |c|$, îl împărţim pe $r_1 + r_2$ la $c$, $r_1 + r_2 = cq_3 + r_3$ şi obţinem $a + b = c(q_1 + q_2 + q_3) + r_3$, cu $0 \leqslant r_3 < |c|$.

Analog pentru produsul $ab$.

**II.7**[M]. Să se găsească cel mai mic număr natural care împărţit la $-7$ să dea restul 3 şi împărţit la 11 să dea restul 2.

**R.** Fie schemele de împărţire $n = -7a + 3$, $n = 11b + 2$, $n$ fiind numărul căutat, iar $a, b \in \mathbb{Z}$. Din cele două relaţii obţinem $-7a + 3 = 11b + 2$, adică $7a + 11b = 1$. Cazul $b = 1$ (nu putem avea $b < 0$ căci ar conduce la $n$ negativ) nu conduce la $a$ întreg. Pentru $b = 2$ rezultă $a = -3$. Deci cel mai mic număr cu proprietăţile exprimate în enunţ este $n = 11 \cdot 2 + 2 = 24$.

**II.8**[M]. Dacă $n$ este un număr întreg, să se arate că restul împărţirii lui $n^2$ la 7 este 0, 1, 2 sau 4.

**R.** Fie $n$ de forma $n = 7k + \varepsilon$, cu $\varepsilon \in \{0, 1, \ldots, 6\}$. Avem $n^2 = (7k + \varepsilon)^2 = 49k^2 + 14k\varepsilon + \varepsilon^2 = \mathcal{M}\,7 + \varepsilon^2$. Dacă $\varepsilon = 0$, evident $\varepsilon^2 = 0$ deci, în acest caz, restul împărţirii lui $n^2$ la 7 este 0. Rezultă, pentru celelalte cazuri, $\varepsilon^2 \in \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$. Dar $\varepsilon^2$ împărţit, la rîndul său, la 7, dă resturile 1, 4, 2, 2, 4, 1, deci enunţul.

**II.9**[M]. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ astfel încît $a + b = c$. Să se arate că dacă $d \in \mathbb{Z}$ divide două dintre numerele date, atunci el îl divide şi pe al treilea.

**R.** Fie, de exemplu, $a$ şi $b$ numerele care se divid la $d$. Există, în acest caz $a_1$ şi $b_1$, întregi, astfel ca $a = a_1d$, $b = b_1d$, deci $a + b = (a_1 + b_1)d$, ceea ce arată că şi $c$ se divide la $d$. Dacă $a$ şi $c$ se divid la $d$, scriind $c = c_1d_1$, $c_1 \in \mathbb{Z}$, rezultă $b = (c_1 - a_1)d$, deci $b$ se divide la $d$, etc.

**II.10**[M]. Fie $a, b, d \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $d|(a + b)$ şi $d|ab$. Rezultă de aici că $d|a$ şi $d|b$?

**R.** Nu, după cum rezultă din următorul exemplu: dacă $a = b = 2$, evident $4|(a + b)$, $4|ab$, fără ca $4|a$ şi $4|b$.

**II.11**[M]. Să se găsească toate numerele întregi $a \in \mathbb{Z}$ care au exact $2 \cdot |a|$ divizori.

**R.** Evident, un număr întreg $a$ are tot atîţia divizori pozitivi, cît şi negativi. Potrivit enunţului, rezultă că întregul $a$, deci şi întregul $|a|$, are $|a|$ divizori pozitivi, adică pe $1, 2, \ldots, |a|$. Acest lucru este însă posibil numai pentru $a \in \{-2, -1, 1, 2\}$ căci dacă, de exemplu, $|a| \geqslant 3$, pe lîngă numerele $1, 2, \ldots, |a|$ cu care trebuie să se dividă $|a|$, el se mai divide şi cu $(|a| - 1)|a| > |a|$ (căci $|a| - 1$ şi $|a|$ sînt prime între ele).

**II.12**[M]. Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, există numere întregi cu exact $2n + 1$ divizori?

**R.** Nu există un astfel de număr deoarece orice număr întreg are un număr par de divizori (numărul de divizori negativi este egal cu numărul de divizori pozitivi).

**II.13**[M]. Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$ şi 3 nu divide nici pe $a$, nici pe $b$, atunci 3 divide pe $a - b$ sau 3 divide pe $a + b$.

**R.** Deoarece 3 nu divide nici pe $a$, nici pe $b$, rezultă că perechea $(a, b)$ se prezintă într-una din formele $(3k_1+1, 3k_2+1)$, $(3k_1+1, 3k_2+2)$, $(3k_1+2, 3k_2+1)$, $(3k_1+2, 3k_2+2)$. În primul caz $a-b$ se divide la 3, în al doilea $a+b$, în al treilea, de asemenea, $a+b$, iar în al patrulea $a-b$.

**II.14$^{M}$.** Dacă $a, b, d \in \mathbb{Z}$ şi $d \mid ab$, rezultă că $d \mid a$ sau $d \mid b$?

**R.** Nu întotdeauna, după cum rezultă din următorul exemplu : dacă $a = 2$, $b = 3$, $d = 6$, atunci $d \mid ab$ fără ca $d \mid a$ sau $d \mid b$.

**II.15$^{M}$.** Să se arate că $1000^k - 1$ este divizibil cu 37, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$.

**R.** Potrivit formulei :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}),\ (\forall)\ a, b \in \mathbb{R}$$

rezultă $1000^k - 1 = (1000 - 1)(1000^{k-1}+\ldots+1) = 37 \cdot 27(1000^{k-1}+\ldots+1)$ ceea ce dovedeşte că numărul considerat se divide la 37.

**II.16$^{M}$.** Să se arate că dacă $p \in \mathbb{N}$, $p > 3$, are proprietatea că $p$ şi $2p+1$ nu sînt divizibile cu 3, atunci $4p+1$ este divizibil cu 3.

**R.** Deoarece $p$ nu se divide cu 3, el are una din formele $3k+1$ sau $3k+2$. Dacă $p = 3k+1$, atunci $2p+1 = 2(3k+1)+1 = 6k+3 = 3(2k+1) \vdots 3$, deci rămîne $p = 3k+2$. În acest caz, $4p+1 = 4(3k+2)+1 = 3(4k+3) \vdots 3$.

**II.17$^{M}$** Să se arate că numărul $9^{20} - 7^{20}$ este divizibil cu 10.

**R.** Avem $9^{20} - 7^{20} = (9^4)^5 - (7^4)^5$. Potrivit formulei din problema II.15. $(9^4)^5 - (7^4)^5$ se divide cu $9^4 - 7^4$, dar $9^4$ şi $7^4$ se termină în 1, deci diferenţa $9^4 - 7^4$ în 0, adică se divide cu 10. Deci numărul iniţial se divide cu 10.

**II.18$^{M}$.** a) Să se arate că oricum ar fi date trei numere întregi, există două cu suma divizibilă cu 2;

b) Să se arate că oricum ar fi date cinci numere întregi, există trei cu suma divizibilă cu 3;

c) Să se arate că oricum ar fi date nouă numere întregi, există cinci cu suma divizibilă cu 5.

**R.** a) Fiind date trei numere întregi, există totdeauna două de aceeaşi paritate. În acest caz, suma lor este divizibilă cu 2.

b) Deoarece, prin împărţire la 3 un număr poate să dea unul din resturile 0, 1, 2, oricare dintre cele cinci numere se prezintă sub una din formele $3k$, $3k+1$, $3k+2$ Făcînd suma a trei din cele cinci numere, problema divizibilităţii sumei lor la 3 revine, evident, la problema divizibilităţii la 3 a sumei resturilor pe care ele le dau prin împărţire la 3.

Dacă printre cele cinci numere alese există trei divizibile la 3, evident cu suma lor este divizibilă la 3. Presupunem că există două astfel de numere. În acest caz, trei dintre ele dau prin împărţire la 3 unul din resturile 1 sau 2. Dacă toate dintre ele dau ori restul 1, ori restul 2, suma lor este, evident, divizibilă cu 3. Presupunînd acum că situaţia anterioară nu se întîmplă, alegem unul de forma $3k+1$, unul de forma $3k+2$ şi unul de forma $3k$, în care caz suma lor se divide la 3.

Pentru cazul cînd între cele cinci numere alese există numai unul, sau nici un număr care se divide la 3, raţionăm ca mai sus.

c) Analog cu b).

**II.19^M.** Să se arate că dacă $n \in \mathbb{Z}$ atunci $n^2 | (n+1)^n - 1$.

**R.** Potrivit dezvoltării binomului după NEWTON avem:

$$(n+1)^n - 1 = \underbrace{(n^n + C_n^1 n^{n-1} + \ldots + C_n^{n-2} n^2} + C_n^{n-1} n + 1) - 1 =$$

$$= \mathscr{M}n^2 + C_n^{n-1}\, n + \cancel{1} - \cancel{1} = \mathscr{M}n^2 + n^2 = \mathscr{M}n^2,$$

deoarece $C_n^{n-1} = n$.

**II.20^M.** Să se găsească toate numerele întregi $n$ cu proprietatea:

$$n + 1 | n^2 + 1$$

**R.** Avem $n^2 + 1 = (n+1)^2 - 2n = (n+1)^2 - 2(n+1) + 2$ şi din faptul că $n + 1 | n^2 + 1$ rezultă $n + 1 | 2$, de unde sau $n + 1 = 2$, deci $n = 1$, sau $n + 1 = 1$, deci $n = 0$, sau $n + 1 = -2$ deci $n = -3$ sau $n + 1 = -1$, deci $n = -2$, căci $n + 1$ trebuie căutat printre divizorii întregi ai lui 2, care sînt $-2, -1, 1, 2$.

**II.21^M.** Să se găsească toate numerele întregi $n$ cu proprietatea

$$n - 3 | n^3 - 3.$$

**R.** Avem:

$$n^3 - 3 = n^3 - 3n^2 + 3n^2 - 3 = n^2(n-3) + 3n^2 - 9n + 9n -$$

$$- 3 = n^2(n-3) + 3n(n-3) + 9n - 27 + 27 - 3 =$$

$$= n^2(n-3) + 3n(n-3) + 9(n-3) + 24.$$

Din faptul că $n^3 - 3$ este divizibil cu $n - 3$ rezultă că 24 este divizibil cu $n - 3$, deci $n - 3$ trebuie căutat printre divizorii lui 24, adică $-24, -12, -8, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$. Rezolvînd fiecare din ecuaţiile $n - 3 = d$, unde $d$ divide mulţimea divizorilor lui 24, rezultă $n \in \{-21, -9, -5, -3, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 15, 27\}$.

**II.22^M.** Să se găsească prin algoritmul lui EUCLID cel mai mare divizor comun al numerelor:

a) $-180$; 756; b) $-375$; 360; $-900$; c) 0; 779; $-399$; 5700; d) $-3724$; 18468; e) $-540$; 588; $-576$; f) 375; 645; $-600$; $-1515$.

**R.** a) Avem schemele:

$$\text{i)}\ \begin{array}{r|l} 756 & 180 \\ \cline{2-2} 720 & 4 \\ \hline 36 & \end{array}\ ; \qquad \text{ii)}\ \begin{array}{r|l} 180 & 36 \\ \cline{2-2} 180 & 5 \\ \hline 0 & \end{array}$$

deci $(-180; 756)_* = 36$.

b) Determinăm întîi cel mai mare divizor comun al numerelor $-375$ și 360. Avem schemele:

$$\text{i)}\ \begin{array}{r|l} 375 & 360 \\ \cline{2-2} \underline{360} & 1 \\ 15 & \end{array}; \qquad \text{ii)}\ \begin{array}{r|l} 360 & 15 \\ \cline{2-2} \underline{30} & 24 \\ 60 & \\ \underline{60} & \\ 0 & \end{array}$$

deci $(375;\ 360)_* = 15$. Determinăm acum cel mai mare divizor comun al numerelor 15 și $-900$. Folosind acum aceeași schemă a lui EUCLID obținem $(15;\ -900)_* = 15$. Folosind formula:

$$(a_1;\ a_2, \ldots, a_n)_* = ((a_1;\ a_2; \ldots;\ a_{n-1})_*,\ a_n)_*$$

rezultă

$$(-375;\ 360;\ -900)_* = ((-375;\ 360)_*;\ -900)_* = (15;\ -900)_* = 15.$$

Procedînd în mod analog și pentru celelalte cazuri, obținem:

c) $(0;\ 779;\ -399;\ 5700)_* = 19$; d) $(-3724;\ 18468)_* = 76$;

e) $(-540;\ 588;\ -576)_* = 12$; f) $(375;\ 645;\ -600;\ -1515)_* = 15$.

**II.23$^{M}$.** Să se găsească cel mai mic multiplu comun al numerelor următoare:

a) $-960$; 1200; b) 30295; 36354; c) 12345; 4565; $-960$.

**R.** Pentru determinarea celui mai mic multiplu comun al numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vom folosi formula:

$$\boxed{[a_1, a_2]_* = \frac{a_1 a_2}{(a_1,\ a_2)_*}}$$

a) Avem $(-960;\ 1200)_* = 240$, deci $[-960;\ 1200]_* = [960;\ 1200]_* = \dfrac{960 \cdot 1200}{240} = 4800$.

Folosind, în continuare, raționamentele expuse anterior, rezultă:

b) $[30295;\ 36354]_* = 181770$; c). Avem $[12345;\ 4565;\ -900]_* = [12345;\ 4565;\ 900]_* = [[12345;\ 4565]_*;\ 900]_* = [11270985;\ 900]_* = 676259100$.

**II.24$^{M}$.** Să se afle toate numerele prime cu 100 și mai mici în modul decît 50.

**R.** Numerele $a$ și $b$ se numesc prime între ele dacă $(a,\ b)_* = 1$. Dintre numerele naturale mai mici decît 50, prime cu 100 sînt toate numerele impare din care se exclud cele impare divizibile cu 5. Rezultă, așadar, că prime cu 100 și mai mici în modul decît 50 sînt numerele care aparțin mulțimii:

$$\{-49,\ -47,\ -45,\ \ldots,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ \ldots,\ 45,\ 47,\ 49\} - \{-45,\ -35,\ -25, \ldots, -5,\ 5,\ 15, \ldots, 25,\ 35,\ 45\}.$$

**II.25$^M$.** Fie $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Să se arate că există o infinitate de numere întregi prime cu $n$.

**R.** Prime cu $n$ sînt numerele $n + 1$, $2n + 1$, $3n+1, \ldots, kn + 1, \ldots$ căci dacă, de exemplu, $n$ şi $jn + 1$ ar avea un divizor comun $d$, acesta ar divide şi numărul $jn + 1 - nj = 1$.

**II.26$^M$.** Se dau două numere întregi $a$ şi $b$ nenule care au c.m.m.d.c. pe 5, iar cîturile împărţirilor succesive din algoritmul lui EUCLID sînt $-1$, 3, 2. Să se afle $a$ şi $b$.

**R.** Fie $r_1, r_2, r_3$ resturile rezultate din împărţirile succesive din algoritmul lui EUCLID. Evident, $r_3 = 0$, $r_2 = 5$ şi:

$$a = -b + r_1, b = 3r_1 + r_2, r_1 = 2r_2 + r_3.$$

Înlocuind, rezultă $a = -25$, $b = 35$.

**II.27$^M$.** Să se găsească două numere întregi $a$ şi $b$ astfel încît $(a, b)_* = 3$ şi $[a, b]_* = 72$. Este soluţia unică?

**R.** Din relaţia $ab = (a, b)_* [a, b]_*$ rezultă $ab = 216 = 3 \cdot 72 = 1 \cdot 216 = 2 \cdot 108 = 6 \cdot 36 = 9 \cdot 24 = 12 \cdot 18 = 8 \cdot 27$. Convin $a = 24$, $b = 9$, respectiv $a = 72$, $b = 3$.

**II.28$^M$.** Fie $a$ şi $b$ numere întregi nenule şi $m$ un c.m.m.m.c. al numerelor $a$ şi $b$. Să se arate că $\dfrac{m}{a}$ este prim cu $\dfrac{m}{b}$.

**R.** Deoarece $m = [a, b]_*$ rezultă existenţa numerelor $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ astfel ca $m = a_1 a$, $m = b_1 b$, cu $(a_1, b_1)_* = 1$. Cum $\dfrac{m}{a} = a_1$, $\dfrac{m}{b} = b_1$; rezultă afirmaţia.

**II.29$^M$.** Să se arate că numerele $2k + 1$ şi $9k + 4$ sînt prime între ele, oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$.

**R.** Evident, dacă $d$ divide pe $a$ şi $b$ întregi, atunci divide şi numărul $ma + nb$, $(\forall)$ $m, n \in \mathbb{Z}$. Fie $d$ divizor al lui $2k + 1$ şi $9k + 4$. În acest caz $d$ divide şi numărul $9(2k + 1) - 2(9k + 4) = 1$. Deci cel mai mare divizor comun al numerelor date este 1, adică ele sînt prime între ele.

**II.30$^M$.** Să se găsească c.m.m.d.c. al numerelor $2k - 1$ şi $9k + 4$, în funcţie de numărul întreg $k$.

**R.** Un divizor $d$ al numerelor date divide şi numărul $2(9k + 4) - 9(2k - 1) = 17$. Deci, sau $d = 1$, caz în care numerele sînt prime între ele, sau $d = 17$. Să cercetăm acest din urmă caz. Fie $2k - 1 = 17a$, $9k + 4 = 17b$, cu $(a, b)_* = 1$. Eliminînd pe $k$ între relaţiile anterioare găsim $9a - 2b = -1$. Să cercetăm care sînt soluţiile în numere întregi ale acestei ecuaţii. O primă soluţie, $a = 1$, $b = 5$. Fie acum $(a_0, b_0)$ o soluţie arbitrară (să observăm că $a$ şi $b$ sînt prime între ele, căci eventualul lor divizor comun ar divide şi pe $-1$). Din relaţiile $9a - 2b = -1$, $9a_0 - 2b_0 = -1$ obţinem, prin scădere $9a - 2b - 9a_0 + 2b_0 = 0$, de unde $\dfrac{a - a_0}{b - b_0} = \dfrac{2}{9}$. Rezultă de aici că putem lua $a - a_0 = 2t$, $b - b_0 =$

$= 9t$, $t \in \mathbb{Z}^*$, deci obținem pentru $a$ și $b$ soluțiile generale $a = 1 + 2t$, $b = 5 + 9t$. De aici rezultă $k = 17t + 9$, $t \in \mathbb{Z}^*$. Deci, dacă avem $k$ de forma $17t + 9$, $t \in \mathbb{Z}$, cel mai mare divizor comun al numerelor $2k - 1$ și $9k + 4$ este 17, iar dacă numărul $k$ nu are această formă, ele sînt prime între ele.

**II.31$^M$.** Să se arate că dacă $a$ și $b$ sînt numere întregi, $d$ un c.m.m.d.c. al lor, iar $k, l \in \mathbb{Z}$, cu proprietatea că dacă:

$$ak + bl = d,$$

atunci $(k, l)_* = 1$.

**R.** Presupunem $(k, l)_* = u \neq 1$. În acest caz $ud \mid (ak + bl)$ deci $ud \mid d$, deci $u \mid 1$, absurd. Deci $(k, l)_* = 1$.

**II.32$^M$.** Să se arate că dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere întregi și $d$ este un cel mai mare divizor comun al lor, atunci există $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$ astfel încît $\sum_{i=1}^{n} k_i a_i = d$.

**R.** Folosind teorema 3.3.(*v. Manual algebră, cls. X., p.* 95), există $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ astfel încît $k_1a_1 + k_2a_2 = d$. Luînd $k_3 = \ldots = k_n = 0$, obținem enunțul.

**II.33$^M$.** Să se arate că dacă $a$ și $b$ sînt numere naturale prime între ele, atunci oricare ar fi $n > ab$, există $x$ și $y$ naturale astfel încît $n = ax + by$.

**R** Fie $a, b$ date. Să considerăm numerele $n - ax$, unde $x$ parcurge segmentul $\overline{0, b-1}$. Toate aceste numere dau prin împărțirea la $b$ resturi diferite. În adevăr, dacă ar exista două, să zicem $n - ax_1$ și $n - ax_2$ care, prin împărțirea la $b$ să dea același rest $r$, ar rezulta, existența lui $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ așa ca $n - ax_1 = bm_1 + r$, $n - ax_2 = bm_2 + r$. Rezultă de aici $m_i = \dfrac{n - ax_i - r}{b} < \dfrac{n}{b}$ și, prin eliminarea lui $n$ și $r$ între relațiile precedente, $\dfrac{x_1 - x_2}{m_2 - m_1} = \dfrac{b}{a}$, de unde rezultă că există $t \in \mathbb{Z}$ (putem presupune $x_1 > x_2$) așa ca $x_1 - x_2 = bt$, $m_2 - m_1 = at$. Dar $x_1, x_2 \in \overline{0, b-1}$, deci $0 < |x_1 - x_2| < b$, contrar relației $x_1 - x_2 = bt$. Rezultă că între numerele $n - ax$, $x \in \overline{0, b-1}$, există unul care, prin împărțirea la $b$, dă restul 0, adică există $q \in \mathbb{Z}^*$ așa ca $n - ax = qb$, de unde $n = ax + bq$.

**II.34$^M$.** Care dintre următoarele numere întregi:

3477, 2003, 1213, 2099, 3649, 847,

1493, 2027, 2261, 6959, 9689, 10267

sînt prime?

**R.** Pentru a vedea care din numerele date sînt prime, vom folosi următorul criteriu (v. *Manual algebră cls. X, p.* 102): $a$ este prim dacă nu se divide cu nici un număr prim $p \leq \sqrt{a}$. Exemplificăm pentru primul număr, pentru celelalte procedeul fiind analog. Avem $\sqrt{3447} < 53$. Este deci suficient să împărțim numărul dat la toate numerele prime mai mici sau egale cu 53. Se vede că el se divide prin 3 deci nu este prim.

**II.35^M^.** Folosind teorema fundamentală a aritmeticii, să se găsească cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al următoarelor numere:

a) 319 și 407; b) 333 și 504; c) 27, 24 și 15;

d) 24, 48, 64, 192; e) 325, 526, 169 și 1024.

**R.** a) Avem $319 = 11 \cdot 29$ și $407 = 11 \cdot 37$, deci $(319; 407)_* = 11$ și $[319; 407]_* = 11 \cdot 29 \cdot 37 = 11803$. b) Avem $333 = 3^2 \cdot 37$, $504 = 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2$, deci $(333; 504)_* = 3^2 = 9$ $[333; 504]_* = 18648$. c) Avem $(27; 24; 15)_* = 3$ și $[27; 24; 15]_* = 1080$ d) Avem $(24; 48; 64; 192)_* = 8$ și $[24; 48; 64; 192] = 192$. d) Avem $(325; 526; 169; 1014)_* = 13$ și $[325; 526; 169; 1014]_* = 7512050$.

**II.36^M^.** Să se determine cel mai mic număr natural care are exact 20 de divizori întregi și cel mai mic număr natural care are exact 72 divizori întregi.

**R.** Numărul de divizori întregi ai numărului $n = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \dots p_{i_k}^{\alpha_k}$ (descompunerea din membrul al doilea este descompunerea canonică în factori primi a lui $n$, $p_k$ reprezentînd al $k$-lea număr prim iar $\alpha_i \in \mathbb{Z}$) este $\sigma_1(n) = 2(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$. Rezultă, pentru primul număr căutat, că $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1) = 10 = 1 \cdot 10 = 2 \cdot 5$. Rezultă de aici $\alpha_1 + 1 = 1$, $\alpha_2 + 1 = 10$ sau $\alpha_1 + 1 = 2$, $\alpha_2 + 1 = 5$. Rezultă că singurele numere care admit 20 de divizori întregi sînt de forma $p^9$ sau $pq^4$, $p$ și $q$ fiind numere prime. Se vede că $2^9 = 512$ și $2^4 \cdot 3 = 48$, deci 48 este numărul căutat.

Analog pentru subpunctul al doilea al problemei.

**II.37^M^.** Să se găsească un număr natural care să aibă exact 15 divizori naturali și singurii săi divizori primi să fie 7 și 11.

**R.** Numărul este deci de forma $7^\alpha 11^\beta$. Numărul divizorilor săi este $(\alpha + 1)(\beta + 1)$, deci $(\alpha + 1)(\beta + 1) = 15 = 3 \cdot 5$. Rezultă $\alpha + 1 = 3$, $\beta + 1 = 5$, deci $\alpha = 2$, $\beta = 4$, sau $\alpha + 1 = 5$, $\beta + 1 = 3$, deci $\alpha = 4$, $\beta = 2$. Numerele căutate sînt $7^2 \cdot 11^4$, $7^4 \cdot 11^2$.

**II.38^M^.** Fie $a$ și $b$ numere întregi prime între ele. Să se arate că $a + b$ și $a - b$ sînt prime cu $ab$. Să se arate că, în plus, dacă $a$ și $b$ au parități diferite, atunci $a + b$ este prim cu $a - b$ și $a^3 - b^3$.

**R.** Fie $p \mid a + b$ și $p \mid ab$, cu $p$ prim. Din a doua relație rezultă sau $p \mid a$, sau $p \mid b$. Dacă $p \mid a$, din $p \mid a + b$ rezultă și $p \mid b$, absurd căci $(a, b)_* = 1$. Analog dacă $p \mid b$.

Celelalte subpuncte ale problemei se tratează analog.

**II.39^M^.** Dacă $a$ și $b$ sînt numere naturale nenule și suma lor este un număr prim, atunci $a$ este prim cu $b$.

**R.** Evident $a$ și $b$ nu pot fi prime strict mai mari decît 2 căci, în acest caz, $a + b$ ar fi număr par strict mai mare decît 2, deci n-ar fi prim. Dacă $a = 2$, pentru ca $a + b$ să fie număr prim, trebuie ca $b$ să fie impar, și, în adevăr, $(a, b)_* = 1$. Dacă $a$ și $b$ ar avea un divizor comun $d \geqslant 2$ acesta ar divide și pe $a + b$, contrar ipotezei $a + b$ prim.

Rămîne $(a, b)_* = 1$.

**II.40**$^M$. Să se arate că dacă $a$, $b$, $c \in \mathbb{Z}$ și $a|c$, $b|c \cdot (a, b)_* = 1$, atunci $ab|c$.

**R.** Deoarece $[a, b]_* = \dfrac{ab}{(a, b)_*}$ și $(a, b)_* = 1$, rezultă $[a, b]_* = ab$. Din $a|c$ și $b|c$ rezultă, potrivit definiției că $c$ este multiplu comun, deci $[a, b]_*|c$, adică $ab|c$.

**II.41**$^M$. Să se arate că dacă $a$, $b$, $c \in \mathbb{Z}$ au proprietatea că $a$ este prim cu $b$ și cu $c$, atunci $a$ este prim cu $bc$.

**R.** Presupunînd $(a, bc)_* > 1$, există $p$ prim așa ca $p|a$ și $p|bc$. Din $p|bc$ rezultă sau $p|b$, deci $(a, b)_* > 1$, absurd, sau $p|c$, deci $(a, c)_* > 1$, absurd.

Rămîne că $(a, bc)_* = 1$.

**II.42**$^M$. Să se arate că dacă $b|ac$, atunci $b|(a, b)_*(a, c)_*$.

**R.** Din $b|ac$ rezultă $\dfrac{b}{(a, b)_*} \Big| \dfrac{ac}{(a, b)_*}$, deci $\dfrac{b}{(a, b)_*} \Big| \dfrac{a}{(a, b)_*} \cdot c$ și cum $\dfrac{b}{(a; b)_*}$ este prim cu $\dfrac{a}{(a, b)_*}$, rezultă $\dfrac{b}{(a, b)_*}\Big|c$. Ca atare, $b|(a, b)_* c$. Rezultă $\dfrac{b}{(b, c)_*}\Big|(a, b)_* \cdot \dfrac{c}{(b, c)_*}$ dar cum $\dfrac{b}{(b, c)_*}$ este prim cu $\dfrac{c}{(b; c)_*}$ rezultă $\dfrac{b}{(b, c)_*}\Big|(a, b)_*$, deci $b|(a, b)_*(b, c)_*$.

**II.43**$^M$. Să se arate că dacă $d$ este un c.m.m.d.c. al numerelor $a$ și $b$, atunci $d^3$ este un c.m.m.d.c. al numerelor $a^3$ și $b^3$. Reciproca este adevărată?

**R.** Fie $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}$ descompunerile numerelor $a$ și $b$ în factori primi (am completat descompunerile lui $a$ și $b$ astfel încît, formal, în scrierile acestora să apară aceleași numere prime deși unele puteri la care figurează acestea pot fi 0). Atunci, după cum se știe, $d = p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} p_2^{\max\{\alpha_2, \beta_2\}} \ldots p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k\}}$. Cum $\max\{3\alpha\ 3\beta\} = 3\max\{\alpha, \beta_1\}$ rezultă că afirmația este adevărată, căci rezultă $a^3 = p_1^{3\alpha_1} p_2^{3\alpha_2} \ldots p_k^{3\alpha_k}$, $b^3 = p_1^{3\beta_1} p_2^{3\beta_2} \ldots p_k^{3\beta_k}$ și atunci $(a^3, b^3)_* = p_1^{\max\{3\alpha_1, 3\beta_1\}} p_2^{\max\{3\alpha_2, 3\beta_2\}} \ldots p_k^{\max\{3\alpha_k, 3\beta_k\}} = p_1^{3\max\{\alpha_1, \beta_1\}} p_2^{3\max\{\beta_2, \beta_2\}} \ldots p_k^{3\max\{\alpha_k, \beta_k\}} = d^3$.

Reciproca este, de asemenea, adevărată, reluînd raționamentul anterior de la sfîrșit spre început.

**II.44**$^M$. Fie $r \in \mathbb{Q}$ cu proprietatea că $r^m$ este un număr întreg, $m \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $r$ este întreg.

**R.** Fie $r = \dfrac{a}{b}$, $a$, $b \in \mathbb{Z}$, $(a, b)_* = 1$ și $a = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \ldots p_{i_k}^{\alpha_k}$, $b = p_{i_1}^{\beta_1} \cdot p_{i_2}^{\beta_2} \ldots p_{i_q}^{\beta_q}$, cu $p_{i_t} \neq p_{i_u}$, $(\forall)\ t \in \overline{1, k}$, $u \in \overline{1, q}$. Din $r^m \in \mathbb{Z}$ rezultă :

$$\frac{p_{i_1}^{m\alpha_1} p_{i_2}^{m\alpha_2} \ldots p_{i_k}^{m\alpha_k}}{p_{i_1}^{m\beta_1} \cdot p_{i_2}^{m\beta_2} \ldots p_{i_q}^{m_q}} \in \mathbb{Z}$$

Dar această fracţie nu se simplifică dacă există $\beta \neq 0$ deci $n$ ar fi număr întreg. Rezultă $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta = 0$, deci $b = 1$, deci $r = a \in \mathbb{Z}$

**II.45^M^.** Fie $a$, $b$, $m \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $(a, b)_* = 1$ şi $\sqrt[n]{ab} \in \mathbb{N}$. Să se arate că $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b} \in \mathbb{N}$.

**R.** Deoarece $(a, b)_* = 1$ rezultă că în descompunerile lui $a$ şi $b$ nu există factori primi comuni. Cum $\sqrt[n]{ab} \in \mathbb{N}$, rezultă că fiecare factor prim din $a$ şi respectiv din $b$ apare la o putere multiplu de $n$, deci $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b} \in \mathbb{N}^*$.

18) **II.46^M^.** Să se arate că numerele de forma $8^n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, nu sînt prime.

**R.** Avem, evident:

$$8^n + 1 = (2^n)^3 + 1 = (2^n + 1)(2^{2n} - 2^n + 1)$$

şi $2^{2n} - 2^n + 1 > 1$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, deci $8^n + 1$ nu este prim.

**II.47°.** Să se arate că oricare două numere din şirul:

$$2^{2^0} + 1,\ 2^{2^1} + 1,\ 2^{2^2} + 1, \ldots, 2^{2^n} + 1, \ldots$$

sînt prime între ele.

**R.** Notînd $x_n = 2^{2^n} + 1$, avem:

$$x_n - 2 = x_{n-1}x_{n-2} \ldots x_1x_0.$$

Dacă $x_n$ şi $x_k$, $k < n$, ar avea divizor comun, acesta ar divide şi pe 2, fals, căci $x_n$ este impar, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

**II.48°.** Suma unor numere naturale nenule consecutive este 5757. Să se găsească aceste numere.

**R.** Însemnînd numerele căutate prin $a$, $a + 1, \ldots, a + k - 1$, avem:

$$S = a + (a + 1) + \ldots + (a + k - 1) = \frac{(2a + k - 1)k}{2}$$

deci:

$$\frac{(2a + k - 1)k}{2} = 5757$$

ecuaţie care în numere întregi strict pozitive are soluţiile:

$$(a, k) \in \{(5757, 1), (2827, 2), (1918, 3), (957, 6), (294, 19), (133, 38), (73, 56)\},$$

care se obţin descompunînd pe $2 \cdot 5757$ în factori şi formînd sistemele $2a + k - 1 = u$, $k = v$, cu $uv = 2 \cdot 5757$.

**II.49°.** Să se determine toate numerele naturale $x$ pentru care numerele $x$, $2x + 1$, $5x + 2$ sînt numere prime.

**R.** Dacă $x = \mathcal{M}6$, evident, el nu este număr prim. Dacă $x = \mathcal{M}6 + 1$, atunci $2x + 1 = 2(\mathcal{M}6 + 1) + 1 = \mathcal{M}6 + 3 = \mathcal{M}3$ deci nu este prim. Nu convin nici cazurile $x = \mathcal{M}6 + 2$, $x = \mathcal{M}6 + 3$, $x = \mathcal{M}6 + 4$ (în primul şi ultimul, $x$ este multiplu de 2, iar în al doilea, de 3). Dacă $x = \mathcal{M}6 + 5$, atunci $5x + 2 = 5(\mathcal{M}6 + 5) + 2 = \mathcal{M}6 + 27 = \mathcal{M}3$.

Deci $x < 6$. Considerînd toate cazurile posibile, găsim soluţia convenabilă $x = 3$ care conduce la numerele 3, 7, 17.

**II.50°.** Să se arate că dacă $a$, $b$, $c$, $d$ sînt numere naturale impare distincte, atunci:

$$abc + abd + acd + bcd + 34 \leqslant 2abcd.$$

**R.** Împărţind cu $abdc$, inegalitatea se scrie:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{34}{abcd} \leqslant 2.$$

Primul membru este maxim cînd $a$, $b$, $c$, $d$ sînt minime, adică atunci cînd $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 7$ (eventual o permutare arbitrară). Calculînd, găsim că primul membru are cea mai mare valoare egală cu 2.

**II.51°.** Să se arate că numărul:

$$\frac{(1 + \sqrt{3})^{2n} + (1 - \sqrt{3})^{2n}}{2^{n+1}}$$

este natural.

**R.** Notînd $S_n = \dfrac{(1 + \sqrt{3})^{2n} + (1 - \sqrt{3})^{2n}}{2^{n+1}}$ se observă că el este pozitiv şi:

$$S_{n+2} - 4S_{n+1} + S_n = 0, \ (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

Cum $S_1 = 2$, $S_2 = 7$ rezultă, prin inducţie, $S_n \in \mathbb{N}^*$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

**II.52°.** Să se afle cifra unităţii numerelor:

$$a = 23^{23} - 13^{11}; \ b = 29^{29} - 17^{18}.$$

**R.** Numerele $a$ şi $b$ se termină, ambele, în 0, căci, de exemplu, $23^{23}$ are ultima cifră aceeaşi cu ultima cifră a lui $3^{23}$ (căci $23^{23} = (20 + 3)^{23} = \mathcal{M}20 + 3^{23}$ conform dezvoltării după Newton a binomului), iar ultima cifră a lui $3^{23} = 3 \cdot 9 \cdot 9^{10}$ este 7, căci $9^{10} = 81^5$ se termină în 1, iar 27 se termină în 7.

**II.53°.** Să se arate că:

$$3^{1966} + 5^{1966} - 34 \vdots 1966.$$

**R.** Se observă că numărul $K = 3^{1966} + 5^{1966} - 34$ se divide la 2, deci mai trebuie arătat că el se divide la 983 ($1966 = 2 \cdot 983$). Dar 983 este număr prim şi, potrivit teoremei lui Fermat:

$$9^{983} - 9 \vdots 983,$$

$$25^{983} - 25 \vdots 983$$

deci:

$$K = 9^{983} + 25^{983} - 34 = (9^{983} - 9) + (25^{983} - 25) \vdots 983.$$

**II.54°.** Să se găsească un polinom $P$ cu coeficienţi întregi astfel încît:

$$P(n) + 5^n \vdots 64, (\forall) n \in \mathbb{N}^* - \{1, 2\}.$$

**R.** Putem lua $P = -8x^2 - 4x - 1$.

**II.55°.** Să se afle restul împărțirii prin 35 a numărului:

$$M = 3^{12n+10} \cdot 10^{6m+3} + 300 \cdot 72^{72p+30}$$

unde $m$, $n$, $p \in \mathbb{N}^*$.

**R.** Restul este 20.

**II.56°.** Să se decidă dacă:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{n^2}}$$

este sau nu un număr irațional.

**R.** Presupunem că:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2^2}} + \frac{1}{2^{3^2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n^2}} + \cdots = \frac{a}{b}$$

unde $a$ și $b$ sînt naturale $(b \neq 0)$. Înmulțind cu $b \cdot 2^{n^2}$ obținem:

$$a \cdot 2^{n^2} - b(2^{n^2-1} + 2^{n^2-2^2} + \ldots + 1) = b\left(\frac{1}{2^{(n+1)^2-n^2}} + \frac{1}{2^{(n+2)^2-n^2}} + \cdots\right). \quad (1)$$

Dar:

$$\frac{1}{2^{(n+1)^2-n^2}} < \frac{1}{2^{k(2n+1)}}, \ (\forall) k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

de unde:

$$b\left[\frac{1}{2^{(n+1)^2-n^2}} + \frac{1}{2^{(n+2)^2-n^2}} + \cdots\right] \leqslant b\left[\frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{2^{2(n+1)}} + \cdots\right] =$$

$$= b\,\frac{\frac{1}{2^{2n+1}}}{1 - \frac{1}{2^{2n+1}}} = b\,\frac{1}{2^{2n+1} - 1}.$$

În cazul în care $n$ este foarte mare, $\frac{b}{2^{2n+1}} < 1$ și s-a ajuns la o contradicție.

Așadar, numărul din enunț este irațional, căci primul membru al egalității (1) este întreg, iar al doilea pozitiv subunitar.

**II.57°.** Să se arate că în scrierea în baza 10 a numerelor $1974^n + 2^n$ și $1974^n$, cu $n \in \mathbb{N}$, se folosește același număr de cifre.

**R.** Pentru $n = 0$ și $n = 1$, afirmația este adevărată. Fie $n > 1$. Notînd prin $k$ numărul de cifre din scrierea lui $1974^n$, deoarece $1974^n > 10^{3n}$ avem $k \geqslant 3n$ și:

$$10^{k-1} < 1974^n < 10^k.$$

Presupunem că în scrierea în baza 10 a numărului $1974^n + 2^n$ se folosesc mai mult de $k$ cifre. În acest caz am avea:

$$10^k \leqslant 1974^n + 2^n.$$

Rezultă :

$$987^n \cdot 2^n < 2^k \cdot 5^k \leqslant (987^n + 1) \cdot 2^n$$

sau, împărţind cu $2^n$ :

$$987^n < 2^{k-n} \cdot 5^k \leqslant 987^n + 1.$$

Aşadar :

$$2^{k-n} \cdot 5^k = 987^n + 1.$$

Pentru că $k - n \geqslant 2n$, $n \geqslant 2$, rezultă că $2^{k-n} \cdot 5^k$ se împarte prin 8 dar $987^n + 1$ nu este multiplu de 8 (resturile sînt 2, 4 sau 6).

Deci afirmaţia (1) nu poate avea loc. Această contradicţie ne arată că presupunerea făcută este falsă. Rezultă că numerele $1974^n + 2^n$ şi $1974^n$ se scriu în baza 10 cu acelaşi număr de cifre.

**II.58°.** Să se arate că $2^p + 3^p$ nu este puterea netrivială a nici unui număr natural, pentru orice $p$ număr prim.

**R.** Pentru $p = 2$ afirmaţia este adevărată. Dacă $p > 2$, $p$ impar, avem :

$$2^p + 3^p = 5 \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \, 2^{p-1-i} \, 3^k. \qquad (1)$$

Deoarece $3 \equiv -2 \pmod 5$, obţinem :

$$\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \, 2^{p-1-i} \cdot 3^k \equiv \sum_{i=0}^{p-1} 2^{p-1} \pmod 5.$$

Apoi :

$$\sum_{i=0}^{p-1} 2^{p-1} \equiv p \cdot 2^{p-1} \pmod 5.$$

Folosind (1) avem că :

$$2^p + 3^p = 5t$$

unde $t \not\equiv 0 \pmod 5$ ceea ce arată că $2^p + 3^p$ nu este o putere netrivială a unui număr natural.

Evident, nici numărul $2^5 + 3^5 = 275$ nu este o astfel de putere.

**II.59°.** Să se determine numerele naturale $m$ şi $n \in \mathbb{N}$ astfel ca $2^m + 3^n$ să fie pătratul unui număr natural.

**R.** Presupunem că :

$$2^m + 3^n = t^2, \; t \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

Pentru orice $t \in \mathbb{N}$ avem $t^2 \equiv 0 \pmod 3$ sau $t^2 \equiv 1 \pmod 3$. Această afirmaţie implică faptul că $m$ trebuie să fie un număr par căci $2^m \equiv 2 \pmod 3$, oricare ar fi $m$ impar. Cum $t$ este un număr impar, rezultă :

$$t^2 \equiv 1 \pmod 4 \qquad (2)$$

Pentru $m \geqslant 2$ avem $2^m \equiv 0 \pmod 4$. Folosind (1) şi (2) obţinem :

$$3^n \equiv 1 \pmod 4$$

şi rezultă că $n$ este par, adică $n = 2q\ (q \in \mathbb{N})$. Relaţia (2) se mai scrie:

$$2^m = t^2 - 3^n$$

adică:

$$2^m = (t - 3^q)(t + 3^q). \tag{3}$$

Această ultimă relaţie are loc dacă şi numai dacă:

$$t - 3^q = 2^y,\ t + 3^q = 2^{m-y},\ y \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Vom avea că:

$$3^q = 2^{y-1}(2^{m-2y} - 1). \tag{5}$$

Relaţia (5) este adevărată numai dacă $y = 1$. În acest mod vom obţine:

$$3^q + 1 = 2^{m-2} \tag{6}$$

ceea ce este posibil numai pentru $m > 2$. Din relaţia (6) trebuie să avem:

$$3^q + 1 \equiv 0 \pmod 4.$$

Rezultă că numărul $q$ este impar. Avem atunci:

$$3^q + 1 = 4\sum_{i=0}^{q-1}(-1)^i 3^{q-1-i} \equiv 4\sum_{i=0}^{q-1}(-1)^i(-1)^{q-1-i} \equiv 4(-1)^{q-1}q \pmod 4)$$

adică $3^q + 1 = 4u, u \not\equiv 0 \pmod 4$. Dar $2^{m-2} = 4u, u \not\equiv 0 \pmod 4$ numai dacă $m = 4$. Deci $q = 1$ adică $n = 2$ şi obţinem $m = 4$ şi $n = 2$.

**II.60°.** Se dau numerele naturale $a$, $b$, $n$ aşa încît pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, $k \neq b$, numărul $k^n - a$ se divide cu $k - b$. Să se arate că $a = b^n$.

**R.** Avem, evident:

$$k^n - a = (k - b + b)^n - a = \mathcal{M}(k - b) + b^n - a.$$

Se ştie că polinomul $K^n - a$ în nedeterminata $K$ este divizibil cu $K - b$. Dar, în acest caz, cum $b^n - a$ este o constantă, rezultă $b^n - a = 0$ deci $b^n = a$.

**II.61°.** Fie $n$ şi $m$ două numere întregi pozitive astfel încît $n > m \geq 1$. În scrierea în baza 10 a numărului $1978^m$, ultimele trei cifre sînt egale, în aceeaşi ordine, respectiv cu cele din scrierea în baza 10 a lui $1978^n$. Să se găsească $m$ şi $n$ astfel ca $m + n$ fie să minim.

**R.** Deoarece $n > m$ rezultă $x \overset{\text{def.}}{=} 1978^n - 1978^m > 0$. Ultimele 3 cifre fiind respectiv aceleaşi, numărul $x$ va avea ultimele trei cifre egale cu 0, deci el va fi multiplu de 1000, adică de $8 \cdot 125$.

Mai putem scrie:

$$x = 1978^n - 1978^m = 1978^m(1978^{n-m} - 1).$$

Evident că factorul $1978^m$ este număr par, iar factorul $1978^{n-m} - 1$ este număr impar. Deoarece $x$ este multiplul lui $8 \cdot 125$, înseamnă că numărul $1978^m$ trebuie să fie divizibil cu 8, iar $1978^{n-m} - 1$ divizibil cu 125. Cercetăm cazul cînd $1978^m$ este multiplu de 8. Avem $1978 = 2 \cdot 989$ şi deci $1978^m = 2^m \cdot 989^m$. Pentru ca $1978^m$ să fie multiplu de 8, trebuie în mod necesar ca $m \geqslant 3$. Cercetăm cazul cînd $1978^{n-m} - 1$ este divizibil cu 125. Presupunem acest lucru adevărat. Vom pleca de la relația:

$$1978^{n-m} \equiv 1 \pmod 5$$

(căci, evident, dacă $1978^{n-m} - 1$ se divide cu 125, el se va divide și cu 5).

Această relație se mai scrie:

$$(-2)^{n-m} \equiv 1 \pmod 5. \tag{1}$$

Observăm că $(-2)^4 \equiv 1 \pmod 5$ deci ca (1) să fie adevărată trebuie ca $n - m = 4k$, $k \in \mathbb{N}$ (în celelalte cazuri, $(-2)^1 = -2$, $(-2)^2 = 4$, $(-2)^3 = -8$). Vom determina numărul $k$, cel mai mic, așa încît $1978^{4k} - 1$ să fie divizibil cu 125. Dar:

$$1978^4 \equiv (-22)^4 \pmod{125}$$

și, succesiv:

$$1978^4 \equiv (-11 \cdot 2)^4 \pmod{125},$$

$$1978^4 \equiv (121 \cdot 4)^2 \pmod{125},$$

$$1978^4 \equiv (-4 \cdot 4)^2 \pmod{125},$$

$$1978^4 \equiv 256 \pmod{125},$$

$$1978^4 \equiv 6 \pmod{125}.$$

Deci, dacă:

$$1978^{4k} \equiv 1 \pmod{125}$$

atunci:

$$6^k \equiv 1 \pmod{125}. \tag{2}$$

Remarcăm că:

$$6^k = (1 + 5)^k = 1 + 5k + \frac{k(k-1)}{2} \cdot 5^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \cdot 5^3 + \cdots$$

deci relația (2) devine:

$$5k + \frac{k(k-1)}{2} \cdot 5^2 \equiv 0 \pmod{125}$$

adică numărul $\frac{5k\,[2 + 5(k-1)]}{2}$ trebuie să fie multiplu de 125. Dar $2 + 5(k-1)$ nu este niciodată multiplu de 5 și deci $k$ este multiplu de 25. Evident, cel mai mic număr $k$, îndeplinind toate condițiile anterioare, este $k = 25$ deci, în acest caz:

$$n - m = 4 \cdot 25 = 100.$$

Obținem $m = 3$ și $n = 103$ și deci:

$$\min(m + n) = 106.$$

**II.62°.** Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația:

$$\frac{2}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

**R.** *Soluția I.* Ecuația se poate scrie (evident, admitem $xyz \neq 0$):

$$2xy = z(x+y). \tag{1}$$

Numerele $x$ și $y$ sînt rădăcinile ecuației:

$$t^2-(x+y)t+\frac{z(x+y)}{2}=0, \tag{2}$$

și dacă notăm $x+y=n$, ecuația (1) devine:

$$t^2-nt+\frac{zn}{2}=0$$

cu rădăcinile:

$$x=\frac{n+\sqrt{n^2-2nz}}{2},\ y=\frac{n-\sqrt{n^2-2nz}}{2}. \tag{2'}$$

Cum $x, y \in \mathbb{Z}$, rezultă că $n^2-2nz$ trebuie să fie pătrat perfect deci există $k \in \mathbb{N}$ așa încît:

$$n^2-2nz=k^2. \tag{3}$$

Relația (3) se mai scrie:

$$(n-z)^2=k^2+z^2. \tag{4}$$

Această ecuație are în $\mathbb{Z}$ soluțiile:

$$n-z=m(u^2+v^2),\ k=2uvm,\ z=m(u^2-v^2) \tag{5}$$

și respectiv:

$$n-z=m(u^2+v^2),\ k=m(u^2-v^2),\ z=2muv \tag{6}$$

cu $m, u, v \in \mathbb{Z}$ și $u$ și $v$ prime între ele. De aici rezultă pentru ecuația propusă soluțiile:

$$\begin{cases} x=mu(u+v) \\ y=mu(u-v) \\ z=m(u-v)(u+v) \end{cases} \tag{5'}$$

și:

$$\begin{cases} x=mu(u+v) \\ y=mv(u+v) \\ z=2muv. \end{cases} \tag{6'}$$

*Soluția a II-a.* Scriem ecuația sub forma:

$$z = \frac{2xy}{x+y}.$$

Fie $D$ cel mai mare divizor comun al numerelor $x$, $y$. Avem în acest caz:

$$x = Dx_1;\ y = Dy_1;\ z = \frac{2Dx_1y_1}{x_1+y_1}.$$

Numerele $x_1$ și $y_1$ sînt acum prime între ele și, de asemenea, numerele $x_1y_1$ și $x_1+y_1$ sînt prime între ele. Ca $z$ să fie întreg este necesar și suficient să avem:

$$x_1 + y_1 = a,\ D = ab$$

sau:

$$2D = ab,\ x_1 + y_1 = a,\quad a, b, \in \mathbb{Z}.$$

Scriem soluția problemei sub forma:

$$\text{(I)}\ x_1 = c, y_1 = a - c, z = \frac{2bc}{a-c},\ D = ab$$

sau:

$$\text{(II)}\ x_1 = c, y_1 = 2a_1 - c_1, z = \frac{bc}{2a_1 - c},\ D = a_1b.$$

Trecem la $x$, $y$, $z$ și obținem:

$$\text{(I')}\ x = abc, y = ab(a-c), z = 2bc(a-c), c < a$$

sau:

$$\text{(II)}\ x = abc, y = ab(2a-c), z = bc\,(2a-c), c < 2a.$$

**II.63°.** Fie $a$ și $b$ numere întregi pozitive astfel ca $b < a$. Notăm prin $C$ și $R$ cîtul și restul împărțirii lui $na$ la $a-b$. Să se exprime cîtul $C_1$ și restul $R_1$ al împărțirii lui $nb$ la $a-b$.

**R.** Conform enunțului:

$$na = (a-b)C + R,\ 0 \leqslant R < a - b$$

și:

$$nb = (a-b)\,C_1 + R_1,\ 0 \leqslant R_1 < a - b.$$

Prin scădere obținem:

$$n(a-b) = (a-b)\,(C - C_1) + R - R_1$$

și, prin urmare, $R - R_1$ trebuie să se dividă prin $a-b$. Pe de altă parte, este clar că:

$$|R - R_1| < a - b.$$

Astfel, deducem că $R = R_1$; atunci $C_1 = C - n$.

**II.64°.** (SHAPIRO). O secvență de $m$ numere întregi pozitive conține exact $n$ numere distincte. Dacă $m \geqslant 2^n$ atunci există un bloc de termeni consecutivi a căror produs este un pătrat.

**R.** Fie:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

$n$ numere distincte, întregi și pozitive și $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ o secvență în care $b_i \in \{a_1, \ldots, a_n\}$ pentru $1 \leqslant i \leqslant m$ și $m \geqslant 2^n$. Pentru $1 \leqslant j \leqslant m$ să considerăm sistemul $K_j = (k_1, \ldots, k_n)$ definit astfel: $k_i = 0$ dacă $a_i$ se află de un număr par de ori în subsecvența $(b_1, \ldots, b_j)$, $k_i = 1$ dacă $a_i$ se află de un număr impar de ori în subsecvența $(b_1, \ldots, b_j)$. Dacă există $j \in \{1, \ldots, m\}$ astfel încît $K_j = (0, 0, \ldots, 0)$ atunci fiecare din numerele $a_1, \ldots, a_n$ apare de un număr par de ori în subsecvența $(b_1, \ldots, b_j)$ și deci produsul $b_1 b_2 \ldots b_j$ este un pătrat.

Să presupunem că are loc $K_j \neq (0, 0, \ldots, 0)$, pentru orice $j$. Deoarece numărul sistemelor $K_j$ este $2^n$, ipoteza $m \geqslant 2^n$ implică existența a două numere $j$, $l$, cu $1 \leqslant j < l \leqslant m$ astfel încît $K_j = K_l$. Atunci în secvența $b_{j+1}, \ldots, b_l$, fiecare din numerele $a_1, \ldots, a_n$ apare de un număr par de ori; în consecință, produsul $b_{j+1} b_{j+2} \ldots b_l$ este pătrat.

Pentru a constata că afirmația nu se menține pentru $m < 2^n$, să notăm prin $p_n$ al $n$-lea număr prim și să construim secvența $S_n$ construită recursiv astfel:

$$S_1 = (p_1),\ S_2 = (S_1, p_2, p_1),\ \ldots,\ S_n = (S_{n-1}, p_n, S_{n-1}).$$

Secvența $S_n$ are $2^{n-1}$ termeni și nu conține nici un bloc de termeni consecutivi al căror produs să fie un pătrat.

**II.65°.** Să se arate că dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$ atunci numărul:

$$\frac{[(mn)!]^2}{(m!)^{n+1}(n!)^{m+1}}$$

este natural.

**R.** Avem:

$$\frac{(mn)!}{(m!)^n} = \frac{(mn)!}{m!(mn-n)!} \cdot \frac{(mn-n)!}{(mn-2m)!m!} \cdots \frac{(2m)!}{m!n!} = C_{mn}^{m} C_{(n-1)m}^{m} \cdots C_{2m}^{m}.$$

Dar $C_{mp}^{m} = p C_{mp-1}^{m-1}$, prin urmare:

$$\frac{(mn)!}{(m!)^n} = n! C_{m-1}^{m-1} \ldots C_{mn-1}^{m-1}$$

de unde rezultă că $\dfrac{(mn)!}{(m!)^{n+1}}$ este număr natural. Schimbînd pe $m$ și $n$ între ele rezultă, de asemenea, că $\dfrac{(mn)!}{(n!)^{m+1}}$ este natural, deci și numărul $\dfrac{[(mn)!]^2}{(m!)^{n+1}(n!)^{m+1}}$, obținut prin înmulțirea celor două numere, este natural.

**II.66°.** Fie $p$ și $q$ numere întregi nenegative. Să se găsească mulțimea $V$ a numerelor naturale care nu se pot scrie sub forma $3p + 7q$, $p$, $q \in \mathbb{N}$. Să se găsească mulțimea $W$ a numerelor naturale care nu se pot scrie sub forma $6p + 14q$, $p, q \in \mathbb{N}^*$.

**R.** Avem, evident, $3p + 7q = 3(p + 2q) + q$. Luînd $q = 1$, deducem că orice număr natural mai mare sau egal ca 7 și care dă rest 1 prin împărțirea la 3 se poate scrie sub forma $3p + 7q$, cu $p$ și $q$ naturale nenule. Luînd $q = 2$, deducem că orice număr natural mai mare sau egal cu 12 care dă rest 2 prin împărțire la 3 se poate scrie sub forma $3p + 7q$, cu $p$ și $q$ naturale nenule. Evident, orice multiplu de 3 nu se află în $V$. Deducem că $V = \{1, 2, 4, 5, 8, 11\}$.

Pe de altă parte, orice număr de forma $6p + 14q$, cu $p$ și $q$ întregi este, evident, par, deci $W$ conține mulțimea numerelor naturale impare, $1, 3, 5, \ldots$ și nu conține multiplii lui 6. Apoi $6p + 14q = 6(p + 2q) + 2q$. Luînd $q = 1$, deducem că orice număr natural care prin împărțire la 6, dă rest 2 și care este mai mare decît 14 se scrie sub forma $6p + 14q$, cu $p$, $q$ convenabili. Pentru $q = 2$, deducem că orice număr natural care prin împărțire la 6 dă rest 4 și este mai mare decît 28 se scrie sub forma $6p + 14q$. Deoarece numerele naturale pare nu pot avea decît resturile 0, 2, 4 prin împărțire la 6, deducem că singurele numere naturale pare care fac parte din $W$ sînt 2, 4, 8, 10, 16, 22. Așadar:

$$W = \{2n + 1\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{2, 4, 8, 10, 16, 22\}.$$

Astfel, numărul natural par $2n$ se află în $W$ dacă și numai dacă $n$ se află în $V$. În adevăr, dacă $n$ nu se află în $V$ înseamnă că $n = 3p + 7q$ pentru $p$ și $q$ convenabili; atunci $2n = 6p + 14q$ și deci $2n$ nu se află în $W$. Dacă $2n$ nu se află în $W$, atunci $2n = 6p + 14q$ pentru $p$ și $q$ convenabili, deci $n = 3p + 7q$ și nu se află în $V$. Astfel, singurele numere pare care se află în $W$ sînt 2, 4, 8, 10, 16, 22.

**II.67°.** Să se dea exemplu de o funcție $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, surjectivă, dar nu injectivă.

**R.** Dăm un astfel de exemplu:

$$f(n) = a_h, \text{ dacă } n = p_{i_1}^{a_1} p_{i_2}^{a_2} \ldots p_{i_h}^{a_h},\ a_h \neq 0$$

și $f(1) = 1$. Este clar că $f$ este surjectivă deoarece pentru fiecare $h \in \mathbb{N}^*$ există $n_{p,h} = p^h$ astfel ca $f(n_{p,h}) = h$, unde $p$ este un număr prim oarecare, și nu este injectivă căci, de exemplu, $f(4) = f(9) = 2$. Aici, $p_i$ reprezintă al $i$-lea număr prim.

Un alt exemplu este funcția $f_1$ dată de:

$$f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*, f_1(x) = \left[\frac{x-1}{2}\right]_* + 1.$$

**II.68°.** Să se arate că dacă numărul de $n$ cifre $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n}$ este divizibil cu $10^n - 1$, atunci și numerele $\overline{a_2a_3\ldots a_na_1}$, $\overline{a_3\ldots a_na_1a_2}$, $\ldots$, $\overline{a_{n-1}a_na_1a_2\ldots a_{n-2}}$, $\overline{a_na_1\ldots a_{n-1}}$ sînt divizibile cu $10^n - 1$.

**R.** Fie:

$$M = \overline{a_1a_2\ldots a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + a_3 \cdot 10^{n-3} + \ldots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n = \mathcal{M}(10^n - 1);$$

$$M_1 = \overline{a_2a_3\ldots a_na_1} = a_2 \cdot 10^{n-1} + a_3 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot 10^2 + a_n \cdot 10 + a_1 = 10(a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n) + a_1 = 10(M - a_1 \cdot 10^{n-1}) + a_1 = 10M - a_1(10^n - 1).$$

Cum $M = \mathcal{M}(10^n - 1)$, rezultă că $M_1' = \mathcal{M}(10^n - 1)$. Numerele $a_3 \dots a_n a_1 a_2, \dots$ se deduc respectiv din precedentul în mod analog deci fiecare dintre ele se divide cu $10^n - 1$.

**II.69°.** Dintre numerele $1, 2, 3, \dots, 200$ se aleg la întîmplare 101 numere. Să se demonstreze că printre numerele alese se poate găsi o pereche astfel ca unul să fie divizor al celuilalt.

**R.** *Soluția I.* În primele 200 de numere naturale nenule sînt 100 pare, iar 100 sînt impare. Fie $a_1, a_2, \dots, a_{101}$, numerele alese.

Avem $a_1 = 2^{b_1}h_1$, $a_2 = 2^{b_2}h_2, \dots, a_{101} = 2^{b_{101}}h_{101}$, unde $h_1, \dots, h_{101}$ sînt impare și $b_1, b_2, \dots, b_{101}$ sînt naturale. Cum $h_i < 200$, $(\forall)\ i \in \overline{1, 101}$, și cum au fost ales 101 numere impare, rezultă că există o pereche $(i, j)$ astfel încît $h_i = h_j$. Dacă $b_i > b_j$ rezultă $a_j \mid a_i$, iar dacă $b_j > b_i$ rezultă $a_i \mid a_j$.

Evident, problema admite următoarea generalizare: Din numerele $1, 2, 3, \dots, 2n$ oricum am alege $n + 1$, există două cu proprietatea că unul îl divide pe celălalt. Demonstrația este analogă.

*Soluția a II-a.* Generalizarea enunțată mai sus poate fi demonstrată prin inducție. Pentru $n \in \{1, 2, 3\}$ afirmația este evidentă. Presupunem enunțul adevărat pentru $n$ și să considerăm șirul:

$$1, 2, 3, \dots, 2n, 2n + 1, 2n + 2.$$

Dacă cele $n + 2$ numere alese $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$ sînt alese dintre numerele $1, 2, \dots, 2n$, se aplică ipoteza inducție. În caz contrar, putem considera fie că numerele $a_1, \dots, a_{n+1}$ sînt alese din numerele $1, 2, \dots, 2n$ iar $a_{n+2}$ este sau $2n+1$ sau $2n+2$, în care caz se aplică din nou ipoteza inducției, sau $a_{n+1} = 2n+1$, $a_{n+2} = 2n+2 = 2(n+1)$. În acest din urmă caz distingem două posibilități:

a). Dacă $n + 1 \in \{a_1, a_2, \dots, a_{n+2}\}$, cum $n + 1 \mid a_{n+2}$, rezultă afirmația.

b). Dacă $n + 1 \notin \{a_1, a_2, \dots, a_{n+2}\}$, formăm șirul $a_1, a_2, \dots, a_n, n + 1$, cu numere alese dintre numerele $1, 2, \dots, 2n$. În baza ipotezei de inducție, sau există $a_k, a_l$, $k \neq l$, $k, l \in \overline{1, n}$, așa ca $a_k \mid a_l$ și demonstrația este încheiată, sau $a_k \mid n + 1$ și deci $a_k \mid a_{n+2} = 2(n + 1)$ și demonstrația este, de asemenea, încheiată.

**II.70°.** Fie $n$ numere întregi cu proprietatea că suma oricăror două dintre ele este multiplu de $n$ ($n \geqslant 3$, impar). Să se arate că fiecare dintre ele este multiplu de $n$.

**R.** Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$, $n$ impar, $n$ numere întregi astfel ca suma a oricare două numere este multiplu de $n$. Să presupunem că $a_{i_0}$, $i_0 \in \overline{1, n}$ nu este multiplu de $n$. Atunci $a_{i_0} \neq 0$. Prin ipoteză, pentru orice $i, j \in \overline{1, n}$ avem:

$$a_{i_0} + a_i = k_i n,$$

$$a_{i_0} + a_j = k_j n,$$

$$a_i + a_j = k_{ij} n,$$

unde $k_i, k_j, k_{ij} \in \mathbb{Z}$. Rezultă:

$$2a_0 = n(k_i + k_j - k_{ij})$$

de unde rezultă că $n$ este par, absurd.

**II.71°.** Să se găsească toate numerele întregi pozitive $n$ așa încît $n+1$ să dividă pe $n^2+1$.

**R.** Există doar două astfel de numere: $n=0$ și $n=1$. În adevăr, $n^2+1=n(n+1)-(n-1)$ și cum $n+1 \mid n^2+1$, rezultă $n+1 \mid n-1$. Deoarece $n-1=n+1-2$, rezultă $n+1 \mid 2$ adică sau $n+1=1$ deci $n=0$, sau $n+1=2$, deci $n=1$.

**II.72°.** Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze numărul $\varphi(n)$ de numere naturale mai mici decît $n$ și relativ prime cu $n$.

**R.** Vom nota numărul căutat cu $\varphi(n)$ și vom numi, de aici încolo, pe $\varphi: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ astfel definită, funcția lui EULER, iar $\varphi(n)$, *indicatorul* lui $n$.

Vom arăta că dacă $m = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \dots p_{i_k}^{\alpha_k}$ este descompunerea canonică a lui $n$ în factori primi, cu $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $p_t$ reprezentînd al $t$-lea număr prim, atunci:

$$\varphi(m) = m\left(1-\frac{1}{p_{i_1}}\right)\left(1-\frac{1}{p_{i_2}}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_{i_k}}\right).$$

19/22/9

Vom da acestei probleme mai multe soluții.

*Soluția I.* Pentru început vom demonstra următoarea formulă:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_q| = \sum_{i=1}^{q} |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i \neq k \neq j} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \\ - \dots + (-1)^{q-1} \left|\bigcap_{i=1}^{q} A_i\right|$$

unde $A_1, \dots, A_q$ sînt mulțimi finite, iar $|X|$ desemnează, aici, numărul de elemente ale mulțimii $X$ (cardinalul lui $X$). Formula anterioară, împreună cu duala sa:

$$|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_q| = \sum_{i=1}^{q} |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cup A_j| + \sum_{i \neq j \neq k} |A_i \cup A_j \cup A_k| - \\ - \dots + (-1)^{q-1} \left|\bigcup_{i=1}^{q} A_i\right|$$

poartă numele de *principiul includerii și al excluderii*.

Ne vom opri numai asupra primei formule. Pentru $q=2$, ea devine:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

care este evidentă, deoarece în suma $|A_1| + |A_2|$, elementele comune lui $A_1$ și lui $A_2$ (deci ale mulțimii $A_1 \cap A_2$) sînt numărate de două ori, iar în $|A_1 \cup A_2|$ o singură dată.

În continuare raționăm prin inducție matematică. Presupunem formula adevărată pentru $q-1$ mulțimi. Avem, în această ipoteză, folosind proprietățile mulțimilor:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{q-1} \cup A_q| = |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{q-1}| + |A_q| - \\ - |(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{q-1}) \cap A_q| = |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{q-1}| + |A_q| - \\ - |(A_1 \cap A_q) \cup (A_2 \cap A_q) \cup \dots \cup (A_{q-1} \cap A_q)|.$$



08 Oct. 1994.
Popa Cristina cls. 9.

Prin dezvoltarea ultimului termen, obţinem tocmai termenii care conţin pe $A_q$ în sumele $\sum_{i=1}^{q-1} |A_i \cap A_q|$, $\sum_{i<j<q} |A_i \cap A_j \cap A_q|, \ldots$, care, adăugaţi la sumele $\sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j|$, $\sum_{i<j<k<q} |A_i \cap A_j \cap A_k|, \ldots$ dau tocmai formula pentru $q$ mulţimi, conform egalităţii de mai sus.

Revenim la problema pusă. Să notăm cu $A_i$ mulţimea numerelor naturale mai mici sau egale cu $n$ care sînt multipli de $p_i$. Obţinem:

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}, \quad |A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, \quad \ldots$$

Pentru a obţine numărul numerelor naturale mai mici sau egale cu $n$ şi care sînt relativ prime cu $n$, trebuie să scădem din numărul numerelor naturale mai mici sau egale cu $n$, numărul numerelor naturale mai mici sau egale cu $n$ care nu sînt prime cu $n$, adică cele care aparţin mulţimii:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_q.$$

Repetăm, $n = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \ldots p_{i_q}^{\alpha_q}$. Deci:

$$\varphi(n) = n - \sum_{i=1}^{q} |A_i| + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant q} |A_i \cap A_j| - \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant q} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots =$$

$$= n - \sum_{t=1}^{q} \frac{n}{p_{i_t}} + \sum_{1\leqslant t<v\leqslant q} \frac{n}{p_{i_t} p_{i_v}} - \sum_{1\leqslant t<v<l\leqslant q} \frac{n}{p_{i_t} p_{i_v} p_{i_l}} + \cdots =$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{p_{i_1}}\right)\left(1 - \frac{1}{p_{i_2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_{i_q}}\right).$$

*Soluţia II.* Să dăm o altă soluţie problemei. Să arătăm că funcţia este multiplicativă, adică dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n)_* = 1$, atunci:

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

Considerăm pentru aceasta mulţimea valorilor numerice ale expresiei:

$$mx + y.$$

unde $x$ ia valorile $0, 1, 2, \ldots, n-1$, şi $y$ ia valorile $0, 1, 2, \ldots, m-1$. Există în total $mn$ astfel de valori numerice căci din:

$$x \leqslant n-1, \ y \leqslant m-1$$

rezultă:

$$mx + y \leqslant m(n-1) + m - 1 = mn - 1.$$

Dintre acestea, sînt prime cu $mn$ acelea care sînt prime şi cu $m$ şi cu $n$ şi reciproc, adică $(mx + y, mn)_* = 1$, dacă şi numai dacă $(mx + y, m)_* = 1$ şi $(mx + y, n)_* = 1$.

În adevăr, dacă $(mx + y, mn)_* = 1$, este necesar ca $(mx + y, m)_* = 1$ şi $(mx + y, n)_* = 1$, căci dacă, de exemplu, $(mx + y, m)_* = k \neq 1$, atunci din $k|mx+y$ şi $k|m$ ar rezula $k|mx+y$ şi $k|mn$ şi deci $(mx + y, mn)_* \neq 1$, contrar ipotezei.

Reciproc, dacă $(mx+y, n)_* = 1$ şi $(mx+y, m)_* = 1$, atunci $(mx + y, mn)_* = 1$, căci din $(mx+y, mn)_* \neq 1$ ar rezulta că există un număr prim $p$ aşa încît $p|mx+y$ şi $p\ |mn$ iar din $p|mn$ ar decurge sau $p|m$ sau $p|n$, în baza definiţiei lui $p$, şi atunci sau $(mx+y, m)_* \neq 1$, sau $(mx + y, n)_* \neq 1$, contrar ipotezei.

Numerele $mx+y$ sînt prime cu $m$ dacă şi numai dacă numerele $y$ sînt prime cu $m$. În adevăr, dacă $(y, m)_* = k > 1$ atunci $k|m$, $k|y$ deci $k|mx+y$ deci $(mx+y, m)_* \geqslant k \neq 1$, contrar ipotezei. Reciproc, dacă $(y, m)_* = 1$, întrucît $(mx+y, m)_* = (x, m)_*$, rezultă că $(mx+y, m)_* = 1$.

Conchidem, aşadar, că numărul numerelor din valorile numerice ale expresiei $mx+y$, prime cu $m$, este egal cu numărul numerelor din şirul $0, 1, 2, \ldots, m-1$, prime cu $m$, adică $\varphi(m)$.

Fie acum $y_1$ un asemenea număr, $(y_1, m)_* = 1$, şi să considerăm şirul:

$$y_1,\ m+y_1, 2m+y_1, \ldots, (n-1)m+y_1.$$

Termenii acestui şir sînt numere prime cu $m$ şi împărţiţi la $n$ dau resturi diferite între ele. Fie:

$$hm + y_1 = nq_h + r_h;\quad 0 \leqslant r_h < n,\ 0 \leqslant h < n,$$

$$km + y_1 = nq_k + r_k;\quad 0 \leqslant r_k < n, 0 \leqslant k < n.$$

Dacă $h \neq k$, nu este posibil ca $r_k = r_h$, căci atunci:

$$hm - nq_h = km - nq_k$$

deci:

$$(k-h)m = n(q_k - q_h)$$

şi cum $(m, n)_* = 1$, ar rezulta $n|(k-h)$, ceea ce nu este posibil deoarece $0 \leqslant h < n$ şi $0 \leqslant k < n$ şi deci $|k-h| < n$.

Numerele $hm + y_1 = nq_h + r_h$ sînt prime cu $n$ dacă şi numai dacă numerele $r_h$ sînt prime cu $n$, dar şirul resturilor este $0, 1, \ldots, n-1$, luat eventual în altă ordine, deci există $\varphi(n)$ numete prime cu $n$. Cum există $\varphi(m)$ asemenea valori pentru $y$, avem în total $\varphi(m)\varphi(n)$ numere prime cu $mn$ şi deci, dacă $(m, n)_* = 1$, atunci:

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

Fie acum $n = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \ldots p_{i_q}^{\alpha_q}$, descompunerea canonică a numărului $n \in \mathbb{N}^*$ în factori primi (excludem cazul banal $n = 1$), cu $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $(\forall)$ $i \in \overline{1, q}$, $p_t$ reprezentînd al $t$-lea număr prim. Potrivit formulei demonstrate anterior:

$$\varphi(n) = \varphi(p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \ldots p_{i_q}^{\alpha_q}) = \varphi(p_{i_1}^{\alpha_1})\, \varphi(p_{i_2}^{\alpha_2}) \ldots \varphi(p_{i_q}^{\alpha_q}).$$

Dar:

$$\varphi(p_{i_j}^{\alpha_j}) = p_{i_j}^{\alpha_j} - p_{i_j}^{\alpha_j - 1}$$

intrucît numai numerele de forma $tp_{i_j}$, cu $1 \leqslant t < p_{i_j}^{\alpha_j - 1}$ nu sînt prime cu $p_{i_j}^{\alpha_j}$ dintre numerele $1, 2, \ldots, p_{i_j}$. Ca atare:

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_{i_1}}\right)\left(1 - \frac{1}{p_{i_2}}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_{i_q}}\right).$$

**II.73°.** (EULER). Fie $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $(a, n)_* = 1$, atunci:

$$a^{\varphi(n)} - 1 \vdots n$$

$\varphi$ fiind funcția lui EULER, definită în exercițiul precedent.

**R.** Vom da acestei probleme două soluții. Numerele întregi:

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

formează, prin definiție, un *sistem complet* de resturi modulo $m$ dacă oricare două dintre ele sînt necongruente modulo $m$, adică, altfel spus, diferența oricăror două dintre ele nu se divide la $m$ (prin convenție, în loc de $a - b \vdots n$ vom scrie $a \equiv b \pmod n$ și vom citi „$a$ și $b$ sînt congrunete modulo $n$"). Vom spune, încă, despre numerele:

$$a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(m)}$$

că formează un *sistem redus* de resturi modulo $m$ dacă ele formează un șir de resturi modulo $m$ și fiecare este prim cu modulul $m$.

Au loc, în acest caz, următoarele propoziții:

1°). Dacă:

$$a_1, a_2, \ldots, a_m,$$

$$b_1, b_2, \ldots, b_m$$

sînt două sisteme complete de resturi modulo $m$, fiecare număr din primul sistem este congruent cu unul și numai unul din numerele celui de-al doilea sistem;

2°). Dacă:

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

este un sistem complet de resturi modulo $m$ și $a$ este un întreg prim cu modulul $m$, atunci șirul:

$$aa_1, aa_2, \ldots, aa_m$$

este tot un sistem de resturi modulo $m$.

3°). Dacă:

$$a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(m)}$$

este un sistem redus de resturi modulo $m$ și $a$ este un număr întreg prim cu modulul $m$, atunci șirul:

$$aa_1, \ldots, aa_{\varphi(m)}$$

este tot un sistem de resturi modulo $m$.

Să demonstrăm aceste propoziții.

1°). Prin împărțirea la $m$, numerele $a_1, \ldots, a_m$ dau $m$ resturi pozitive $0, 1, \ldots, m-1$, toate diferite între ele. Analog, numerele $b_1, \ldots, b_m$ dau $m$ resturi pozitive diferite între ele, $0, 1, \ldots, m-1$. Rezultă că pentru orice numră $a_k$ din sistemul:

$$a_1, \ldots, a_m$$

care prin împărțirea la $m$ dă restul $r_k$, există un număr $b_k$ și numai unul din sistemul:

$$b_1, \ldots, b_m$$

care prin împărțire la $m$ dă restul $r_k$, adică $a_k \equiv b_k \pmod{m}$.

2°). În adevăr, oricare două elemente ale sistemului sînt necongruente modulo $m$, căci dacă am avea:

$$aa_i \equiv aa_j \pmod{m},$$

deoarece $(a, m)_* = 1$, ar rezulta $a_i \equiv a_j \pmod{m}$, contrar ipotezei.

3°). Analog ca în demonstrația precedentă, oricare două elemente ale sistemului:

$$aa_1, \ldots, aa_{\varphi(m)}$$

sînt necongruente modulo $m$. Deoarece $(a, m)_* = 1$ și $(a_i, m)_* = 1$, $(\forall)$ $i \in \{1, 2, \ldots, \varphi(m)\}$. rezultă $(aa_i, m)_* = 1$. Rezultă deci că șirul anterior fomrează un sistem redus de resturi modulo $m$.

Fie acum $a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(m)}$ un sistem redus de resturi modulo $m$. Potrivit afirmației 1°):

$$aa_1 \equiv a_{i_1} \pmod{m}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$aa_{\varphi(m)} \equiv a_{i_{\varphi(m)}} \pmod{m}$$

unde $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_{\varphi(m)}})$ este o permutare a sistemului $(a_1, \ldots, a_{\varphi(m)})$ Înmulțind aceste congruențe (din $a \equiv b \pmod{m}$ și $c \equiv d \pmod{m}$ rezultă existența numerelor întregi $k$ și $l$ astfel ca $a = b + km$, $c = d + lm$, de unde, înmulțind aceste egalități, $ac = bd + mt$, cu $t \in \mathbb{Z}$, deci $ac \equiv bd \pmod{m}$), obținem:

$$a^{\varphi(m)} a_1 a_2 \ldots a_{\varphi(m)} \equiv a_1 a_2 \ldots a_{\varphi(m)} \pmod{m}$$

și cum:

$$(a_i, m)_* = 1, \ (\forall) i \in \{1, 2, \ldots, \varphi(m)\}$$

rezultă:

$$(a_1 a_2 \ldots a_{\varphi(m)}, m)_* = 1$$

de unde, prin simplificare:

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

și teorema este demonstrată.

În particular, dacă $m$ este prim, atunci $\varphi(m) = m - 1$ și regăsim teorema lui Fermat.

Să prezentăm și o *a doua soluție:* fie $(a, p)_* = 1$, $a$ fiind întreg, iar $p$ un număr prim. Conform teoremei lui Fermat:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

deci există $m \in \mathbb{N}$ aşa ca $a^{p-1} = mp + 1$. De aici, ridicînd la puterea $p$:

$$a^{p(p-1)} = (mp + 1)^p = (mp)^p + C_p^1(mp)^{p-1} + \ldots + C_p^{p-2}(mp)^2 +$$
$$+ C_p^{p-1}mp + 1 = \mathcal{M}p^2 + 1$$

deci:

$$a^{p(p-1)} \vdots p^2.$$

Analog:

$$a^{p^2(p-1)} = \mathcal{M}p^3 + 1, \ldots, a^{p^{\alpha-1}(p-1)} = \mathcal{M}p^\alpha + 1$$

deci, altfel scris:

$$a^{\varphi(p^\alpha)} \equiv 1 \pmod{p^\alpha}, \ (\forall)\alpha \in \mathbb{N}^*.$$

Fie acum $m = p_{i_1}^{\alpha_1}p_{i_2}^{\alpha_2} \ldots p_{i_k}^{\alpha_k}$ descompunerea canonică a numărului $n$. Din:

$$a^{\varphi(p_i^{\alpha_i})} \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}, \ (\forall) \ i \in \overline{1, k}$$

rezultă:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}, \ (\forall) \ i \in \overline{1, k}$$

deci:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

de unde teorema lui EULER.

Să dăm acum cîteva aplicaţii.

a°). Fie $a \in \mathbb{Z}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $(a, n)_* = 1$, atunci:

$$n \mid a^{(n-1)!} - 1.$$

Pentru a dovedi afirmaţia de mai sus, să arătăm în prealabil că dacă $p|m$, cu $m, p \in \mathbb{N}^*$, atunci:

$$(a^p - 1)|(a^m - 1).$$

În adevăr, există $q \in \mathbb{N}^*$ aşa ca $m = pq$, deci:

$$a^m - 1 = a^{pq} - 1 = (a^p)^q - 1 \vdots (a^p - 1)$$

dacă $q$ este impar, sau:

$$a^m - 1 = (a^p)^q - 1 = [(a^p)^{\frac{q}{2}} - 1][(a^p)^{\frac{q}{2}} + 1]$$

dacă $q$ este par. Notînd $q = 2q_1$, $q_1 \in \mathbb{N}^*$ şi $q_1$ impar, ne oprim cu descompunerea în factori, dacă nu, continuăm raţionamentul pînă cînd obţinem un factor $a^{pt} - 1$, cu $t$ impar (în particular egal cu 1), lucru evident posibil. De aici, deoarece $1 \leqslant \varphi(n) \leqslant n - 1$, deducem $\varphi(n)|(n-1)!$ şi deci:

$$a^{\varphi(n)} - 1 | a^{(n-1)!} - 1.$$

Cum $n|a^{\varphi(n)} - 1$, rezultă afirmaţia.

b°). Să se arate că pentru orice număr natural $a$, nu există $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ aşa încît :

$$n \mid (a+1)^n - a^n.$$

În adevăr, fie $A = (a+1)^n - a^n$. Dacă $(n, a)_* = \delta > 1$, cum $(a, a+1)_* = 1$, rezultă $\delta \nmid a+1$, deci $n \nmid A$. Analog, dacă $(n, a+1)_* > 1$, atunci $n \nmid A$. Fie atunci $n$ astfel ca $(n, a)_* = 1$ şi $(n, a+1)_* = 1$. Din teorema lui EULER avem :

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n; (a+1)^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$$

de unde :

$$(a+1)^{\varphi(n)} - a^{\varphi(n)} \equiv 0 \pmod n$$

sau :

$$n \mid (a+1)^{\varphi(n)} - a^{\varphi(n)}.$$

Presupunem că ar exista $n > 1$ astfel ca $n \mid A$ şi fie $n$ cel mai mic dintre ei. Cel mai mare divizor comun al numerelor $(a+1)^k - a^k$ şi $(a+1)^s - a^s$ este $(a+1)^d - a^d$ unde $d = (k, s)_*$. Pentru $k = n$ şi $s = \varphi(n)$, $d = (n, \varphi(n))_*$ şi urmează că $n \mid (a+1)^d - a^d$. Deoarece $n > 1$, avem $(a+1)^d - a^d > 1$ şi deci $d > 1$ şi $1 < d \leqslant \varphi(n) < n$ şi $d \mid n \mid A$, contrar definiţiei lui $n$, că este cel mai mic număr cu proprietatea $n \mid A$.

**II.74°.** Să se arate că orice număr natural admite un multiplu care se poate scrie numai cu cifrele 0 şi 1.

**R.** *Soluţia I.* Vom arăta, în plus, ca o concluzie a soluţiei, că pentru orice $s \in \mathbb{N}^*$ există un număr natural $n$ care are suma cifrelor egală cu $s$, şi care se divide cu $s$ (şi se poate scrie numai cu cifrele 0 şi 1). Fie, în acest sens, $s = 2^\alpha 5^\beta t$ cu $(t, 10)_* = 1$. Numărul :

$$n = 10^{\alpha+\beta}(10^{\varphi(t)} + 10^{2\varphi(t)} + \ldots + 10^{s\varphi(t)})$$

satisface condiţiile problemei. În adevăr, numărul $10^{\alpha+\beta}$ se divide cu $2^\alpha 5^\beta$ şi :

$$10^{\varphi(t)} \equiv 1 \pmod t$$

(conform teoremei lui EULER), deci :

$$10^{k\varphi(t)} \equiv 1 \pmod t, \ (\forall) \ k \in \overline{1, s},$$

adică :

$$10^{\varphi(t)} + 10^{2\varphi(t)} + \ldots + 10^{s\varphi(t)} = \mathcal{M}t + s = \mathcal{M}t + 2^\alpha 5^\beta t \vdots t$$

deci $n \mid s$.

Suma cifrelor lui $n$ este, evident, $s$, şi, observăm, $n$ se scrie numai cu ajutorul cifrelor 0 şi 1.

*Soluţia a II-a.* Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Presupunem că $(n, 10)_* = 1$. Conform teoremei lui EULER :

$$10^{\varphi(9n)} - 1 \equiv 0 \pmod{9n},$$

căci, încă, $(9n, 10)_* = 1$. De aici, cum :

$$10^{\varphi(9n)} - 1 = 9 \cdot \underbrace{\overline{11\ldots11}}_{\varphi(9n) \text{ de } 1}$$

rezultă:

$$\underbrace{\overline{11\ldots11}}_{\varphi(9n)\text{ de }1} \vdots\, n.$$

Fie acum $n = 2^{\alpha}5^{\beta}t$, $(t, 10)_{*} = 1$. Atunci, evident, numărul:

$$10^{\alpha+\beta}\,(10^{\varphi(9t)} - 1)$$

este un multiplu de $n$ şi are numai cifre de 0 şi 1.

*Soluţia a III-a.* Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Evident, numărul $\dfrac{1}{9n}$ este periodic; fie $P$ perioada sa. Atunci:

$$\frac{1}{9n} = \frac{P}{\overline{9\ldots90\ldots0}}$$

unde, la numitor, numărul cifrelor de 9 este dat de numărul cifrelor lui $P$, iar zerourile sînt în număr egal cu numărul cifrelor aflate după virgulă şi care nu aparţin perioadei (în particular, dacă $n$ este prim cu zece, astfel de cifre nu vor exista). De aici:

$$9nP = \overline{9\ldots90\ldots0}$$

de unde:

$$nP = \overline{1\ldots10\ldots0}.$$

O problemă interesantă, dar dificilă, constă în a determina cel mai mic multiplu al lui $n$ cu proprietatea din enunţ. Nu întotdeauna cel mai mic multiplu al lui $n$ care se scrie numai cu ajutorul cifrelor 0 şi 1 este de forma $\overline{1\ldots10\ldots0}$, după cum rezultă din următorul exemplu: dacă $n = 7$, cel mai mic astfel de multiplu este 1001.

**II.75°.** Fie $c$ un număr raţional strict pozitiv şi diferit de 1. Să se arate că există o partiţie a mulţimii numerelor naturale nenule în două submulţimi $A_1$ şi $A_2$ aşa ca mulţimea $K = K_1 \cup K_2$ să nu conţină pe $c$, unde:

$$K_i = \left\{\frac{x}{y} \,\middle|\, x \neq y,\ x, y \in A_i,\ i = \{1, 2\}\right\}.$$

**R.** Problema, în modul în care este pusă, admite următorul enunţ echivalent: există o partiţie $P = \{A_1, A_2\}$ a mulţimii numerelor naturale nenule formată din mulţimi disjuncte şi nevide astfel încît şi în mulţimea $A_1$, şi în mulţimea $A_2$ să nu existe $x$, $y$ astfel ca:

$$y = cx.$$

Putem presupune $c > 1$, în caz contrar notăm $c_1 = \dfrac{1}{c} > 1$ şi schimbăm rolul variabilelor $x$ şi $y$.

Fie $x \in \mathbb{N}^*$ arbitrar. Există atunci $k \in \mathbb{N}$, unic determinat pentru acest $x$, aşa încît:

$$c^k \leqslant x < c^{k+1}, \tag{1}$$

anume $k = [\log_c x]_*$ (excludem cazul lui $x = 1$ sau îl avem în vedere și pe acesta, considerînd $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \mathbb{N}^* - \{1\}$, cînd $c \in \mathbb{N}^*$, sau o partiție oarecare cînd $c \notin \mathbb{N}^*$). În adevăr, logaritmînd în relația anterioară, găsim :

$$k \leqslant \log_c x < k + 1 \tag{2}$$

de unde egalitatea. Pentru $k \in \mathbb{N}$, există, evident, unul sau mai multe numere $x \in \mathbb{N}^*$ satisfăcînd relația (1). În plus, avînd în vedere că (2) a condus la egalitatea $k = [\log_c x]_*$, pentru fiecare $x \in \mathbb{N}$ există $k \in \mathbb{N}$ așa încît să avem (1), fapt, de altfel, evident.

În mulțimea $A_1$ punem toți acei $x \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că, în relația (1), $k$ este par (și numai aceste numere), iar în $A_2$ celelalte numere naturale. Din (1) deducem :

$$c^{k+1} \leqslant cx < c^{k+2}$$

de unde se vede că $x$ și $cx$ nu pot aparține aceleiași mulțimi căci $k$ și $k + 1$ sînt de parități opuse.

**II.76°.** Să se rezolve și să se discute ecuația :

$$[ax + b]_* + cx = d,$$

știind că $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$, $[x]_*$ reprezentînd partea întreagă a lui $x$.

**R.** Fie $P \in \mathbb{Z}$ astfel încît $P = [ax + b]_*$. Deci :

$$P + cx = d.$$

Presupunînd $c \neq 0$ avem $x = \dfrac{d - P}{c}$ și, de aici :

$$P = \left[\frac{a}{c}(d - P) + b\right]_* .$$

Notînd $\dfrac{a}{c} = \alpha$ și ținînd seama de definiția funcției parte întreagă, obținem :

$$P \leqslant \alpha(d - P) + b < P + 1$$

sau :

$$-(\alpha d + b) \leqslant -P(1 + \alpha) < -(\alpha d + b) + 1$$

sau încă :

a°). Dacă $\alpha + 1 < 0$, atunci :

$$\frac{\alpha d + b}{\alpha + 1} \leqslant P < \frac{\alpha d + b}{\alpha + 1} - \frac{1}{\alpha + 1}.$$

b°). Dacă $\alpha + 1 > 0$, atunci :

$$\frac{\alpha d + b}{\alpha + 1} - \frac{1}{\alpha + 1} < P < \frac{\alpha d + b}{\alpha + 1}.$$

c°). Dacă $\alpha + 1 = 0$, vom arăta că ecuaţia poate avea o infinitate soluţii, nici o soluţie sau o singură soluţie (soluţia nulă).

S-a presupus $c \neq 0$. [Dacă $c = 0$ şi $d \in \mathbb{Z}$, atunci ecuaţia are o infinitate de soluţii. În adevăr, în acest caz avem:

$$d \leqslant ax + b < d + 1$$

care are întotdeauna soluţie (dacă, de exemplu, $a > 0$, atunci:

$$\frac{d - b}{a} \leqslant x < \frac{d + 1 - b}{a}$$

şi, implicit, o infinitate de soluţii)].

Dacă $d \notin \mathbb{Z}$, atunci ecuaţia (în ipoteza $c = 0$) nu are soluţie. Revenim, deci, la cazurile a°), b°), c°). Fie, în acest sens:

$$\frac{\alpha d + b}{\alpha + 1} = A, \quad \frac{1}{\alpha + 1} = \rho.$$

a°). (Cazul $\alpha + 1 < 0$). Presupunem $A - [A]_* \neq 0$ (adică $A$ nu este întreg). Deoarece $\varphi < 0$ şi $A - [A]_* > 0$ (a doua relaţie rezultă din definiţia funcţiei parte întreagă), există una şi numai una din situaţiile:

$$[A]_* < A < A - \rho < [A]_* + 1$$

sau:

$$[A]_* < A < [A]_* + 1 < A - \rho.$$

În primul caz se vede că nu putem avea soluţie deoarece $A \leqslant P \leqslant A - \rho$. În al doilea caz avem cel puţin o soluţie, şi anume pentru $P = [A]_* + 1$.

Dacă $[A]_* + n < A - \rho$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem cel puţin $n$ soluţii pentru $P$.

Presupunem $A - [A]_* = 0$ (deci $A$ este întreg). Atunci, sau $[A]_* = A < A - \rho < [A]_* + 1$ şi în acest caz avem o soluţie pentru $P$, anume $P = [A]_*$ sau $[A]_* = A < [A]_* + 1 < A - \rho$, caz în care avem cel puţin două soluţii pentru $P$, şi anume $P_1 = [A]_*$, respectiv $P_2 = [A]_* + 1$.

Dacă $[A]_* + n < A - \rho$, atunci avem cel puţin $n + 1$ soluţii pentru $P$.

b°) (Cazul $\alpha + 1 > 0$). Fie $A - [A]_* \neq 0$. Avem sau $[A]_* < A - \rho < A < [A]_* + 1$ sau $A - \rho = [A]_* < A < [A]_* + 1$, sau $A - \rho < [A]_* < A < [A]_* + 1$.

În prima şi a doua situaţie nu avem soluţii pentru că $A - \rho < P \leqslant A$. În a treia situaţie avem cel puţin o soluţie pentru $P$, şi anume $P = [A]_*$.

Dacă $A - \rho < [A]_* - n$, $n \in \mathbb{N}^*$, avem cel puţin $n + 1$ soluţii pentru $P$, şi anume:

$$P_0 = [A]_*, \ P_1 = [A]_* - 1, \ldots, P = [A]_* - n.$$

c°). (Cazul $\alpha + 1 = 0$). Notăm $x = n + r$, unde $n = [x]_*$, $r = \{x\}_*$. Fie cazul $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$. Presupunem că soluţia este $x = n + r > 0$. Înlocuind în ecuaţie, obţinem:

$$[n + r]_* - (n + r) = d,$$

de unde $d = -r$. Deci, dacă $-1 < d \leqslant 0$ (căci $0 \leqslant r < 1$), atunci ecuația are o infinitate de soluții pozitive; pentru $d \neq -r$, ecuația nu are nici o soluție. Dacă $d \notin (-1, 0)$, ecuația nu are soluții.

Să presupunem că $x = n + r < 0$. Atunci $[n + r]_* = n - 1$. Ecuația va avea o inifinitate de soluții negative pentru $r = -1 - d$, dacă $-1 < -1 - d \leqslant 0$ (sau $-1 \leqslant d < 0$) și nici o soluție negativă pentru $r \neq -(1 + d)$.

Dacă $d \in (-1, 0]$, ecuația nu are soluții.

Cazul general $a = k$, $c = -k$ se reduce la cel studiat, făcînd $z = kx$. Cazul $a = -k$, $c = k$, analog.

Sintetizînd, obținem:

*Cazul:* — *Numărul de soluții:*

A°). $\alpha + 1 < 0$

a°). $A - [A]_* \neq 0$

1°). $A - [A]_* < 1 + \rho$ . . . . . . nici o soluție;

2°) $A - [A]_* > 1 + \rho$ . . . . . . cel puțin o soluție;

2′). $A - [A]_* > n + \rho$ . . . . . . cel puțin o soluție.

b°) $A - [A]_* = 0$

1°). $0 < \rho + 1$ . . . . . . o soluție;

2°). $\rho + 1 < 0$ . . . . . . cel puțin două soluții;

2′). $\rho + n < 0$ . . . . . . cel puțin $n + 1$ soluții.

B°). $\alpha + 1 > 0$

1°). $A - [A]_* \geqslant \rho$ . . . . . . nici o soluție;

2°). $A - [A]_* < \rho$ . . . . . . cel puțin o soluție;

3°). $A - [A]_* = \rho - 1$ . . . . . . o soluție;

4°). $A - [A]_* < \rho - 1$ . . . . . . cel puțin două soluții;

5°). $A - [A]_* = \rho - n$ . . . . . . $n$ soluții;

6°). $A - [A]_* < \rho - n$ . . . . . . cel puțin $n$ soluții.

C°). $\alpha + 1 = 0$. . . . . . . sau nici o soluție, sau soluția nulă, sau o inifnitate de soluții.

**II.77°.** Să se arate că dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$ atunci:

$$\min\left(\sqrt[n+1]{m}, \sqrt[m+1]{n}\right) \leqslant \sqrt[5]{4}.$$

**R.** Presupunem, prin absurd, că:

$$\sqrt[n+1]{m} > \sqrt[5]{4}; \quad \sqrt[m+1]{n} > \sqrt[5]{4}.$$

Atunci, înmulțind aceste relații, scrise și astfel:

$$m^5 > 4^{n+1}, \ n^5 > 4^{m+1}$$

obținem:

$$(mn)^5 > 4^{m+n+2}.$$

Dar, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$:

$$k^5 \leqslant 4^{k+1},$$

negalitate care se demonstrează, de pildă, prin inducție (pentru $k = 1$ se verifică deoarece $1^5 = 1 < 4^2 = 16$, pentru $k = 2$ are loc $2^5 = 32 < 4^3 = 64$ și, din presupunerea că este adevărată pentru un $t$, oarecare, natural $(t > 2)$ :

$$t^5 \leqslant 4^{t+1},$$

rezultă :

$$4t^5 \leqslant 4^{t+2}$$

sau, folosind dezvoltarea binomului după NEWTON—$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$— — avem :

$$(t + 1)^5 = t^5 + 5t^4 + 10t^3 + 10t^2+5t + 1 \leqslant 4t^5$$

căci, pentru $t > 2$ are loc $5t^4 < 3t^5$, etc).

De aici :

$$4^{m+1}\, 4^{n+1} \geqslant m^5 n^5$$

absurd, deci :

$$\min\left(\sqrt[n+1]{m},\ \sqrt[m+1]{n}\right) \leqslant \sqrt[5]{4}.$$

**II.78°.** Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că într-un șir de $mn + 1$ întregi distincți notați :

$$u_1, u_2, \ldots, u_{mn+1}$$

există un subșir descrescător de lungime mai mare ca $m$, sau un subșir crescător de lungime mai mare ca $n$.

**R.** Un subșir este, după cum se știe, un șir format din elemente ale șirului inițial, scrise în ordinea în care ele apar în șirul inițial.

Fie $l_i^-$ lungimea celui mai lung subșir descrescător care începe cu $u_i$ și $l_i^+$ lungimea celui mai lung subșir crescător care începe cu $u_i$.

Să presupunem, prin absurd, că afirmația făcută este falsă, adică orice subșir descrescător are o lungime mai mică sau egală cu $m$ și orice subșir crescător are o lungime mai mică sau egală cu $n$.

Vom defini funcția $f : \{u_1, u_2, \ldots, u_{mn+1}\} \to \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ astfel :

$$f(u_i) = (l_i^-, l_i^+).$$

Să arătăm că $f$ este o injecție, în ipoteza făcută.

Presupunem, de exemplu, că $i < j$. În acest caz, $u_i > u_j$ implică $l_i^- > l_j^-$ deoarece la subșirul descrescător inițial, de lungime maximă care începe cu $u_j$, mai putem adăuga la stînga cel puțin un element, și anume pe $u_i$, și astfel lungimea subșirului crește cu cel puțin o unitate, adică $l_i^- > l_j^-$. Tot astfel, $u_i < u_j$ implică $l_i^+ > l_j^+$ deoarece la subșirul crescător inițial de lungime maximă care începe cu $u_j$ putem adăuga la stînga cel puțin un element, și anume pe $u_i$ și astfel lungimea subșirului crește cu cel puțin o unitate, adică $l_i^+ > l_j^+$.

Ca atare, $u_i \neq u_j$ implică $(l_i^-, l_i^+) \neq (l_j^-, l_j^+)$, adică $f(u_i) \neq f(u_j)$.

În concluzie, funcția $f$ este injectivă și deci numărul de elemente din mulțimea $\{u_1, u_2, \ldots, u_{mn+1}\}$ este mai mic sau egal cu numărul elementelor din codomeniul funcției $f$, adică din $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ care conține $mn$ elemente. De aici, $mn + 1 \leqslant mn$, absurd.

Contradicția a provenit din presupunerea că afirmația enunțului este falsă.

**II.79°.** Dacă $a$ și $n$ sînt numere naturale, atunci există un număr natural $A_n$ ce depinde de $n$ și $a$, astfel ca:

$$(a + \sqrt{a^2 - 1})^n = A_n + \sqrt{A_n^2 - 1}.$$

**R.** Folosim formula de dezvoltare a binomului după NEWTON și obținem (excludem cazul banal $a = 1$):

$$(a + \sqrt{a^2 - 1})^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}\sqrt{a^2 - 1} + C_n^2 a^{n-2}(\sqrt{a^2 - 1})^2 + \ldots +$$
$$+ C_n^{n-1} a(\sqrt{a^2 - 1})^{n-1} + (\sqrt{a^2 - 1})^n = a^n + C_n^2(a^2 - 1)\, a^{n-2} + \ldots +$$
$$+ \sqrt{a^2 - 1}\,[C_n^1 a^{n-1} + C_n^3 a^{n-3}(a^2 - 1) + \ldots].$$

Notăm:

$$A_n = a^n + C_n^2 a^{n-2}(a^2 - 1) + \ldots; \quad B_n = C_n^1 a^{n-1} + C_n^3 a^{n-3}(a^2 - 1) + \ldots$$

deci:

$$(a + \sqrt{a^2 - 1})^n = A_n + B_n\sqrt{a^2 - 1}. \tag{1}$$

Dar:

$$(a - \sqrt{a^2 - 1})^n = a^n - C_n^1 a^{n-1}\sqrt{a^2 - 1} + C_n^2 a^{n-2}(\sqrt{a^2 - 1})^2 - \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-1} C_n^{n-1} a(\sqrt{a^2 - 1})^{n-1} + (-1)^n(\sqrt{a^2 - 1})^n = a^n + C_n^2(a^2 - 1) + \ldots -$$
$$- \sqrt{a^2 - 1}\,[C_n^1 a^{n-1} + C_n^3 a^3(a^2 - 1) + \ldots] = A_n - B_n\sqrt{a^2 - 1},$$

deci:

$$\begin{aligned}(a + \sqrt{a^2 - 1})^n &= A_n + B_n\sqrt{a^2 - 1};\\ (a - \sqrt{a^2 - 1})^n &= A_n - B_n\sqrt{a^2 - 1}.\end{aligned} \tag{2}$$

Înmulțind (1) și (2) obținem $1 = A_n^2 - (a^2 - 1)B_n^2$ deci $B_n^2 = \dfrac{A_n^2 - 1}{a^2 - 1}$

deci:

$$(a + \sqrt{a^2 - 1})^n = A_n + B_n\sqrt{a^2 - 1} = A_n + \sqrt{a^2 - 1}\,\frac{\sqrt{A_n^2 - 1}}{\sqrt{a^2 - 1}} = A + \sqrt{A_n^2 - 1}\cdot$$

**II.80°.** Din numărul:

$$123456789101112\ldots9899100$$

să se scoată 20 de cifre asftel ca numărul rămas să fie cît mai mare posibil.

**R.** Numărul dat are $9 + 90 \times 2 + 3 = 192$ cifre. Scoțînd 20 de cifre, obținem un număr din 172 cifre. Pentru ca acest număr să fie cît mai mare este necesar ca primele cifre să fie cît mai mari. Vom elimina în felul acesta primele opt cifre așa încît prima cifră a nunărului obținut să fie 9. Vom elimina apoi următoarele 11 cifre după 9 și, încă, cifra 1 ce urmează pe 5 astfel că vom obține numărul căutat:

$$956171819\ldots100.$$

**II.81°.** Să se arate că orice număr întreg $k$ poate fi reprezentat într-o infinitate de moduri sub forma:

$$k = \pm 1^2 + 2^2 \pm 3^2 \pm \ldots \pm m^2$$

unde $m \in \mathbb{N}^*$, afirmaţia anterioară fiind relativă la $m$ şi la semnele $+$ şi $-$.

**R.** Putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că avem $k \geqslant 0$ întrucît dacă există o reprezentare pentru $k \geqslant 0$:

$$k = e_1 1^2 + e_2 2^2 + \ldots + e_m m^2$$

atunci:

$$-k = -e_1 1^2 - e_2 2^2 - \ldots - e_m m^2$$

este o reprezentare pentru $-k$, unde $e_i \in \{-1, 1\}$, căci dacă $e_i \in \{-1, 1\}$, $(\forall)\ i \in \overline{1, m}$ atunci şi $-e_i \in \{-1, 1\}$, $(\forall)\ i \in \overline{1, m}$.

Pentru demonstraţie vom proceda prin inducţie. Afirmaţia este banal verificată pentru numerele 0, 1, 2, 3, 4, deoarece:

$0 = 1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2;$
$1 = 1^2;$
$2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2;$
$3 = -1^2 + 2^2;$
$4 = -1^2 - 2^2 + 3^2.$

Presupunem că afirmaţia este verificată pentru un $k \in \mathbb{N}^*$ oarecare şi s-o demonstrăm, în această ipoteză, şi pentru $k + 4$ (inducţia are, aşadar, pasul 4). Deoarece există $m \in \mathbb{N}^*$ şi o alegere a semnelor $-$ şi $+$ pentru care:

$$k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm m^2$$

şi deoarece are loc identitatea:

$$4 = (m + 1)^2 - (m + 2)^2 - (m + 3)^2 + (m + 4)^2,$$

rezultă, prin adunarea celor două relaţii:

$$k + 4 = \pm 1^2 + 2^2 \pm \ldots \pm m^2 + (m + 1)^2 - (m + 2)^2 - (m + 3)^2 + (m + 4)^2$$

adică o descompunere de tipul cerut. Astfel, potrivit principiului inducţiei, afirmaţia enunţului este valabilă pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, deci, în baza unei observaţii anterioare, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$.

Să observăm acum că din identitatea:

$$0 = (m + 1)^2 - (m + 2)^2 - (m + 3)^2 + (m + 4)^2 - (m + 5)^2 + (m + 6)^2 + (m + 7)^2 - (m + 8)^2$$

şi din reprezentarea lui $k$ sub forma din enunţ, putem obţine o infinitate de reprezentări, înlocuind pe $m$ cu $m + 8$, pe $m$ cu $m + 16$ ş.a.m.d.

O afirmaţie analoagă este valabilă şi pentru cuburile numerelor, scriind pe $k$ sub forma unei combinaţii de cuburi.

**II.82°.** Să se construiască o funcţie $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ care să ia fiecare valoare $k \in \mathbb{N}^*$ de o infinitate de ori.

**R.** Funcţia $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ definită astfel:

$$f(n) = k, \quad n = 2^k n_1, \quad (n_1, 2)_* = 1,$$

satisface enunţul.

**II.83°.** Să se demonstreze că orice număr natural este sau egal cu un termen al şirului lui FIBONACCI $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit de relaţia de recurenţă:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad (\forall) \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

în care $u_1 = u_2 = 1$, sau este egal cu suma unor termeni distincţi ai acestuia.

**R.** Demonstrăm prin inducţie în raport cu $n$, indicele termenului $u_n$ Pentru $n = 1$, $u_1 = 1$ şi deci $1 = u_1$. Pentru $n = 2$, analog. Pentru $n = 3$, $u_3 = 2$ şi deci $1 = u_1$, $2 = u_3$. Presupunem că pentru un $n \in \mathbb{N}^*$, toate numerele naturale $k \leqslant u_n$ au proprietatea că pot fi scrise ca suma unor termeni distincţi ai şirului $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ sau sînt egale (unele dintre ele) cu termeni ai acestui şir. Să demonstrăm afirmaţia şi pentru numerele $k$ satisfăcînd inegalităţile:

$$u_n < k < u_{n+1}.$$

De aici va rezulta, în baza principiului inducţiei, enunţul. Dacă admitem, pentru un $k$ oarecare, satisfăcînd inegalitatea anterioară, că verifică inegalitatea $k - u_n > u_{n-1}$, ar rezulta $k > u_n + u_{n-1} = u_{n+1}$, absurd. Deci $0 < k - u_n \leqslant u_{n-1}$ şi cum:

$$k = (k - u_n) + u_n$$

iar $k - u_n$ se scrie, potrivit ipotezei, ca o sumă de termeni distincţi (sau este egal cu un termen) din şirul $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ mai mici sau egali cu $u_{n-1}$, rezultă că şi $k$ are această proprietate. Cum $k$ a fost ales arbitrar, rezultă enunţul (ales între $u_n$ şi $u_{n+1}$).

*Observaţie.* Şirul $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit în enunţ are o serie de proprietăţi interesante ca, de exemplu:

a°). $u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n+1} = u_{2n+1}$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$;

b°). $1 + u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1}$ $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$;

c°). $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - \ldots \pm u_n = \pm u_{n-1} \pm 1$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$;

d°). $u_n^2 - u_{n-1} u_{n+1} = (-1)^{n-1}$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$;

e°). $u_{n-1}^2 + u_n^2 = u_{2n-1}$ $(\forall)$, $n \in \mathbb{N}^*$;

$f$°). $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$;

g°). $u_{n+1} u_{n+2} - u_n u_{n+3} = (-1)^n$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$

care pot constitui exerciţii utile pentru cititor.

**II.84°.** Fie $k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Să se arate că oricum am împărţi mulţimea numerelor naturale nenule în $k$ submulţimi disjuncte şi nevide (disjuncte două cîte două), în cel puţin una dintre ele există trei numere $x$, $y$, $z$ astfel ca:

$$x + y = z.$$

R. Să presupunem, prin absurd, că am împărţit mulţimea numerelor naturale nenule în $k \geqslant 2$ submulţimi de tipul cerut în aşa fel încît nici o submulţime să nu conţină trei numere $x$, $y$, $z$ aşa încît:

$$x + y = z.$$

Deoarece numărul submulţimilor este finit, iar numărul numerelor naturale este infinit, urmează că există cel puţin o submulţime, pe care o notăm cu $C_1$, care conţine o infinitate de numere. Fie:

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$$

numerele submulţimii $C_1$.

Să construim acum şirul numerelor naturale:

$$0 < x_2 - x_1 < x_3 - x_1 < \ldots < x_n - x_1 < \ldots \tag{1}$$

obţinut, după cum se vede, din cel precedent, scăzînd primul termen din toţi ceilalţi.

Nici unul din termenii acestui şir nu poate fi cuprins în $C_1$, căci altfel am avea în $C_1$ o soluţie în numere naturale a ecuaţiei din enunţ (dacă, de exemplu:

$$x_j - x_1 = x_t$$

atunci am avea în $C_1$ egalitatea $x_j = x_1 + x_t$). Aceşti termeni sînt deci împărţiţi în celelalte $k - 1$ clase (submulţimi) şi există cel puţin una care conţine o infinitate din ei. Fie:

$$0 < x_{\alpha_1} - x_1 < x_{\beta_1} - x_1 < x_{\gamma_1} - x_1 < \ldots \tag{2}$$

termenii din şirul (1) care îi conţine această submulţime (să o notăm $C_2$).

Să construim acum şirul de numere naturale:

$$0 < x_{\beta_1} - x_{\alpha_1} < x_{\gamma_1} - x_{\alpha_1} < x_{\theta_1} - x_{\alpha_1} < \ldots \tag{3}$$

obţinut din şirul (2) scăzînd din termenii şirului primul termen $x_{\alpha_1} - x_1$.

Nici unul din termenii şirului (3) nu se găseşte nici în $C_1$, nici în $C_2$. În adevăr, dacă s-ar găsi în $C_1$, am avea, de exemplu:

$$x_{\beta_1} - x_{\alpha_1} = x_q$$

sau:

$$x_{\beta_1} = x_{\alpha_1} + x_q$$

deci o soluţie în $C_1$, iar dacă s-ar găsi în $C_2$, am avea, de exemplu:

$$x_{\theta_1} - x_{\alpha_1} = x_{\sigma_1} - x_1$$

adică:

$$(x_{\theta_1} - x_1) = (x_{\alpha_1} - x_1) + (x_{\sigma_1} - x_1),$$

deci o soluţie în $C_2$, contrar ipotezei.

Rezultă că termenii şirului (3) sînt împărţiţi în $k-2$ clase (submulţimi) şi cel puţin una dintre ele conţine o infinitate de termeni ai şirului (3). Fie $C_3$ o asemenea clasă şi :

$$0 < x_{\alpha_2} - x_{\alpha_1} < x_{\beta_1} - x_{\alpha_1} < \ldots \tag{4}$$

termenii din şirul (3) pe care îi conţine $C_3$. Să construim şirul :

$$0 < x_{\beta_1} - x_{\alpha_2} < x_{\gamma_2} - x_{\alpha_2} < x_{\delta_2} - x_{\alpha_2} < \ldots \tag{5}$$

obţinut din (4) scăzînd primul termen din toţi ceilalţi. Nici unul din termenii şirului (5) nu se găseşte nici în $C_1$, nici în $C_2$, nici în $C_3$, pentru motive analoage celor expuse anterior.

Există, aşadar, o clasă $C_4$ care conţine o infinitate de termeni ai şirului (5), din cele $k-3$ clase rămase.

Continuînd în acelaşi mod, ajungem la ultima clasă $C_k$, formată din termenii :

$$0 < x_{\alpha_{k-1}} - x_{\alpha_{k-2}} < x_{\beta_{k-1}} - x_{\alpha_{k-2}} < x_{\gamma_{k-1}} - x_{\alpha_{k-2}} < \ldots$$

şi care nu se află în nici una din clasele $C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}$.

Dacă din acest şir formăm unul nou scăzînd primul termen din toţi ceilalţi, termenii noului şir obţinut nu pot face parte, potrivit raţionamentului folosit la fiecare etapă, din nici una din cele $k$ clase, ceea ce contrazice ipoteza, anume că toate numerele naturale au fost împărţite în $k$ submulimi.

Potrivit principiului reducerii la absurd, afirmaţia din enunţ este dovedită.

**II.85°.** Să se găsească toate soluţiile în numere raţionale strict pozitive ale ecuaţiei :

$$x^y = y^x.$$

**R.** Evident, orice cuplu $(x, x)$, cu $x$ număr raţional strict pozitiv, este soluţie a ecuaţiei propuse astfel încît vom presupune $x \neq y$. Încă, fără a restrînge generalitatea, admitem $y > x$. Atunci numărul :

$$w = \frac{x}{y-x} > 0 \tag{1}$$

este un număr raţional. Din (1) deducem :

$$y = \left(1 + \frac{1}{w}\right) x$$

şi din această cauză :

$$x^y = x^{\left(1+\frac{1}{w}\right)x}$$

şi cum $x^y = y^x$, rezultă succesiv :

$$x^{\left(1+\frac{1}{w}\right)x} = y^x,\ x^{1+\frac{1}{w}} = y = \left(1 + \frac{1}{w}\right) x;\ x^{\frac{1}{w}} = 1 + \frac{1}{w};$$

$$x = \left(1 + \frac{1}{w}\right)^w;\ y = \left(1 + \frac{1}{w}\right)^{w+1}. \tag{2}$$

Să considerăm fracţiile ireductibile $\frac{n}{m}$ şi $\frac{r}{s}$, egale respectiv cu $w$ şi $x$. Din (2) se obţine:

$$\left(\frac{m+n}{n}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{r}{s}; \quad \frac{(n+m)^n}{n^n} = \frac{r^m}{s^m}. \tag{3}$$

Potrivit ipotezei, numerele $m$ şi $n$ sînt prime între ele şi, ca atare, şi numerele $m+n$ şi $n$ şi deci şi $(m+n)^n$ şi $n^n$ sînt prime între ele.

Analog, $r^m$ şi $s^m$ sînt prime între ele. Rezultă deci că fracţiile din relaţia (3) sînt fracţii ireductibile şi deci:

$$(m+n)^n = r^m; \quad n^n = s^m.$$

Din $(m+n)^n = r^m = t$, deoarece $(m, n)_* = 1$, deducem că $t$ este puterea $mn$ a unui număr natural, $t = k^{mn}$, $k \in \mathbb{N}^*$, deci:

$$m+n = k^m, \quad r = k^n$$

şi, analog, există $l \in \mathbb{N}^*$ astfel încît:

$$n = l^m, \quad s = l^n.$$

Aşadar:

$$m + l^m = k^m$$

deci $k \geqslant l+1$. Dacă $m > 1$, atunci:

$$k^m \geqslant (l+1)^m \geqslant l^m + ml^{m-1} + 1 \geqslant l^m + m$$

deci $k^m > l^m + m$, absurd. Ca atare $m = 1$ deci:

$$w = \frac{n}{m} = n.$$

În felul acesta, formulele (2) devin:

$$x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{3'}$$

în care $n \in \mathbb{N}^*$, ele exprimînd toate soluţiile în numere raţionale strict pozitive ale ecuaţiei din enunţ, în ipoteza $x \neq y$.

Pentru $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, ecuaţia devine $a^a = b^b$ care are, deci, soluţiile date de:

$$a = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \quad b = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

în ipoteza $a \neq b$.

Pentru a determina care din soluţiile găsite sînt formate din numere naturale, să notăm:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

şi să arătăm că :

$$2 \leqslant a_n < a_{n+1} < 3.$$

Vom folosi, în cele ce urmează inegalitatea lui BERNOULLI :

$$(1 + a)^n \geqslant 1 + na, \; (\forall) \; n \in \mathbb{N}^*, \; (\forall) \; a \in [-1, \infty)$$

care poate fi demonstrată, de exemplu, prin inducţie matematică. În baza acestei inegalităţi :

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2,$$

cu egalitate numai cînd $n = 1$.

Să arătăm acum că dacă $n, k \in \mathbb{N}^*$, $k \leqslant n$, atunci :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}.$$

Procedăm prin inducţie după $k$. Pentru $k = 1$, evident :

$$1 + \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Pentru $k = 2$ :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}.$$

Presupunem că afirmaţia este valabilă pentru $k \in \mathbb{N}$, $k < n$, oarecare, adică :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}.$$

Înmulţind cu $1 + \frac{1}{n}$ obţinem :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2} + \frac{1}{n} + \frac{k}{n^2} + \frac{k^2}{n^3} =$$

$$= 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k+1}{n^2} + \frac{k^2}{n^3}$$

sau :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} < 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2} -$$

$$- \frac{n(k+1) - k^2}{n^3} < 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2}$$

deoarece $n(k + 1) - k^2 \geqslant 0$. Aceasta se arată astfel : prin ipoteză, $k \leqslant n$ deci $k(k+1) \leqslant n(k+1)$ adică $n(k+1) - k^2 - k \geqslant 0$, deci $n(k+1) - k^2 \geqslant k > 0$.

Deci afirmaţia făcută anterior este valabilă în baza ipotezelor, potrivit principiului inducţiei.

În baza inegalității lui BERNOULLI:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2,$$

iar în baza celei de-a doua (demonstrate):

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{n}{n} + \frac{n^2}{n^2} = 3.$$

Astfel:

$$2 < a_n < 3, \ (\forall) \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Să arătăm că și:

$$a_n < a_{n+1}.$$

Evident:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n^2 + 2n + 1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

și, în baza inegalității lui BERNOULLI:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \left(1 - \frac{n}{n^2 + 3n + 1}\right) \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1,$$

deci $a_{n+1} > a_n$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$.

De aici rezultă că numărul:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

este natural numai pentru $n = 1$ deci $x = 2$ și $y = 4$. Cum ecuația din enunț este simetrică în $x$ și $y$ rezultă și soluția $(4, 2)$ astfel că toate soluțiile în numere naturale ale ecuației din enunț sînt $(2, 4)$, $(4, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $\ldots$, $(n, n)$, $\ldots$

**II.86°.** Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right]_* = n, \ (\forall) \ n \in \mathbb{N}^*.$$

**R.** *Soluția I.* Se observă că pentru $k > \log_2 n$:

$$\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right]_* = 0$$

deci suma este egală, pentru un $n$ fixat, cu un număr finit.

Se verifică imediat că pentru $n = 1$, $S_1 = 1$, pentru $n = 2$, $S_2 = 2$, pentru $n = 3$, $S_3 = 3$, notînd:

$$S_n = \left[\frac{n+1}{2}\right]_* + \left[\frac{n+2}{2^2}\right]_* + \left[\frac{n+2^2}{2^3}\right]_* + \cdots$$

Observațiile anterioare ne conduc la presupunerea:

$$S_n = n.$$

Procedăm prin inducție. Să arătăm, în ipoteza că $S_n=n$, că $S_{n+1}= = n+1$ ceea ce este echivalent cu a arăta că în $S_{n+1}$ numai una din expresiile:

$$\left[\frac{n+1+2^k}{2^{k+1}}\right]_*$$

se mărește cu o unitate în raport cu expresiile:

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]_*$$

(aceasta pentru că:

$$\left[\frac{n+1+2^k}{2^{k+1}}\right]_* \geqslant \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]_*$$

pentru fiecare $k$).

Vom demonstra că dacă una din expresiile $\left[\frac{n+1+2^k}{2^{k+1}}\right]_*$ se mărește cu o unitate, atunci următoarele nu se măresc și vom demonstra apoi că cel puțin una se mărește.

Ca expresia $\left[\frac{n+1+2^k}{2^{k+1}}\right]_*$ să se mărească cu o unitate față de:

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]_*$$

trebuie ca $n+1+2^k = m\cdot 2^{p+1}$, $m\in \mathbb{N}^*$.

Să presupunem că mai există un rang $p$ pentru care se întîmplă același lucru. Analog, obținem:

$$n+1+2^p = m_1\cdot 2^{p+1},\ m_1\in \mathbb{N}^*,$$

sau, scăzînd cele două relații și punînd, de pildă, $k>p$:

$$2^p(2^{k-p}-1) = 2^{p+1}(2^{k-p}\cdot m - m_1)$$

sau încă:

$$2^{k-p}-1 = 2(2^{k-p}\cdot m - m_1)$$

absurd, deci există cel mult un $k$ avînd proprietatea specificată.

Dacă $n+1$ este impar, se va mări primul termen cu o unitate cînd trecem de la $n$ la $n+1$.

Dacă $n+1$ este par, atunci $n$ este de forma $2^k(2m-1)-1$ și, în acest caz se va mări cu o unitate termenul de rang $k$, deoarece:

$$\left[\frac{2^k(2m-1)+2^k}{2^{k+1}}\right]_* = m$$

și:

$$\left[\frac{2^k(2m-1)-1+2^k}{2^{k+1}}\right]_* = m-1.$$

Deci, potrivit principiului inducţiei matematice, $S_n = n$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$.
*Soluţia a II-a.* Să arătăm, în prealabil, că:

$$\left[x + \frac{1}{2}\right]_* = [2x]_* - [x]_* \qquad (1)$$

Cu acest rezultat, se observă că:

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]_* + \left[\frac{n+2}{2^2}\right]_* + \left[\frac{n+2^2}{2^3}\right]_* + \ldots =$$

$$= [n]_* - \left[\frac{n}{2}\right]_* + \left[\frac{n}{2}\right]_* - \left[\frac{n}{2^2}\right]_* + \ldots = n.$$

Să arătăm deci (1). În adevăr, orice $x \in \mathbb{R}$ se poate scrie fie ca $x = k + \alpha$, fie $x = k + \frac{1}{2} + \alpha$, unde $k \in \mathbb{Z}$ şi $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$. În ambele cazuri, $[x]_* = k$.

Pentru $x = k + \alpha$:

$$\left[x + \frac{1}{2}\right]_* = \left[k + \alpha + \frac{1}{2}\right]_* = k, \quad [2x]_* = [2k + 2\alpha]_* = 2k = 2[x]_*$$

deci:

$$\left[x + \frac{1}{2}\right]_* = [2x]_* - [x]_*$$

Pentru $x = k + \frac{1}{2} + \alpha$:

$$\left[x + \frac{1}{2}\right]_* = \left[k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\right]_* = k + 1;$$

$$[2x]_* = [2k + 1 + 2\alpha]_* = 2k + 1, \ [x]_* = \left[k + \frac{1}{2} + \alpha\right]_* = k$$

deci şi în acest caz, după calcule, egalitatea se verifică.

**II.87°.** Să se arate că există o infinitate de numere prime, fără a folosi ideea lui EUCLID.

**R.** *Soluţia I.* Să amintim şi demonstraţia lui EUCLID. Presupunem, prin absurd, că numărul numerelor prime este finit. Fie $p_1, p_2, \ldots, p_k$ aceste numere, $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$. Numărul:

$$N_k = p_1 p_2 \ldots p_k + 1$$

este sau prim sau compus. Dacă este prim, evident $N_k > p_k$, contrar proprietăţii de maximalitate a lui $p_k$, presupus cel mai mare număr prim. Deci $N_k$ este compus. Dar atunci el admite ca divizor un număr prim, fie acesta $p_u$, care nu poate face parte din mulţimea $p_1, \ldots, p_k$ fiindcă atunci:

$$p_1 \ldots p_k + 1 = hp_u$$

adică :

$$p_u(p_1\cdots p_{u-1}\,p_{u+1}\cdots p_k-h)=-1$$

absurd. Deci $p_u > p_k$, ceea ce contrazice proprietatea de maximalitate a lui $p_k$. Deci presupunerea că există un număr finit de numere prime ne-a condus la o contradicție.

*Soluția a II-a.* (EULER). Raționăm tot prin reducere la absurd. Fie deci numărul lor finit și fie acestea $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Considerăm identitatea :

$$1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1} \tag{1}$$

valabilă pentru orice $x\neq 1$ (se poate demonstra prin inducție matematică, sau, mai simplu, observînd că, după efectuarea înmulțirii $(1+x+x^2+\ldots+x^n)(1-x)$ se obține tocmai $1-x^{n+1}$). Din (1) rezultă :

$$1+\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i^2}+\ldots+\frac{1}{p_i^n}=\frac{\frac{1}{p_i^{n+1}}-1}{-1+\frac{1}{p_i}} \tag{2}$$

pentru orice $i\in\overline{1,k}$, $p_i$ fiind al $i$-lea număr prim din cele $k$. Deoarece, cînd $n$ crește nemărginit, $x^n$ pentru $0<x<1$ tinde către zero, rezultă că, făcînd în (1), $n\to\infty$, obținem :

$$1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}$$

Ca atare, (2) devine și el :

$$1+\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i^2}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}.$$

Făcînd, în egalitatea anterioară, $i=1$, apoi $i=2$, ş.a.m.d. și înmulțind relațiile obținute, găsim că :

$$\prod_{i=1}^{k}\left(1+\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i^2}+\ldots\right)=\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}.$$

Dar, prin desfacerea parantezelor din primul membru, obținem fracții cu numărătorul 1 și numitorul numere naturale diferite, anume toate numerele de forma $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ unde $\alpha_i\in\mathbb{N}, (\forall) i\in\overline{1,k}$, deci toate numerele naturale (căci orice număr natural se scrie sub forma specificată) deci :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots=\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}$$

Să arătăm că această egalitate nu poate avea loc. Evident:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2};\ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2};\ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} +$$

$$+ \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \ldots$$

Cum:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n} > \frac{n}{2}$$

rezultă, cînd $n$ crește nemărginit, că suma:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

crește nemărginit astfel că egalitatea (3) este imposibilă.

**II.88°.** (Lagrange). Să se arate că orice număr întreg $n \geqslant 0$ poate fi scris ca sumă de patru pătrate ale unor numere întregi.

**R.** Plecînd de la identitatea:

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 +$$

$$+ x_4y_4)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)^2 +$$

$$+ (x_1y_3 - x_3y_1 + x_4y_2 - x_2y_4)^2 + (x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2)^2 \quad (*)$$

deducem că dacă două numere naturale $A$ și $B$ se descompun sub forma unei sume de patru pătrate ale unor numere întregi, atunci și $AB$ este o sumă de patru pătrate ale unor numere întregi.

Să arătăm că dacă $p$ este un număr prim mai mare decît 2, atunci este posibil să găsim un număr $m$ astfel încît:

$$1 \leqslant m < p$$

și $mp$ să fie scris sub forma unei sume de patru pătrate ale unor numere întregi:

$$mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2. \quad (1)$$

Fie, pentru aceasta, $p$ un număr prim impar ($p = 2$ corespunde cazului în care $2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$).

Considerînd numerele $0^2, 1^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Împărțindu-le pe fiecare la $p$ și luînd numai resturile, obținem $\frac{p+1}{2}$ numere $r_i$, fiecare cuprins între 0 și $p - 1$.

Aceste resturi sînt diferite între ele căci dacă două numere $x_1$ şi $x_2$, $x_1 > x_2$, cuprinse între 0 şi $\frac{p-1}{2}$, ar avea proprietatea că pătratele lor, prin împărţirea la $p$, ar da acelaşi rest:

$$x_1^2 = q_1p + r$$

$$x_2^2 = q_2p + r$$

adică, scăzînd:

$$x_1^2 - x_2^2 = p(q_1 - q_2)$$

ar rezulta că $p$ divide sau numărul $x_1 - x_2$ sau numărul $x_1 + x_2$, absurd căci $0 < |x_1 - x_2| < p - 1$ şi $0 < |x_1 + x_2| < p - 1$.

Considerăm acum resturile $r_i$ mărite cu 1 pe care le scădem din $p$. Obţinem din nou $\frac{p+1}{2}$ numere $s_i$, cuprinse între 0 şi $p - 1$, diferite două cîte două. Cel puţin unul dintre aceste numere $s_i$ trebuie să fie egal cu un număr $r$ dintre cele precedente, deoarece acestea sînt $\frac{p+1}{2}$ dintre cele $p$ numere $0, 1, \ldots, p-1$, lăsînd disponibile $\frac{p-1}{2}$ numere iar numerele $s_i$ sînt în număr de $\frac{p+1}{2}$. Fie $R = S$ numere egale dintre numerele $r$ şi $s_i$. Numărul $R$ este un rest al împărţirii unui număr $x^2$ cu $p$, unde $0 \leqslant x \leqslant \frac{p-1}{2}$ iar $S$ se obţine împărţind cu $p$ un număr $y^2$, pentru care $0 \leqslant y \leqslant \frac{p-1}{2}$, mărind restul cu 1 şi scăzîndu-l apoi din $p$.

Adică:

$$x^2 = q_1p + R,$$

$$y^2 = q_2p + r,$$

$$S = p - (r + 1).$$

Adunînd aceste relaţii, obţinem:

$$x^2 + y^2 + S = (q_1 + q_2 + 1)p + R - 1.$$

Dar, cum:

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{p-1}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{p-1}{2},$$

obţinem, ţinînd seama că $R = S$:

$$x^2 + y^2 + 1 = mp$$

unde $m = q_1 + q_2 + 1$, astfel că:

$$0 < mp \leqslant \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{p^2 - 2p + 3}{2} < p^2$$

şi deci $0 < pm < p^2$ sau $0 < m < p$, ceea ce demonstrează afirmaţia făcută la începutul consideraţiilor noastre deoarece:

$$mp = x^2 + y^2 + 1^2 + 0^2.$$

Să arătăm acum că dacă $p$ este un număr prim mai mare decît 2 şi dacă $m$ este cel mai mic număr întreg strict pozitiv pentru care $mp$ se poate scrie ca o sumă de patru pătrate ale unor numere întregi, atunci $m = 1$.

Potrivit celor demonstrate anterior, $m < p$. Acest număr $m$ nu poate fi par căci dacă ar fi aşa, numărul:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

egal cu $mp$, ar fi un număr par şi, în acest caz, sau toate numerele $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ ar fi pare, sau două pare şi două impare, sau, în fine, toate ar fi impare. În cazul al doilea (în primul caz, cînd toate numerele $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ sînt pare, are loc:

$$\left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_4}{2}\right)^2 = \frac{m}{4}p, \ \frac{m}{4} \in \mathbb{N}$$

şi cum numărul din primul membru este întreg rezultă că şi $\frac{m}{4}$ este întreg, strict pozitiv — căci $(p, 4)_* = 1$ —, contrar proprietăţii de minimalitate a lui $m$—s-a presupus că $m$ este cel mai mic număr natural cu proprietatea:

$$mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$$

putem presupune că am numerotat numerele $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ astfel încît $x_1$ şi $x_2$ sînt pare iar $x_3$ şi $x_4$ sînt impare astfel că numerele:

$$(x_1 + x_2),\ (x_1 - x_2),\ (x_3 + x_4),\ (x_3 - x_4)$$

sînt toate pare şi cum, din (1):

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{x_3 - x_4}{2}\right)^2 = \frac{m}{2}p, \ \frac{m}{2} \in \mathbb{N},$$

rezultă că $\frac{m}{2}p$ poate fi scris sub forma unei sume de patru pătrate ale unor numere întregi şi, prin urmare, $m$ nu ar fi cea mai mică valoare cu proprietatea anterioară.

Aşadar, $m < p$ şi $m$ impar. Pentru a demonstra că $m = 1$, presupunem $m \neq 1$ şi vom arăta că de data aceasta numărul $m$ poate fi micşorat. Deoarece $m$ este impar, putem presupune $m \geqslant 3$.

Împărţind pe fiecare $x_k$, $k \in \{1,\dots,4\}$, prin $m$, obţinem resturile $r_k$, $0 \leqslant r_k < m$.

Dacă $0 \leqslant r_k \leqslant \frac{m-1}{2}$, vom scrie $y_k = r_k$. Dacă $\frac{m+1}{2} \leqslant r_k \leqslant$ $\leqslant m-1$, vom scrie $y_k = r_k - m$. În ambele cazuri vom obţine $x_k =$ $= q_k m + y_k$ şi:

$$-\frac{m-1}{2} \leqslant y_k \leqslant \frac{m-1}{2}$$

Deoarece $y_k = x_k - q_k m$, obţinem, de asemenea, folosind (1):

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2m(x_1q_1 + x_2q_2 + x_3q_3 + x_4q_4) + m^2(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2) = mp - 2m(x_1q_1 + x_2q_2 + x_3q_3 + x_4q_4) + m^2(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2) = mn$$

unde $n$ este un număr întreg pozitiv. Prin urmare, vom avea $n \neq 0$ deoarece dacă $n = 0$ atunci $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$ şi aceasta ar însemna că fiecare $x$ este multiplu de $m$ şi, de aici, fiecare $x^2$ este multiplu de $m^2$ astfel că $p$ ar fi multiplu de $m^2$, absurd, căci este prim. De asemenea:

$$mn = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \leqslant 4\left(\frac{m-1}{2}\right)^2 < m^2$$

deci $n < m$.

Înmulţind (1) cu (2) găsim:

$$m^2np = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2). \tag{3}$$

Avînd în vedere formula (*) al cărui prim membru coincide cu al doilea al formulei precedente, cu observaţia că:

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 = x_1(x_1 - q_1m) + x_2(x_2 - q_2m) + x_3(x_3 - q_3m) + x_4(x_4 - q_4m) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - m(x_1q_1 + x_2q_2 + x_3q_3 + x_4q_4) = mp - m(x_1q_1 + x_2q_2 + x_3q_3 + x_4q_4) = mz_1,\ z_1 \in \mathbb{Z},$$

$$x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 = x_1(x_2 - q_2m) - x_2(x_1 - q_1m) + x_3(x_4 - q_4m) - x_4(x_3 - q_3m) = m(-x_1q_2 + x_2q_1 - x_3q_4 + x_4q_3) = mz_3,\ z_3 \in \mathbb{Z}$$

etc., avem că:

$$m^2np = m^2z_1^2 + m^2z_2^2 + m^2z_3^2 + m^2z_4^2$$

unde $z_i \in \mathbb{Z}$, $(\forall)$ $i \in \overline{1, 4}$, astfel că:

$$np = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$$

ceea ce contrazice proprietatea de minimalitate a lui $m$ (am arătat că $0 < n < m$).

Ca atare, $m = 1$.

Rezultă, din considerațiile anterioare, că orice număr prim poate fi scris ca o sumă de patru pătrate ale unor numere întregi.

Pentru un $n$ oarecare, fie $n = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \ldots p_{i_k}^{\alpha_k}$ descompunerea sa canonică ($p_t$ reprezentînd al $t$-lea număr prim), $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $(\forall)$ $i \in \overline{1, k}$. Observînd că $p_{i_j}$, în virtutea relației $(\ast)$, se poate scrie ca sumă de patru pătrate ale unor numere întregi (produsul a două numere de forma $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ este un număr de aceeași formă) și, prin inducție, produsul a $t$ — oarecare — numere de forma respectivă este un număr de aceeași formă, deducem imediat teorema lui LAGRANGE enunțată.

**II.89°.** Să se arate că suma:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

nu poate fi număr întreg pentru nici o valoare $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

**R.** Între numerele $1, 2, \ldots, n$ $n > 1$, există un termen $t$ care, în descompunerea sa canonică, conține pe 2 la puterea cea mai mare, față de celelalte numere (de exemplu, dacă $n = 10$ atunci $t = 8 = 2^3$). Fie $2m$ cel mai mic multiplu comun al numerelor $1, 2, \ldots, n$. Înmulțind cu $m$ ambii membri ai egalității:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n},$$

admițînd că $S$ este întreg, obținem în primul membru un număr întreg (anume $S_m$) iar fiecare termen din membrul drept va fi întreg cu excepția fracției $\frac{1}{t}$ care, după simplificări, se va transforma într-o fracție ireductibilă cu numitorul 2. Dar acest lucru este absurd, deci $S$ nu este număr întreg.

**II.90°.** Să se arate că pentru fiecare $k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, există $k$ numere consecutive cu proprietatea că toate sînt compuse. În plus, există o infinitate de sisteme de $k$ numere cu proprietatea enunțată.

**R.** Pentru $k = 2$, considerăm numerele 8 și 9, de exemplu, sau, mai general $(p + 1)! + 2$ și $(p + 1)! + 3$ unde $p$ parcurge mulțimea numerelor prime din care am exclus pe 2.

Fie $k \in \mathbb{N}^* - \{1, 2\}$. Atunci numerele:

$$(k + 1)! + 2,\ (k + 1)! + 3, \ldots, (k + 1)! + (k + 1)$$

în număr de $k$, sînt toate compuse.

Pentru a arăta a doua parte a afirmației din enunț, considerăm un $a \in \mathbb{N}^*$. Atunci, evident, numerele:

$$(ak + 1)! + 2,\ (ak + 1)! + 3, \ldots, (ak + 1)! + (k + 1)$$

sînt toate compuse. Cum există o infinitate de astfel de $a$, problema este rezolvată.

**II.91°.** Să se arate că ecuaţia:

$$x^2 + y^3 + z^4 = t^5$$

are o infinitate de soluţii în numere naturale.

**R.** Evident:

$$3^{24} + 3^{24} + 3^{24} = 3^{25}$$

deci:

$$(3^{12})^2 + (3^8)^3 + (3^6)^4 = (3^5)^5 \qquad (1)$$

astfel că ecuaţia din enunţ are o soluţie în numere naturale:

$$x = 3^{12}, \ y = 3^8, \ z = 3^6, \ t = 3^5.$$

Înmulţim acum (1) cu $u^{60}$, $u \in \mathbb{N}^*$, şi obţinem.

$$(u^{30} \cdot 3^{12})^2 + (u^{20} \cdot 3^8)^3 + (u^{15} \cdot 3^6)^4 = (u^{12} \cdot 3^5)^5$$

şi făcînd pe $u$ să parcurgă mulţimea numerelor naturale, obţinem afirmaţia enunţului.

**II.92°.** Să se arate că:

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} C_{n-k+1}^{k} = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$$

**R.** Să rezolvăm în prealabil următoarea problemă: fiind dată mulţimea $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, să se găsească numărul submulţimilor lui $X$ care are $k$ elemente şi nu conţin simultan doi întregi consecutivi.

Unei submulţimi $S$ a lui $X$ îi putem pune în corespundeţă un cuvînt $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ cu $\alpha_i=0$ dacă $i \notin S$ şi $\alpha_i = 1$ dacă $i \in S$. Acest cuvînt format numai cu simbolurile 0 şi 1 nu va conţine doi de 1 alăturaţi, din cauza restricţiei impuse mulţimii $S$ de a conţine nu doi întregi consecutivi.

Dar, la două submulţimi $S_1$ şi $S_2$ diferite ale lui $X$ le corespund două cuvinte diferite, în caz contrar ele sînt egale; rezultă că această aplicaţie, avînd în vedere că oricărui cuvînt $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ îi corespunde o submulţime $S$ a lui $X$ şi numai una şi reciproc, este o bijecţie astfel că vom număra aceste cuvinte deoarece două mulţimi între care putem stabili o bijecţie, au acelaşi cardinal.

Să considerăm $n-k$ cifre egale cu 0 şi numerotate de la 1 la $n-k$ şi să le adăugăm $k$ cifre egale cu 1 astfel încît să nu avem doi de 1 adiacenţi. Fiecare cifră de 1 poate fi caracterizată prin numărul de ordine al cifrei care o precede. Deci trebuie să alegem $k$ întregi din mulţimea $\{0, 1, \ldots, n-k\}$ ceea ce este posibil în $f(n, k) = C_{n-k+1}^{k}$ moduri.

Deci, numărul submulţimilor lui $X$ care nu conţin doi întregi consecutivi (inclusiv mulţimea vidă căreia îi corespunde cuvîntul $\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ de } 0}$) este egal cu:

$$F_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]_*} C_{n-k+1}^k$$

Ne-am oprit pentru indicele $k$ la valoarea $\left[\frac{n+1}{2}\right]_*$ deoarece pentru ca simbolul $C_{n-k+1}^k$ să existe, trebuie ca $n - k + 1 \geqslant k$ deci $k \leqslant \frac{n+1}{2}$ şi cum $k$ este natural, ultima valoare luată de $k$ este:

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]_*.$$

Calculînd cu formula stabilită, găsim că $F_0 = 1$, $F_1 = 2$, $F_2 = 3$, $F_3 = 5$, $F_4 = 8$, $F_5 = 13$ etc. Să arătăm că:

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$$

Să observăm că orice cuvînt de lungime $n$, format cu 0 şi 1 şi care nu conţine dei de 1 consecutivi sau are pe ultima poziţie pe 0 sau are pe ultimile două poziţii pe 0 şi 1, în această ordine — 01; cuvintele care rămîn după eliminarea terminaţiei 0, respectiv 01, au lungimile $n-1$, respectiv $n-2$ şi nu conţin doi de 1 consecutivi.

Deci există o bijecţie între cuvintele de lungime $n$ formate cu 0 şi 1 şi care nu conţin doi de 1 consecutivi şi reuniunea mulţimilor disjuncte formate cu cuvintele de lungime $n-1$ care nu conţin doi de 1 consecutivi (la care adăugăm pe poziţia $n$ un 0), respectiv din cuvintele de lungime $n-2$ care nu conţin doi de 1 consecutivi (la care adăugăm pe ultimele două poziţii cifrele 0 şi 1, în această ordine). Fie $A_{n-1}$, respectiv $A_{n-2}$ cele două mulţimi. Potrivit principiului includerii şi al excluderii:

$$|A_{n-1} \cup A_{n-2}| = |A_{n-1}| + |A_{n-2}|,$$

căci $A_{n-1} \cap A_{n-2} = \emptyset$; rezultă:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Soluţia ecuaţiei anterioare este:

$$F_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$$

unde $\lambda_1$, $\lambda_2$ sînt soluţiile ecuaţiei:

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

iar $c_1$ şi $c_2$ sînt constante complexe ce se determină din condiţiile:

$$F_0 = 1,\ F_1 = 2.$$

fapt ce se poate dovedi, de pildă, prin inducţie matematică.

Rezolvînd, se obţine:

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$c_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}; \quad c_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

deci:

$$F_n = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{-3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

şi egalînd cele două expresii ale lui $F_n$, se obţine tocmai egalitatea ce a făcut obiectul acestor discuţii.

**II.93°.** Care dintre numerele:

$21!$, $2541^7$

este mai mare?

**R.** Să Să arătăm, în prealabil, următoarea inegalitate (a lui CAUCHY) numită şi a mediilor:

dacă $x_1, \ldots, x_n > 0$, $n \geqslant 2$, atunci:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \tag{1}$$

cu egalitate cînd $x_1 = \ldots = x_n$.

Dăm acestei inegalităţi două soluţii.

Fie $x_1, x_2 > 0$. Atunci, evident:

$$(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2 \geqslant 0$$

deci:

$$\frac{x_1+x_2}{2} \geqslant \sqrt{x_1x_2} \tag{2}$$

astfel că inegalitatea mediilor este valabilă pentru $n = 2$. Fie în (2):

$$x_1 = \frac{a+b}{2}, \; x_2 = \frac{c+d}{2},$$

$a, b, c, d > 0$, astfel că are loc:

$$\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}} \geqslant \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$$

deci:

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd} \tag{4}$$

Egalitatea în (2) are evident loc atunci cînd $x_1 = x_2$ (căci $x_1 - x_2 = 0$ implică $x_1 = x_2$) deci egalitatea are loc în (3) atunci cînd:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{c+d}{2}, \ a = b, \ c = d$$

(adică atunci cînd $a = b = c = d$, relații ce se deduc respectiv din prima și a doua inegalitate din formula (3)).

Facem acum îm (4):

$$t = \frac{u+v+z}{3}$$

și obținem:

$$\frac{u+v+z+\dfrac{u+v+z}{3}}{4} \geqslant \sqrt[4]{uvz\left(\frac{u+v+z}{3}\right)}$$

sau:

$$\frac{u+v+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{uvz}.$$

Egalitate cînd:

$$u = v = z,$$

formulă compatibilă cu enunțul general.

Presupunem inegalitatea valabilă pentru $2^n$ numere:

$$x_1 x_2 \ldots x_{2^n} \geqslant \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{2^n}\right)^{2^n}$$

cu egalitate pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2^n}$. Este clar că:

$$(x_1 x_2 \ldots x_{2^n})(x_{2^n+1} \ldots x_{2^{n+1}}) \leqslant \left(\frac{x_1 + \ldots + x_{2^n}}{2^n}\right)^{2^n} \left(\frac{x_{2^n+1} + \ldots x_{2^{n+1}}}{2^n}\right)^{2^n} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{x_1 + \ldots + x_{2^{n+1}}}{2^n}\right)^{2^{n+1}}$$

cu egalitate atunci cînd $x_1 = \ldots = x_{2^n}$, $x_{2^n+1} = \ldots = x_{2^{n+1}}$,

$$\frac{x_1 + \ldots + x_{2^n}}{2^n} = \frac{x_{2^n+1} + \ldots + x_{2^{n+1}}}{2^n}$$

deci egalitatea pentru $x_1 = \ldots = x_{2^{n+1}}$.

În virtutea principiului inducției matematice, inegalitatea (1) este valabilă pentru orice $2^k$ numere, $k \in \mathbb{N}^*$, egalitatea avînd loc pentru $x_1 = \ldots = x_{2^k}$.

Pentru un $n$ oarecare luăm $k$ astfel încît:

$$2^{k-1} < n \leqslant 2^k$$

(un astfel de $k$ există, anume $k=[\log_2 n]_*$). Fie $x_1,\ldots,x_{2^k}$, $2^k$ numere reale pozitive. Cum:

$$\frac{x_1+\ldots+x_{2^k}}{2^k} \geqslant \sqrt[2^k]{x_1\ldots x_k}$$

făcînd:

$$x_{n+1}=\ldots=x_{2^k}=\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}=t$$

obţinem:

$$x_1x_2\ldots x_n t^{2^k-n} \leqslant \left[\frac{x_1+\ldots+x_n+(2^k-n)t}{2^k}\right]^{2^k}=t^{2^k}$$

şi, de aici:

$$x_1x_2\ldots x_n \leqslant t^n=\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^n$$

Egalitatea are loc pentru $x_1=\ldots=x_n$.

Să dăm şi *a doua soluţie*. Oricare ar fi $x>0$ şi $n\in\mathbb{N}^*$, are loc inegalitatea:

$$(n-1)x^n+1\geqslant nx^n.$$

În adevăr, inegalitatea de mai sus se scrie:

$$nx^{n-1}(x-1)\geqslant x^n-1=(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)(x-1)$$

sau:

$$nx^{n-1}\geqslant x^{n-1}+\ldots+1,\ \text{pentru } x\geqslant 1$$

şi:

$$nx^{n-1}\leqslant x^{n-1}+\ldots+1,\ \text{pentru } x\leqslant 1.$$

Dacă $x>1$, evident:

$$x^{n-1}>x^i,\ i=\overline{0,n-2}$$

deci:

$$nx^{n-1}\geqslant x^{n-1}+\ldots+1.$$

Dacă $x=1$, are loc egalitatea, singurul caz cînd se întîmplă un asemenea caz. Pentru $x<1$:

$$x^{n-1}<x^i,\ i=\overline{0,n-2}$$

adică:

$$nx^{n-1}<x^{n-1}+\ldots+1$$

deci inegalitatea este adevărată pentru orice $x\in(0,+\infty)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Pentru două variabile am văzut anterior că inegalitatea mediilor este verificată, cu egalitate cînd numerele sînt egale.

Raționăm tot prin inducție. Presupunem pentru un $k$ oarecare, $k \geqslant 3$:

$$x_1+\ldots+x_{k-1} \geqslant (k-1)\sqrt[k-1]{x_1\ldots x_{k-1}}$$

cu egalitate pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_{k-1}$.

Adunînd ambilor membrii pe $x_k$, obținem:

$$x_1+\ldots+x_{k-1}+x_k \geqslant (k-1)(x_1\ldots x_{k-1})^{\frac{1}{k-1}} + x_k \tag{5}$$

iar în inegalitatea:

$$(n-1)x^n + 1 \geqslant nx^{n-1}$$

înlocuim pe $n$ prin $k$ și $x$ prin:

$$x = \left(\frac{x_1\ldots x_{k-1}}{x_k^{k-1}}\right)^{\frac{1}{k(k-1)}}$$

astfel că:

$$1 + (k-1)(x_1\ldots x_{k-1})^{\frac{1}{k-1}} \cdot \frac{1}{x_k} \geqslant k(x_1\ldots x_k)^{\frac{1}{k}} \cdot \frac{1}{x_k}$$

adică, altfel scris:

$$(k-1)(x_1\ldots x_{k-1})^{\frac{1}{k-1}} + x_k \geqslant k(x_1x_2\ldots x_k)^{\frac{1}{k}}$$

sau, avînd în vedere (5):

$$x_1 + x_2+\ldots+x_{k-1} + x_k \geqslant (k-1)(x_1\ldots x_{k-1})^{\frac{1}{k-1}} + x_k \geqslant k(x_1x_2\ldots x_k)^{\frac{1}{k}}$$

deci:

$$x_1 + x_2+\ldots+x_k \geqslant k\sqrt[k]{x_1\ldots x_k}$$

Egalitate pentru:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{k-1}, \quad \frac{x_1\ldots x_{k-1}}{x_k^{k-1}} = 1$$

deci pentru $x_1 = \ldots = x_k$.

Potrivit inegalității demonstrate anterior:

$$1^3 + 2^3 +\ldots+n^3 > n\sqrt[n]{(n!)^3}$$

și cum:

$$1^3 + 2^3+\ldots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

se obține:

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} \geqslant n\sqrt[n]{(n!)^3}$$

adică:

$$\left[\frac{n(n+1)^2}{4}\right]^{\frac{n}{3}} \geqslant n!$$

şi pentru $n = 21$ obţinem:

$2541^7 > 21!$

deci al doilea număr este mai mare (egalitate nu putem avea).

**II.94°.** Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi fie:

$$\begin{array}{l} a_{11}, \ldots, a_{1n}, \\ a_{21}, \ldots, a_{2n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}, \ldots, a_{nn} \end{array}$$

$n^2$ numere pozitive care au următoarea proprietate: dacă $a_{ij} = 0$, atunci pentru acest $i$ şi acest $j$ are loc:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + a_{kj}) \geqslant n.$$

Să se arate că:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \geqslant \frac{n^2}{2}.$$

**R.** *Soluţia întîi.*

Dispunem numerele $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{nn}$ într-un tablou astfel:

$$\|a_{ij}\| = \left\| \begin{array}{l} a_{11} \ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ldots a_{2n} \\ a_{n1} \ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{array} \right\|$$

Observăm că proprietatea tabloului rămîne invariantă la permutări reciproce de două linii sau coloane. În adevăr, asemenea permutări fac să corespundă unui element $a_{ij}$ mereu aceleaşi elemente aflate iniţial pe linia $i$ şi coloana $j$, doar locurile lor în tablou apar schimbate.

Folosind proprietatea enunţată anterior, transformăm tabloul în forme echivalente, aducînd în poziţiile $a_{11}, a_{22}, \ldots$ zerouri..

Fie $k$ numărul maxim de zerouri ce pot apărea pe diagonală iar $\|b_{ij}\|$ tabloul care le conţine şi care s-a obţinut din tabloul iniţial $\|a_{ij}\|$.

Deci:

$$b_{11} = b_{22} = \ldots = b_{kk} = 0.$$

Sînt de studiat două cazuri:

a°). $k = n$

şi

b°). $k \neq n$.

Ne situăm în cazul a°). Cînd $k = n$, obţinem că pentru orice $i \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant i \leqslant n$, din $b_{i.} = 0$, rezultă, conform enunţului:

$$b_{1i} + b_{2i} + \ldots + b_{ni} + b_{i1} + \ldots + b_{in} \geqslant n$$

aşa, încît, adunînd toate aceste inegalităţi, în număr de $n$, găsim:

$$2\,\Sigma b_{ij} \geqslant n^2$$

adică, în fond:

$$\Sigma a_{ij} \geqslant \frac{n^2}{2},$$

adică tocmai ceea ce cerea enunţul.

Să studiem şi cazul cînd $k \neq n$.

Împărţim tabloul în patru grupe, $G_1, G_2, G_3, G_4$, conţinînd fiecare dintre ele elemente ale tabloului (eventual chiar nici unul) în modul următor:

în $G_1$ elementele $b_{ij}$ cu $1 \leqslant i \leqslant k$; $1 \leqslant j \leqslant k$;

în $G_2$ elementele $b_{ij}$ cu $1 + k \leqslant i \leqslant n$; $1 \leqslant j \leqslant k$;

în $G_3$ elementele $b_{ij}$ cu $1 \leqslant i \leqslant k$; $1 + k \leqslant j \leqslant n$;

în $G_4$ elementele $b_{ij}$ cu $1 + k \leqslant i \leqslant n$; $k + 1 \leqslant j \leqslant n$.

Fie $S_i$ suma elementelor din $G_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Sînt posibile cazurile, în ipoteza că nu pot fi aduse mai mult de $k$ zerouri pe diagonală:

1°). $G_4$ nu conţine zerouri.

2°). Dacă $b_{ij} \in G_2$ atunci $b_{ij} \in G_3$ şi $b_{ij} + b_{ji} \geqslant 1$.

În adevăr, dacă $b_{ij} \in G_4$ şi $b_{ij} = 0$, păstrînd neschimbate zerourile din $G_1$, aducem $b_{ij}$ în locul lui $b_{k+1,k+1}$ şi apare $b_{k+1,k+1} = 0$, absurd.

Acum, dacă 2°) nu ar fi adevărată, ar trebui ca $b_{ij} = b_{ji} = 0$, absurd, căci fie $b_{ij} = 0$ şi atunci permutăm coloanele $i$ şi $j$, păstrînd zeroul pe poziţia $b_{ii}$ şi introducem pe $b_{ij}$ în $G_4$ care nu poate avea zerouri, deci 2°) este demonstrată.

În felul acesta:

$$2S_1 + S_2 + S_3 \geqslant kn. \tag{1}$$

Prin adunarea celor $2k(n - k)$ elemente din $G_2$ şi $G_3$, grupînd şi aplicînd 2°), obţinem:

$$S_2 + S_3 \geqslant k(n - k) \tag{2}$$

În sfîrşit, $G_4$ are $(n - k)^2$ elemente nenule, deci:

$$S_4 \geqslant (n - k)^2$$

sau, altfel scris:

$$2S_4 \geqslant 2(n - k)^2. \tag{2}$$

Adunînd (1), (2), şi (3) obţinem:

$$2(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) \geqslant n^2 + (n - k)^2$$

deoarece $n \neq k$, rezultă:

$$2\Sigma a_{ij} > n^2$$

de unde afirmaţia făcută în enunţ.

*Soluția a doua.* Fie $\{i_1,\ldots,i_n\}$ și $\{j_1,\ldots,j_n\}$ cîte o permutare a lui $\{1,\ldots,n\}$. Atunci $a_{i_1j_1},\ldots,a_{i_nj_n}$ sînt elemente ale matricii (tabloului scris în prima soluție) date, luînd de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană cîte un element și numai unul singur.

Dacă $a_{i_rj_s}=0$ și $a_{i_sj_r}=0$, $r\neq s$, atunci, înlocuindu-l pe $a_{i_rj_s}$ cu $a_{i_rj_r}$, iar pe $a_{i_sj_s}$ cu $a_{i_sj_r}$ și punînd $h_u=j_u$ dacă $u\neq r$, $u\neq s$, $h_r=j_s$, $h_s=j_r$, atunci $\{h_1,\ldots,h_n\}$ este tot o permutare a mulțimii $\{1,\ldots,n\}$ și obținem că $a_{i_1h_1},\ldots,a_{i_nh_n}$ sînt elemente ale matricii date astfel încît de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană este luat cîte un element și numai unul singur iar pentru fiecare $a_{i_rj_r}\neq 0$ avem sau $a_{i_rj_s}\neq 0$ sau $a_{i_sj_r}\neq 0$ oricare ar fi $s$, $s\neq r$.

Dar atunci:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij_t}+\sum_{j=1}^{n} a_{i_tj}\geqslant n,$$

dacă $a_{i_tj_t}=0$ conform ipotezei, iar dacă $a_{i_tj_t}\neq 0$, aceasta din cauză că $a_{ij_t}\neq 0$ sau $a_{i_tj}=0$ oricare ar fi $i\neq j_t$, $j\neq i_t$ datorită proprietății pe care o are $a_{i_1j_1},\ldots,a_{i_nj_n}$.

Deci:

$$2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i_tj}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=\sum_{j_t=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij_t}+\sum_{i_t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i_tj}=$$

$$=\sum_{t=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij_t}+\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i_tj}=\sum_{t=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij_t}+\sum_{j=1}^{n} a_{i_tj}\right)\geqslant\sum_{t=1}^{n} n=n^2$$

astfel că:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\geqslant\frac{n^2}{2}.$$

**II.95°.** Să se arate că din oricare zece numere naturale de cîte două cifre (scrise în baza zece) se pot extrage două grupuri diferite, disjuncte, nevide, astfel ca suma numerelor din fiecare grup să fie aceași.

**R.** Cu 10 numere se pot forma:

$$C_{10}^1+C_{10}^2+\ldots+C_{10}^{10}=2^{10}-1=1023$$

grupe distincte. Întrucît se cere ca grupul fără nici un element să nu fie considerat, este necesar ca nici grupul care conține toate cele 10 numere să nu fie considerat deci, în total va trebui să considerăm 1022 de grupe. Întrucît numerele sînt de două cifre, sumele numerelor din grupele formate sînt oricum mai mari sau egale cu 10 și mai mici sau egale cu:

$$99+98+\ldots+91=855.$$

Cum există 1022 de grupe avînd sumele mărginite de 10 și 855, există în mod necesar grupe cu sume egale (principiul lui Dirichlet) căci, altfel, presupunînd că sumele sînt distincte, ar trebui să existe grupe cu sume mai mari ca 855. Cum grupele sînt distincte, dacă nu sînt disjuncte se scot părțile lor comune și se obțin grupe de tipul cerut.

**II. 96°.** Să se arate că ecuația:

$$x^2+x-2y^2=0$$

are o infinitate de soluţii în numere naturale.

Să se găsească aceste soluţii.

R: Pentru prima parte a problemei dăm două soluţii. Fie $k \in \mathbb{N}^*$ fixat şi să considerăm numerele de forma:

$$\tau_n = \frac{n(n+1)}{k}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Să presupunem că, pentru un anumit $n$, numărul $\tau_n$ este natural şi, mai mult decît atît, este un pătrat perfect; fie $\tau_n = q^2$, cu $q \in \mathbb{N}^*$. Vom arăta că numărul $\tau_{4k\tau_n}$ este, de asemenea, un pătrat perfect. În adevăr:

$$\tau_{4k\tau_n} = \frac{4k\tau_n(4k\tau_n + 1)}{k} = 4\tau_n\left[4k\frac{n(n+1)}{k} + 1\right] = [2q(2n+1)]^2.$$

Rezultă deci că dacă $\tau_p$ este un pătrat perfect, atunci şirul de numere $\{_1\tau_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ definit recursiv prin:

$$_1\tau_0 = \tau_n, \quad _1\tau_p = \tau_{4k\tau_{p-1}}$$

care este un subşir al şirului $\}\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ este format numai din pătrate perfecte diferite între ele. În particular, pentru $k = 2$, şirul $\{_1\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ coincide cu şirul numerelor triunghiulare şi, evident, $t_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ este întotdeauna număr natural pentru $n \in \mathbb{N}$ şi cum, în acest caz, $t_1 = 1$ este pătrat perfect, rezultă că şirul $\{\tau_{4\tau_n}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ corespunzător este format numai din pătrate perfecte. Deci ecuaţia:

$$x^2 + x - 2y^2 = 1$$

are o infinitate de soluţii în numere naturale.

Dăm acum a doua rezolvare în care stabilim şi forma soluţiilor. Să considerăm aşadar ecuaţia:

$$x^2 + x - 2y^2 = 0.$$

Să observăm că $x = y = 1$ (cazul $x = y = 0$ este evident) este o soluţie şi, încă, dacă $(x_n, y_n)$ este o soluţie, atunci cuplul $(x_{n+1}, y_{n+1})$ definit prin:

$$x_{n+1} = 3x_n + 4y_n + 1,$$
$$y_{n+1} = 2x_n + 3y_n + 1$$

este încă o soluţie, căci:

$$x_{n+1}^2 + x_{n+1} - 2y_{n+1}^2 = (3x_n - 4y_n + 1)(3x_n + 4y_n + 2) - $$
$$- 2(2x_n + 3y_n + 1)^2 = x_n^2 + x_n - 2y_n^2$$

Să admitem acum că $(x, y)$ este o soluţie în numere naturale a ecuaţiei:

$$x^2 + x - 2y^2 = 0 \tag{1}$$

şi $x > 1$ deci, după cum imediat rezultă din (1), $y > 1$. Să arătăm că, în acest caz:

$$3x - 4y + 1 > 0, \; 3y - 2x - 1 > 0, \; 2x - 4y + 1 < 0.$$

Dacă $4y \geqslant 3x + 1$, am avea $16y^2 \geqslant 9x^2 + 6x + 1$; deoarece însă, potrivit relaţiei (1):

$$16y^2 = 8x^2 + 8x$$

ar rezulta:

$$8x^2 + 8x \geqslant 9x^2 + 6x + 1$$

adică $(x - 1)^2 \leqslant 0$ deci $x = 1$, contrar ipotezei. Prima inegalitate este în acest fel stabilită.

Dacă $3y \leqslant 2x + 1$ atunci ar avea loc:

$$9y^2 \leqslant 4x^2 + 4x + 1$$

şi cum, potrivit relaţiei (1):

$$4x^2 + 4x = 8y^2$$

ar rezulta $y^2 \leqslant 1$ deci $y = 1$, absurd căci, prin ipoteză, $x > 1$ a implicat $y > 1$. Rezultă, în definitiv, şi a doua relaţie (2) şi deoarece:

$$2x - 4y + 1 < 2x - 3y + 1 < 0,$$

rezultă şi a treia relaţie.

Fie acum:

$$\xi = 3x - 4y + 1,$$
$$\eta = 3y - 2x - 1, \tag{3}$$

$x$ şi $y$ fiind soluţii ale ecuaţiei (1) în baza celor demonstrate anterior $\xi, \eta \in \mathbb{N}$ şi $\xi - x = 2x - 4y + 1 < 0$, deci $\xi < x$. Avînd în vedere egalităţile (3), obţinem:

$$\xi^2 + \xi - 2\eta^2 = (3x - 4y + 1)(3x - 4y + 2) - 2(3y - 2x - 1)^2 =$$
$$= x^2 + x - 2y^2$$

şi ţinînd seama de (1), rezultă:

$$\xi^2 + \xi - 2\eta^2 = 0$$

ceea ce arată că dacă $(x, y)$ satisface (1), atunci şi $(\xi, \eta)$ satisface ecuaţia (1).

Fie, în continuare:

$$g(x, y) = (3x - 4y + 1, \; 3y - 2x - 1) \tag{4}$$

adică fiecărui punct $(x, y)$ din sistemul rectangular $xOy$ îi facem să-i corespundă un punct $P(\xi, \eta)$ din plan, cu coordonatele date de (3). Astfel dacă $(x, y)$ este o soluţie în numere naturale a ecuaţiei (1), cu $x > 1$, atunci $(\xi, \eta) = g(x, y)$ este, de asemenea, o soluţie în numere naturale a ecuaţiei (1), cu $\xi < x$. Dacă $\xi > 1$, procedînd analog, pornind de la soluţia $(\xi, \eta)$, obținem o nouă soluție în numere naturale $(\xi_1, \eta_1) = g(\xi, \eta) = g(g(x,y)) \overset{\text{not}}{=}$ $g_2(x, y)$, în care $\xi_1 < \xi$. Astfel, cu notația $g_{k+1}(x, y) = g(g_k(x, y))$, obținem un șir de soluții ale ecuației (1):

$$g(x, y),\ g_2(x, y),\ g_3(x, y), \ldots$$

în numere naturale din ce în ce mai mici. Deoarece șirul numerelor naturale mai mici decît un număr oarecare $t$ (șirul este presupus strict descrescător) nu poate fi infinit, rezultă că pentru un anumit număr natural $n$ ajungem la $(u, v) = g_n(x, y)$ cu $u = 1$, $v = 1$ deci, la soluția $(u, v) = (1, 1)$.

Astfel, dacă $(x, y)$ este o soluție arbitrară în numere naturale a ecuației (1), unde $x > 1$, atunci există un număr natural $n$ așa ca $g_n(x, y) = (1, 1)$

Să luăm în continuare:

$$f(x, y) = (3x + 4y + 1,\ 2x + 3y + 1);$$

obținem:

$$f(g(x, y)) = (3(3x - 4y + 1) + (4(3y - 2x - 1) + 1,\ 2(3x - 4y + 1) + 3(3y - 2x - 1) + 1) = (x, y)$$

de unde, prin inducție:

$$f_n(g_n(x, y)) = (x, y),\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*,$$

în care $f_n$ s-a obținut analog ca $g_n$.

Rezultă că, în definitiv, potrivit observației anterioare:

$$(x, y) = f_n(1, 1).$$

Pe de altă parte, dacă luăm:

$$u = 3x + 4y + 1,\quad v = 2x + 3y + 1 \tag{6}$$

atunci, cum:

$$u^2 + u - 2v^2 = x^2 + x - 2y^2$$

rezultă că dacă $(x, y)$ este soluție în numere naturale a ecuației (1), atunci $(u, v) = f(x, y)$ este, de asemenea, o soluție în numere naturale a ecuației (1), respectiv formată din numere mai mari decît $x$ și $y$, în virtutea relației (6).

Rezultă, în definitiv, că toate soluțiile $(x, y)$ în numere naturale ale ecuației (1) și numai soluțiile de acest gen se găsesc în șirul infinit:

$$(1, 1),\ f(1, 1),\ f(f(1, 1)),\ f(f(f(1, 1))), \ldots$$

Dacă luăm $x_1 = y_1 = 1$, $(x_n, y_n) = f_{n+1}(1, 1)$ pentru $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, obținem:

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n, y_n),\ (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

deci, conform cu (6), au loc formulele:

$$x_{n+1} = 3x_n + 4y_n + 1,$$

$$y_{n+1} = 2x_n + 3y_n + 1 \tag{7}$$

pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Aşadar, toate soluţiile în numere naturale ale ecuaţiei (1) se găsesc în şirul infinit $(x_n, y_n)$ pentru $n \in \mathbb{N}^*$, în care $x_1 = y = 1$.

Înmulţind prima relaţie (7) cu 2 iar a doua cu $-3$ şi adunînd, obţinem :

$$2x_{n+1} - 3y_{n+1} = - y_n - 1, (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$$

de unde, cu o modificare de indici (cu $n \geqslant 2$) :

$$2x_n = 3y_n - y_{n-1} - 3 \tag{8}$$

astfel că din a doua relaţie (7) :

$$y_{n+1} = 6y_n - y_{n-1},\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^* - \{1\},$$

sau, altfel scris :

$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + y_n = 0,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Dar $y_1 = 1$, $y_2 = 6$ astfel că :

$$y_n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}},\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*,$$

lucru ce se poate demonstra prin inducţie, sau, observînd că dacă, mai general, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, şirul $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ verifică relaţia :

$$\alpha u_{n+2} + \beta u_{n+1} + \gamma u_n = 0k\ \ \beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0$$

atunci $u_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ constituie soluţie, unde $\lambda_1$, $\lambda_2$ sînt soluţiile ecuaţiei (distincte, în virtutea condiţiei) :

$$\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0$$

iar $C_1$, $C_2$ constante ce pot fi determinate cunoscînd doi termeni ai şirului $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$

Din (8) scoatem pe $x_n$ :

$$x_n = 3\,\frac{(3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n}{8\sqrt{2}} - \frac{(3 + 2\sqrt{2})^{n-1}}{8\sqrt{2}} + \frac{(3 - 2\sqrt{2})^{n-1}}{8\sqrt{2}} - $$
$$-\frac{1}{2},\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*,$$

şi, în adevăr, pentru $n = 1$ rezultă imediat că $x_1 = 1$.

**II.97°.** Fie $p$, $q$, $r$ trei polinoame cu coeficienţi întregi, satisfăcînd relaţia :

$$[p(x)]^4 + [q(x)]^4 = [r(x)]^4,\ (\forall)\ x \in \mathbb{Z}.$$

Să se arate în acest caz că :

$$p \equiv \varepsilon r,\ q \equiv 0$$

sau

$$q \equiv \varepsilon r,\ p \equiv 0,$$

unde $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

**R.** Fie ecuaţia:

$$x^4 + y^4 = z^4 \tag{1}$$

Să arătăm că această ecuaţie nu admite soluţii în numere întregi nenule.

Dacă demonstrăm că ecuaţia:

$$x^4 + y^4 = z^2 \tag{2}$$

nu admite soluţii în numere întregi, atunci implicit, nici ecuaţia dată nu admite astfel de soluţii.

Admitem, prin absurd, că ecuaţia (1) ar avea o astfel de soluţie. Putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că $x, y, z > 0$ (deoarece pătratul oricărui număr negativ este un număr pozitiv) şi $(x, y)_* = (y, z)_* = (z, x)_* = 1$. Din:

$$x^4 = (z - y^2)(z + y^2)$$

factorii fiind primi între ei, deducem:

$$z - y^2 = u^4; \quad z + y^2 = v^4$$

unde $(u, v)_* = 1$ şi $uv = x$. Rezultă de aici:

$$2y^2 = v^4 - u^4 = (v^2 + u^2)(v^2 - u^2), \quad 2z = u^4 + v^4.$$

Asenănător ca mai sus, obţinem:

$$u^2 + v^2 = 2s^2$$

$$v^2 - u^2 = 4t^2$$

cu $s, t > 0$, $(s, t)_* = 1$, $y = 2st$.

Din a doua ecuaţia deducem:

$$u + v = 2a^2$$

$$v - u = 2b^2$$

$$t = ab$$

cu $a, b > 0$, $(a, b)_* = 1$ deci $u = a^2 - b^2$, $v = a^2 + b^2$. Introducînd aceste valori în $u^2 + v^2 = 2s^2$ găsim o nouă ecuaţie de tipul (2):

$$a^4 + b^4 = s^2$$

unde $a, b > 0$ şi:

$$z = a^8 + 6a^4b^4 + b^8 = s^4 + 4a^4b^4 > s^4 \geqslant s > 0.$$

Noii ecuaţii îi putem aplica acelaşi procedeu şi, repetînd, obţinem un şir de ecuaţii de tipul (2) ale căror numere $z$ formează un şir infinit descrescător de numere întregi pozitive, lucru evident absurd.

Rezultă, în definitiv, că ecuaţia (2) nu admite soluţii în numere naturale, nenule, şi, implicit, ecuaţia (1) are aceeaşi proprietate.

Revenind la problema formulată în enunţ, vom observa mai întîi că dacă polinomul $r$ are gradul $n$ atunci cel puţin unul dintre polinoamele $p$ şi $q$ are gradul $n$, iar celălalt are gradul mai mic sau egal cu $n$.

Fie grad $p = n$ iar grad $q = m \leqslant n$.

Dacă $a \in \mathbb{Z}$ atunci, evident, $p(a)$, $q(a)$, $r(a) \in \mathbb{Z}$ şi cum:

$$p^4(x) + q^4(x) = r^4(x), \ (\forall) \ x \in \mathbb{Z}$$

rezultă, în baza discuţiei făcută asupra ecuaţiei (1), $p(a) = 0$ sau $q(a) = 0$, deci $a$ este sau rădăcină a lui $p$ sau a lui $q$.

Vom alege atunci $m + n + 1$ numere distincte. Din cele de mai sus rezultă că sau $p(a_k) = 0$ sau $q(a_k) = 0$ pentru orice $a_k(k = 1,2,\ldots,m + n + 1)$.

Rezultă cu necesitate una din următoarele situaţii:

(i) Cel puţin $n + 1$ dintre numerele $a_k$ sînt rădăcini ale polinomului $p$;

(ii) Cel puţin $m + 1$ dintre numerele $a$ sînt rădăcini ale polinomului $q$.

Din situaţia (i) rezultă $p = 0$ iar din (ii), $q = 0$ deci enunţul ($a^4 = b^4$ implică — în ipoteza că $a, b \in \mathbb{R}$ — sau $a = b$ sau $a = -b$).

**II.98°.** Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Dacă ecuaţia lui Pell:

$$x^2 - ky^2 = 1.$$

admite o soluţie particulară $(x_0, y_0)$ în numere naturale, atunci ea admite o infinitate de astfel de soluţii.

**R.** Continumă raţionamentul făcut în prima soluţie a problemei II.96. Dacă pentru un anumit $n$, $\tau_n = q^2$, $q \in \mathbb{N}$, vom obţine deci:

$$\frac{n(n+1)}{k} = q^2$$

adică:

$$(2n + 1)^2 - k(2q)^2 = 1.$$

Urmează că $x_0 = 2n + 1$, $y_0 = 2\sqrt{\tau_n}$ este o soluţie particulară a ecuaţiei lui Pell. Rezultă atunci, din cele demonstrate la 1.25, că putem genera o infinitate de soluţii ale ecuaţiei, cu ajutorul şirului $\{{}_1\tau_p\}_{p \in \mathbb{N}^*}$ şi anume:

$$x_p = 8k\,{}_1\tau_p + 1,$$

$$y_p = 2\sqrt{{}_1\tau_p}.$$

**II.99°.** Să se arate că şirul $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin relaţia:

$$a_n = 2^n - 3,$$

conţine o submulţime infinită în care oricare două elemente sînt prime între ele.

**R.** *Soluţia întîi.* Să arătăm pentru început că pentru orice $M \in \mathbb{N}^*$ impar, există $n \in \mathbb{N}$ astfel că $(2^n - 3, M)_* = 1$. Pentru aceasta luăm $n = \varphi(M)$, $\varphi$ fiind funcţia lui Euler; cum $2^{\varphi(M)} - 1 \vdots M$ (deoarece $(2, M)_* = 1$), obţinem că există $k_1 \in \mathbb{N}$ aşa ca:

$$2^{\varphi(M)} - 1 = k_1 M.$$

Rezultă de aici că $(2^{\varphi(M)} - 3, M)_* = 1$ deoarece dacă $d | M$ şi $d | 2^{\varphi(M)} - 3 = k_1 M - 2$ avem $d | 2$ deci $d = 1$ (căci $M$ este presupus impar).

Fie:

$$t_k = 2^k - 3,\ k = 2,3,\ldots$$

Evident $(t_3, t_4)_* = (t_3, t_5)_* = (t_4, t_5)_* = 1$. Raționăm prin inducție matematică după numărul termenilor $t_k$. Presupunem în acest sens că există $t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_k}$ astfel ca $(t_a, t_b)_* = 1$, oricare ar fi $a, b \in \{i_1, \ldots, i_k\}$, $a \neq b$ (pentru $k = 3$ am văzut că există astfel de termeni, anume $t_3$, $t_4$, $t_5$, luînd deci $i_1 = 3$, $i_2 = 4$, $i_3 = 5$). Să construim pe $t_{i_{k+1}}$.

Fie $M = t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_k}$. Potrivit celor demonstrate anterior, pentru $n = \varphi(M)$ are loc $(M, 2^n - 3)_* = 1$. Alegem atunci $t_{i_{k+1}} = 2^{\varphi(M)} - 3$.

Evident că $(t_{i_j}, t_{i_{k+1}}) = 1$, $(\forall)\, j \in \{1, \ldots, k\}$, deoarece dacă presupunem că există $d \in \mathbb{N}$ așa încît $d | t_{i_j}$, $d | t_{i_{k+1}}$ pentru un anumit $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, rezultă $d | M$ și $d | 2^{\varphi(M)} - 3$ deci, conform cu cele demonstrate anterior, $d = 1$.

Așadar, potrivit principiului inducției matematice, putem construi șirul infinit $t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_k}, \ldots$, cu $(t_{i_q}, t_{i_p})_* = 1$ pentru $p = q$.

*Soluția a doua.* Fie $u_k$ un termen oarecare al șirului $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ definit prin relația:

$$u_k = 2^k - 3 = 2^k - 2 - 1.$$

Dacă $p_i$ este un factor prim al lui $u_k$, evident $p_i \neq 2$. Fie $p_{i_1}^{\alpha_1} \ldots p_{i_n}^{\alpha_n}$ $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $(\forall)\ i \in \overline{1, n}$ descompunerea canonică a lui $u_k$ în factori primi ($p_{i_j}$ reprezintă, conform convențiilor, al $i_j$-lea număr prim).

Numărul:

$$N_1 = 2^{(p_{i_1}-1)(p_{i_2}-1)\ldots(p_{i_n}-1)} - 1 - 2$$

face, evident, parte din șirul considerat, $\{2^n - 3\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ fiind de forma $2^x - 3$. Deoarece, potrivit teoremei lui Fremat, $p_{i_j}$ divide pe $2^{p_{i_j}-1} - 1$ (căci $(p_{i_j}, 2)_* = 1$), pentru orice $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ și cum, încă:

$$2^{(p_{i_1}-1)\ldots(p_{i_n}-1)} - 1$$

se divide prin $2^{p_{i_j}-1} - 1$, deducem că $u_k$ și $N_1$ sînt prime între ele, eventualul lor factor comun trebuind să-l dividă pe 2, lucru evident absurd (căci $u_k = 2^k - 3$ și $N_1 = 2^{(p_{i_1}-1)\ldots(p_{i_n}-1)} - 3$).

Fie încă $p_{j_1}^{\beta_1}, p_{j_2}^{\beta_2} \ldots p_{j_m}^{\beta_m}$ descompunerea în factori primi a numărului $N_1$. Considerăm numărul:

$$N_2 = 2^{(p_{j_1}-1)(p_{j_2}-1)\ldots(p_{j_m}-1)} - 3$$

aparținînd șirului $\{2^n - 3\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. Acest număr este prim atîtcu $N_0 = u_k$, cît și cu $N_1$ din motive analoage celor expuse anterior.

Continuînd raționamentul expus mai sus, obținem un șir infinit de numere de forma $2^n - 3$), prime între ele două cîte două.

*Observație.* 1°) Procedeul indicat permite următoarea generalizare: șirul $\{a^n - a - 1\}_{n \in \mathbb{N}}, a \in \mathbb{N}^*$, $a > 1$ conține cel puțin un subșir infinit de numere, prime două cîte două.

2°). Enunțul se poate demonstra și prin reducerea la absurd.

**II.100°.** Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(25^n-1)(5a+b)}{24\cdot 5^k}\right]_* = \frac{(25^n-1)\ (5a+b)\ -24n(a+b)}{96}$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $a$, $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

**R.** Fie $m \in \mathbb{N}$ şi $p < m$ un număr prim. Să calculăm în prealabil exponentul la care figurează $p$ în descompunerea canonică a lui $m!$ (de exemplu, pentru $m = 4$, $p = 2$, avem $m! = 4! = 24 = 2^3\cdot 3$, deci exponentul la care figurează 2 în descompunerea canonică a lui $4!$ este 3). O vom face în două moduri.

Pe de o parte, acest exponent este egal cu:

$$S_p^m = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{m}{p^k}\right]_*. \qquad (1)$$

În adevăr, în $m!$ intră produsul:

$$p\times(2\times p)\times(3\times p)\times\ldots\times\left(\left[\frac{m}{p}\right]_*\times p\right)=\left[\frac{m}{p}\right]_*!\times p^{\left[\frac{m}{p}\right]_*},$$

deoarece între numerele $1, 2, \ldots, m$ există $\left[\frac{m}{p}\right]_*$ numere care se divid prin $p$. Aşadar, $m!$ se divide cu:

$$p^{\left[\frac{m}{p}\right]_*}$$

dar şi cu acea putere a lui $p$ care intră în produsul $\left[\frac{m}{p}\right]_*$ adică cu:

$$p\times(2\times p)\times\ldots\times\left[\left(\left[\frac{\left[\frac{m}{p}\right]_*}{p}\right]_*\right)\times p\right]=\left[\frac{m}{p^2}\right]_*!\times p^{\left[\frac{m}{p^2}\right]_*}$$

deoarece:

$$\left[\frac{\left[\frac{m}{p}\right]_*}{p}\right]_*=\left[\frac{m}{p^2}\right]_*.$$

Continuăm astfel pînă ajungem la exponentul $s$ cu proprietatea:

$$p^s \leqslant m < p^{s+1}$$

(este clar că $\left[\frac{m}{p^k}\right]_* = 0$ pentru orice $k$ pentru care $p^k > m$) deci exponentul lui $p$ în $m!$ este:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{m}{p^k}\right]_*$$

nu are importanță dacă variabila $k$ ia toate valorile naturale întrucît, potrivit observației anterioare, numărul termenilor nenuli din suma anterioară este finit).

Un alt mod de a determina pe $S_p$ se bazează pe algoritmul lui EUCLID. Are loc:

$$\begin{aligned} m &= pq_1 + r_1 \ (0 \leqslant r_1 < p) \\ q_1 &= pq_2 + r_2 \ (0 \leqslant r_2 < p) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_{k-1} &= pq_k + r_k \ (0 \leqslant r < p) \end{aligned} \tag{2}$$

pînă ajungem la $q_k = 0$.

De aici:

$$\frac{m}{p} = q_1 + \frac{r_1}{p}$$

deci $q_1 = \left[\frac{m}{p}\right]_*$ și încă:

$$q_k = \left[\frac{m}{p^2}\right], \ (\forall) \ k \in \mathbb{N}$$

astfel că $q_1 = \left[\frac{m}{p}\right]_*$, $q_2 = \left[\frac{m}{p^2}\right]_*$, $q_3 = \left[\frac{m}{p^3}\right]_*$ ș.a.m.d. Exponentul căutat este deci dat de:

$$S_p = q_1 + q_2 + \dots + q_k.$$

Resturile $r_1, r_2, \dots, r_k$ în ordine inversă sînt tocmai cifrele lui $m$, dacă $m$ este scris în baza $p$ și aceasta rezultă din faptul că dacă între ecuațiile (2) eliminăm pe $q_1, \dots, q_k$, obținem:

$$m = p^{k-1} r_k + \dots + r_1.$$

Fie:

$$x = r_1 + r_2 + \dots + r_k.$$

Dacă adunăm egalitățile (2), folosind notațiile de mai sus, găsim:

$$m + S_p = pS_p + x$$

de unde:

$$S_p = \frac{m - x}{p - 1}$$

adică tocmai teorema lui LEGENDRE.

Revenind la problema pusă în enunț, să calculăm în cele două moduri exponentul lui 5 în produsul:

$$\left[\frac{(b + 5a)(25^n - 1)}{24}\right]!$$

Se observă că:

$$\frac{(b + 5a)(25^n - 1)}{24} = \overline{ab\,ab \dots ab}_{(5)}$$

atît $a$ cît şi $b$ repetîndu-se de $n$ ori. Potrivit celor două formule găsite, exponentul lui 5 căutat este:

$$\frac{\dfrac{(25^n-1)(5a+b)}{24}-n(a+b)}{4}=\frac{(25^n-1)(5a+b)-24n(a+b)}{96},$$

respectiv:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(b+5a)(25^n-1)}{24\cdot 5^k}\right]_*$$

Condiţia $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ este necesară deoarece, în baza 5, cifrele unui număr nu pot depăşi pe 4.

**I.101°.** Să se arate că pentru orice număr natural $T$, există un număr natural $n$ astfel încît $2^n$ să aibă pe primele poziţii cifrele lui $T$, în aceeaşi ordine. (De exemplu, dacă $T = 102$, luăm $n = 10$ şi avem $2^{10} = 1024$).

**R.** Aşadar, va trebui să demonstrăm existenţa numerelor naturale $n$ şi $k$, astfel încît:

$$10^k T \leqslant 2^n < 10^k(T+1)$$

sau, altfel scris:

$$\lg T + k \leqslant n \lg 2 < \lg (T+1) + k.$$

Să considerăm un cerc de rază $\dfrac{1}{2\pi}$, deci cu circumferinţa de lungime 1. Alegem pe acest cerc un punct $O$ şi, în sensul trigonometric reprezentăm numerele:

$$\lg T + k,$$
$$\lg (T+1) + k,$$
$$n \lg 2$$

atunci cînd $n$ şi $k$ parcurg mulţimea numerelor naturale, aşa cum se face pe axa numerelor reale.

Pornind din $O$, punct pe care îl alegem pentru reprezentarea numărului 0, observăm că numărul 1 va fi reprezentat tot prin $O$ căci, parcurgînd conturul cercului cu o unitate, reprezentările lui 0 şi 1 vor coincide, lungimea circumferinţei cercului fiind 1. Analog, toate celelalte numere naturale vor fi reprezentate prin punctul $O$.

În felul acesta, toate numerele $\lg T + k$, $k \in \mathbb{N}$, vor fi reprezentate prin acelaşi punct, fie acesta $A$ (excludem cazul banal $T = 1$, luînd, în exemplu $n = 4$ aşa încît să avem satisfăcut enunţul). Analog, numerele $\lg(T+1)+k$, $k \in \mathbb{N}$, vor fi reprezentate prin acelaşi punct — fie acest $B$.

Punctele $A$ şi $B$ nu coincid căci, în caz contrar, ar însemna că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, diferenţa dintre $\lg (T+1) + k$ şi $\lg T + k$ este număr întreg adică:

$$\lg (T+1) - \lg T \in \mathbb{N}$$

absurd, căci:

$$\lg (T+1) - \lg T = \lg \frac{T+1}{T} = \lg \left(1 + \frac{1}{T}\right) \in (0,1),\ (\forall)\ T \in \mathbb{N}^*.$$

În privinţa numerelor $\lg 2$, $2 \lg 2, \ldots, n \lg 2, \ldots$, oricare dintre ele au o reprezentare distinctă pe cerc deoarece dacă, de exemplu, $a$

lg 2 şi $b$ lg, 2, $a \neq b$, ar admite aceeaşi reprezentare, diferenţa dintre ele ar fi un număr natural (presupunînd, de pildă, $a > b$), fie acesta $u$:

$$a \lg 2 - b \lg 2 = u$$

deci:

$$\lg 2 = \frac{u}{a-b}$$

absurd, lg 2 nefiind un număr raţional (dacă lg 2 ar fi raţional, deci dacă egalitatea anterioară ar fi adevărată, ar însemna că:

$$10^{\frac{u}{a-b}} = 2$$

adică $2^{a-b} = 10^u$ sau încă $2^{u-a+b} 5^u = 1$, absurd).

În felul acesta, şirul $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de puncte pe circumferinţă generat de şirul $\{n \lg 2\}_{n \in \mathbb{N}}$ este infinit şi oricare două puncte $A_i$ şi $A_j$, $i \neq j$, sînt diferite între ele.

Dacă reuşim să arătăm că cel puţin unul din termenii şirului $\{n \lg 2\}$ este reprezentat printr-un punct care, pe circumferinţa cercului, este $n \in \mathbb{N}$ situat între $A$ şi $B$ — punctele asociate termenilor şirurilor $\{\lg T + k\}_{k \in \mathbb{N}}$ respectiv $\{\lg (T+1) + k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — demonstraţia este terminată, căci aceasta implică existenţa numerelor $k_1$ şi $n_1$ aşa încît:

$$\lg (T+1) + k_1 \leqslant n_1 \lg 2 \leqslant \lg T + k_1.$$

Să arătăm acest lucru. Întrucît pe cerc au fost dispuse o infinitate de puncte $A_i$, toate diferite între ele, rezultă că printre ele se pot găsi două a căror distanţă, măsurată pe arc, să fie mai mică decît orice număr strict pozitiv dat — dacă distanţa dintre oricare două ar fi mai mare decît un anumit număr strict pozitiv, atunci pe cerc s-ar afla un număr finit de puncte $A_i$, contrar celor afirmate anterior. Fie $A_p$ şi $A_{p+q}$ două puncte din şirul considerat a căror distanţă (pe arc) este mai mică decît $\lg\left(1 + \frac{1}{T}\right) = \lg (1 + T) - \lg T$. Să observăm că distanţa dintre punctele $A_p$ şi $A_{p+q}$ este egală cu distanţa dintre punctele $A_{p+q}$ şi $A_{p+2q}$, respectiv dintre $A_{p+2q}$ şi $A_{p+3q}$, etc., deoarece:

$$(p + qk)\lg 2 - [p + (k-1)q]\lg 2 = q \lg 2$$

iar distanţa (pe arc) dintre $A_{p+(k-1)q}$ şi $A_{p+kq}$ respectiv $A_p$, $A_{p+q}$ este tocmai partea fracţionară a fiecăruia din numerele ce intervin în ambii membri ai egalităţii anterioare, părţi evident egale.

Cum distanţa dintre două puncte vecine dintre punctele $A_p$, $A_{p+q}$, $A_{p+2q}, \ldots$, luate în ordinea descrisă, este mai mică decît $\lg\left(1 + \frac{1}{T}\right)$ — dar mereu aceeaşi — alegînd un $k \in \mathbb{N}$ aşa încît $k \lg\left(1 + \frac{1}{T}\right) > 1$ (un astfel de $k$, evident, există, cel minimal fiind $k = \left[\frac{1}{\lg\left(1 + \frac{1}{T}\right)}\right]_* + 1$, anume pe cel minimal cu această proprietate, găsim că $A_{p+kq}$ se găsește între $A_p$ și $A_{p+q}$, punctele $A_p, A_{p+q}, A_{p+2q}, \ldots, A_{p+(k-1)q}$ fiind dispuse ordonat pe cerc (în sensul convenit, anume cel trigonometric) deci după o astfel de parcurgere completă, cel puțin un punct $A_{p+tq}$ se va găsi între $A$ și $B$, situația în care arcul determinat de două puncte $A_{p+q}$ și $A_{p+(t+1)q}$ acoperă complet arcul determinat de $A$ și $B$ (este vorba, desigur despre arcele cărora le corespund la centru un unghi inferior lui $k$) nefiind posibilă fiindcă distanța dintre $A$ și $B$ este lg $\left(1 + \frac{1}{T}\right)$ iar distanța dintre $A_{p+tq}$ și $A_{p+(t+1)q}$, strict inferioară acestui număr (deci subșirul $\{A_{p+mq}\}_{m\in\mathbb{N}}$ nu poate „sări" arcul $AB$).

**II.102°.** Dacă $(p, q)$ este o pereche de numere impare, prime între ele, atunci:

$$\sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[\frac{hq}{p}\right]+\sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}}\left[\frac{kp}{q}\right]_* = \frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}$$

**R.** Fie mulțimea:

$$T = \{kp - hq\}$$

unde $k = 1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}$ și $h = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$. Toate elementele mulțimii $T$ sînt diferite de zero și diferite între ele două cîte două. În adevăr, dacă presupunem $kp - hq = 0$, rezultă $kp = hq$ deci $p|hq$. Cum însă $(p, q)_* = 1$, rezultă $p|h$, absurd, deoarece $1 \leqslant h \leqslant \frac{p-1}{2}$. Dacă admitem că există $k_1, h_1, k_2, h_2$ astfel încît $h_1p - h_1 = k_2p - h_2q$ cu $h_1|h_2$ sau $k_1 \neq k_2$ sau, în fine, $h_1 \neq h_2$, $k_1|k_2$, rezultă:

$$(k_1 - k_2)p = (h_1 - h_2)q$$

deci:

$$p|(h_1 - h_2)q$$

adică $p|(h_1 - h_2)$, absurd, deoarece $1 \leqslant h_1 \leqslant \frac{p-1}{2}$, $1 \leqslant h_2 \leqslant \frac{p-1}{2}$, deci $|h_1 - h_2| \leqslant p - 1$ deci $h_1 = h_2$ și, implicit, $k_1 = k_2$ contrar ipotezei.

Urmează că $T$ are $\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}$ elemente deoarece pentru fiecare $h$ există $\frac{q-1}{2}$ numere $kp - hq$ aparținînd mulțimii $T$, iar $h$ poate lua $\frac{p-1}{2}$ valori.

Să calculăm acum cîte numere pozitive și cîte numere negative sînt în mulțimea $T$.

Din relația $kp - hq > 0$, rezultă $h < \frac{kp}{2}$ și deci, pentru un $k$ fixat, $h$

poate lua $\left[\frac{kp}{q}\right]_*$ valori. Deci, în mulțimea $T$ vor fi $\sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}}\left[\frac{kp}{q}\right]_*$ numere strict pozitive. În mod analog se arată că în mulțimea $T$ vor fi $\sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[\frac{hq}{p}\right]_*$ numere strict negative. Cum în $T$ nu există numere nule, rezultă afirmația.

**II.103°.** Să se determine numărul soluțiilor întregi pozitive ale ecuației:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n.$$

Aici $m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*$.

**R.** *Soluția întîi.* Să observăm că numărul soluțiilor în numere întregi pozitive (0 este, prin definiție, întreg pozitiv) ale ecuației:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n \tag{1}$$

este egal cu diferența dintre numărul soluțiilor în numere întregi pozitive ale inegalității:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \leqslant n \tag{2}$$

și numărul soluțiilor în numere întregi pozitive ale inegalității:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \leqslant n - 1$$

Să observăm că dacă:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \leqslant n$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sînt numere întregi pozitive, numărul cel mai mare, $t_m$, din următorul șir strict crescător de numere strict pozitive:

$$t_1 = x_1 + 1,$$
$$t_2 = x_1 + x_2 + 2,$$
$$t_m = x_1 + x_2 + \ldots + x_m + m$$

nu este mai mare decît $m + n$.

Pe de altă parte, dacă avem $m$ numere întregi strict pozitive diferite $t_1, t_2, \ldots, t_m$, care nu sînt mai mari decît $m + n$, putem să construim cu ajutorul acestor numere soluția $x_1, x_2, \ldots, x_m$ în numere întregi pozitive a inegalității (2); pentru aceasta, este suficient să considerăm că numerele $t_1, t_2, \ldots, t_m$ sînt scrise în ordine crescătoare și să punem:

$$x_1 = t_1 - 1,\ x_2 = t_2 - t_1 - 1,\ x_3 = t_3 - t_2 - 1, \ldots, x_m = t_m - t_{m-1} - 1.$$

Acest raționament arată că numărul $N(n, m)$ de soluții pozitive ale inegalității (2) este egal cu numărul de moduri în care pot fi alese $m$ numere oarecare din $m + n$ numere $-1, 2, \ldots, m+n$ — adică este egal cu $C_{m+n}^m$.

Potrivit celor spuse mai sus, numărul soluțiilor în numere întregi pozitive ale ecuației:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$$

este egal cu:

$$N(n - m,\ n) - N(n - m - 1,\ m) = C_n^m - C_{n-1}^m = C_{n-1}^{m-1}.$$

şi numărul soluţiilor în numere nenegative ale acestei ecuaţii este egal cu :

$$N(n, m) - N(n-1, m) = C_{n+m}^{m} - C_{n+m-1}^{m} = C_{n+m-1}^{m-1}.$$

*Soluţia a doua.* Schimbăm în enunţ pe $m$ cu $n$. Să presupunem că se dau $n$ obiecte notate $i_1, i_2, \ldots, i_n$ pe care vrem să le aranjăm în $m$ căsuţe distincte.

Dacă nu se pune nici o restricţie asupra unei astfel de aranjări, atunci numărul total de posibilităţi de aranjare este egal cu $m^n$, adică cu numărul funcţiilor definite pe o mulţime cu $n$ elemente, cu valori într-o mulţime cu $m$ elemente.

În adevăr, primul obiect $i_1$ poate ocupa oricare din cele $m$ căsuţe, deci poate fi distribuit în $m$ moduri, al doilea, de asemenea, în $m$ moduri,.. al $n$-lea obiect $i_n$ poate fi dispus, de asemenea, în $m$ moduri, rezultînd, în final, $m \cdot m \ldots m = m^n$ posibilităţi de aranjare.

Vedem că fiecare aranjare este, în fapt, o funcţie definită pe mulţimea obiectelor şi cu valori în mulţimea căsuţelor. Dacă punem restricţia ca obiectele să fie aranjate cel mult într-o căsuţă, rezultă că funcţia care defineşte aranjarea este injectivă, deoarece nu există două obiecte cu aceeaşi imagine (care merg în aceeaşi căsuţă). Pentru ca problema să fie posibilă, trebuie ca numărul căsuţelor să fie superior sau egal numărului obiectelor, deci $m \geqslant n$ şi numărul de posibilităţi de aranjare este egal cu $m(m-1)\ldots(m-n+1)$, adică cu numărul aranjamentelor de $m$ obiecte luate cîte $n$.

În adevăr, primul obiect $i_1$ poate fi aranjat în $m$ căsuţe, al doilea în $m-1$ căsuţe, excluzînd deci căsuţa ocupată de $i_1, \ldots$, al $n$-lea obiect poate fi aranjat în $m-n+1$ căsuţe (aceeaşi observaţie). Dacă $m = n$, atunci $m(m-1)\ldots(m-n+1) = m!$ şi funcţia care defineşte aranjarea este injectivă şi surjectivă ,deci bijectivă.

Dacă punem condiţia ca aranjarea să se facă astfel încît să nu rămînă nici o căsuţă goală, atunci problema are soluţie numai dacă numărul obiectelor este mai mare sau egal cu numărul căsuţelor, deci $n \geqslant m$, iar numărul de aranjări este egal cu numărul funcţiilor surjective de la o mulţime cu $n$ elemente pe o mulţime cu $m$ elemente şi care este egal cu :

$$S_{n,m} = m^n - C_m^1(m-1)^n + C_m^2(m-2)^n - C_m^3(m-3)^n + \ldots + (-1)^{m-1} \cdot m.$$

Pe parcursul celor demonstrate anterior, am făcut o serie de afirmaţii. Să le reluăm, dovedindu-le.

Fie $M$, $N_1$ două mulţimi finite avînd $m$, respectiv $n$ elemente. Atunci :

a°) Numărul funcţiilor $f: M \to N_1$ este $n^m$;

b°) Dacă $n = m$, atunci numărul funcţiilor bijective $f: M \to N_1$ este $m!$;

c°) Dacă $m \leqslant n$, atunci numărul funcţiilor injective $f: M \to N_1$ este $A_n^m$;

d°) Dacă $m \geqslant n$, atunci numărul funcţiilor surjective $f: M \to N_1$ este :

$$n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - C_n^3(n-3)^m + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}.$$

Demonstraţie.

a°). Vom demonstra afirmaţia prin inducţie după $m$.

Dacă $m = 1$, atunci mulţimea $M$ se reduce la un element şi este evident că există $n$ funcţii de la $M$ la $N_1$.

Presupunem că afirmația este adevărată pentru mulțimile $M'$ care au cel mult $m-1$ elemente. Fie $M$ o mulțime care are $m$ elemente și $x_0 \in M$. Atunci putem scrie $M = M' \cup \{x_0\}$ unde $M'$ are $m-1$ elemente.

Oricărei funcții $f: M \to N_1$ îi putem asocia restricția sa la $M'$, anume funcția $g: M' \to N_1$ așa ca $g(x) = f(x)$, $(\forall)$ $x \in M'$.

Dacă $g: M' \to N_1$ este o funcție, obținem pentru fiecare $y \in N_1$ o funcție $f_g^y: M \to N_1$ definită astfel:

$$f_g^y(x) = \begin{cases} g(x) & \text{dacă } x \in M' \\ y & \text{dacă } x = x_0. \end{cases}$$

Așadar, oricărei funcții $g: M' \to N_1$ îi putem asocia $n$ funcții distincte $f_g^y$, care restrînse la $M'$ să coincidă cu $g$.

Deci numărul funcțiilor de la $M$ la $N_1$ este:

$$n \cdot n^{m-1} = n^m.$$

b°). Vom dovedi afirmația prin inducție după $m$.

Dacă $m = 1$, atunci există o singură funcție bijectivă de la $M = \{x\}$ la $N_1 = \{y\}$.

Să presupunem că am demonstrat afirmația pentru toate mulțimile $M$, $N_1$ avînd fiecare $m-1$ elemente.

Să presupunem că am demonstrat afirmația pentru toate mulțimile $M$, $N_1$ avînd fiecare $m-1$ elemente.

Fie $M$, $N_1$ două mulțimi avînd $m$ elemente. Să alegem un element $x \in M$. Atunci putem scrie $M = M' \cup \{x\}$ unde $M'$ are $m-1$ elemente. Orice funcție bijectivă este perfect determinată de valoarea $f(x) \in N_1$ și de o funcție bijectivă $g: M' \to N_1'$ unde $N_1 = N_1' \cup \{f(x)\}$. Putem alege pe $f(x)$ în $m$ moduri iar pe $g$ în $(m-1)!$ moduri, conform ipotezei de inducție. Deci putem defini $m(m-1)! = m!$ funcții bijective de la $M$ la $N_1$.

c°). Fie $f: M \to N_1$ o funcție injectivă. Atunci elementele $f(x)$, $x \in M$, determină o submulțime $f(M)$ a lui $N_1$ cu $m$ elemente, iar $f$ determină o aplicație bijectivă $g: M \to f(M)$ dată de $g(x) = f(x)$, $(\forall)$ $x \in M$.

Reciproc, dacă luăm în $N_1$ o parte $P$ avînd $m$ elemente, atunci putem stabili $m!$ funcții bijective $g: M \to P$, care sînt de fapt funcții injective $f: M \to N_1$. Cum avem $C_n^m$ astfel de părți ale lui $N_1$, rezultă că putem construi $m!C_n^m = A_n^m$ funcții injective de la $M$ la $N_1$.

d°). Să notăm cu $\mathscr{S}_m^n$ mulțimea funcțiilor surjective de la mulțimea $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ la mulțimea $N_1 = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ unde, evident, $m \geqslant n$.

Pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, să notăm cu $A_i$ mulțimea funcțiilor de la $M$ la $N_1$ pentru care $y_i$ nu este imaginea nici unui element din $M$.

Atunci mulțimea $\mathscr{S}_m^n$ a funcțiilor surjective coincide cu mulțimea funcțiilor de la $M$ la $N_1$ care nu aparțin nici uneia dintre mulțimile $A_i$. Deci:

$$\text{card}\,(\mathscr{S}_m^n) = n^m - \text{card}\,(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n).$$

Conform principiului includerii şi al excluderii (v. soluţia problemei II.72.):

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card} A_i - \sum_{1<i<j<n} \operatorname{card}(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot$$

$$\cdot \operatorname{card}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Dar $A_i$ este, de fapt, mulţimea funcţiilor definite pe $M$ cu valori în $N_1 - \{y_i\}$, deci card $A_i = (n-1)^m$; $A_i \cap A_j$ este mulţimea funcţiilor definite pe $M$ cu valori în $N_1 - \{y_i, y_j\}$, deci card $(A_i \cap A_j) = (n-2)^m$ şi aşa mai departe. În plus $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$.

Sumele de mai sus, din formula ce dă pe card $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$ conţine respectiv $C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n$ termeni egali. Astfel:

$S_m^n = \operatorname{card} \mathscr{S}_m^n = n^m - C_n^1 (n-1)^m + C_n^2 (n-2)^m - C_n^3 (n-3)^m + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}$.

Revenim la discuţia de la care ne-am abătut. Discuţia făcută dă răspuns la o problemă identică: în cîte moduri putem împărţi $n$ obiecte diferite la $m$ persoane ($n \geqslant m$) aşa încît fiecare persoană să primească cel puţin un obiect, rezultatul fiind tot $S_{n,m}$.

Să presupunem acum că ne interesează şi ordinea celor $n$ obiecte în cele $m$ căsuţe, o aranjare putînd conţine şi căsuţe goale.

Să găsim deci numărul de aranjări a $n$ obiecte în $m$ căsuţe ordonate şi să notăm acest număr cu $T_{n,m}$. Să considerăm pentru aceasta o aranjare a $n-1$ obiecte în $m$ căsuţe ordonate:

$$i_1, i_2 \ldots | i_k, i_{k+1} \ldots | \ldots i_{n-1}.$$

Această aranjare se poate deci nota printr-un şir de $n - 1 + m - 1 = n + m - 2$ simboluri (litere şi bare).

Un nou obiect $i_n$ se poate adăuga unei astfel de aranjări în $n - 1 + m - 1 + 1 = n + m - 1$ moduri diferite, ţinînd seama că ordinea obiectelor într-o căsuţă este esenţială. Cum în acest mod se obţin toate aranjările a $n$ obiecte în căsuţe ordonate fără repetiţii, rezultă că:

$$T_{n,m} = (m + n - 1)\ T_{n-1,m}.$$

Iterînd această relaţie de recurenţă, obţinem:

$$T_{n,m} = (m + n - 1) T_{n-1,m} = (m + n - 1)(m + n - 2)\ T_{n-2,m} = \ldots =$$

$$= (m + n - 1) \ldots (m + 1) T_{1,m}.$$

Dar $T_{1,m}$ este tocmai numărul de moduri de aranjare a unui obiect în $m$ căsuţe şi este egal, evident, cu $m$, deci:

$$T_{n,m} = (m + n - 1) \ldots (m + 1) m = \frac{(m + n - 1)!}{(m - 1)!}.$$

Fie acum $A$ o mulţime de obiecte $a_1, a_2, \ldots, a_m$ total ordonate în raport cu o relaţie de ordine, adică:

$$a_1 < \ldots < a_m$$

(de exemplu ,o mulţime de numere reale ordonate cu relaţia obişnuită între numere reale).

Amintim că o funcţie $f: \{1, 2, \ldots, n\} \to A$ se numeşte crescătoare dacă $i \leqslant j$ implică $f(i) \leqslant f(j)$. O astfel de funcţie se mai numeşte şi cuvînt de lungime $n$, asociind în mod univoc funcţiei $f$ cuvîntul:

$$f(1)f(2)\ldots f(n)$$

format cu „litere'' din mulţimea $A$. Elementele $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ nu se înmulţesc, ci se scriu alăturat ca literele într-un cuvînt obişnuit. Deci un cuvînt $x_1 \ldots x_n$, cu $x_i \in A$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$, este crescător dacă:

$$x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$$

De exemplu, dacă $A$ este mulţimea $a, b, c, d$ cu ordinea:

$$a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$$

cuvintele crescătoare de lungime 3 formate cu litere din $A$ sînt următoarele 20:

*aaa*, *abb*, *acc*, *add*, *aab*, *abc*, *acd*, *aac*, *abd*, *aad*, *bbd*, *bbc*, *bbb*, *bcc*, *bcd*, *bdd*, *ccc*, *ccd*, *cdd*, *ddd*.

Pentru a găsi numărul cuvintelor crescătoare de lungime $n$ formate cu $m$ simboluri, vom proceda astfel: fiecărei aranjări a $n$ obiecte, $1, 2 \ldots n$ în $m$ căsuţe ordonate, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ îi putem pune în corespondenţă un cuvînt crescător astfel:

$$\underbrace{|4|}_{a_1} \quad \underbrace{|2,\ 5,\ 3|}_{a_2} \quad \underbrace{|\ \ |}_{a_3} \quad \underbrace{|1,\ 6,\ 7|}_{a_4} \qquad a_1a_2a_2 \quad a_4a_4a_4$$

adică $a_i$ se scrie de atîtea ori cîte obiecte sînt în căsuţa $a_i$, indiferent de natura lor. Dacă în căsuţa $a_i$ nu se găseşte nici un obiect, atunci litera $a_i$ nu apare în cuvîntul crescător astfel format. Permutînd acum obiectele $1, 2, \ldots, n$ în $n!$ moduri diferite, se observă că obţinem un acelaşi cuvînt crescător, deoarece la alcătuirea unui cuvînt crescător prin procedeul de mai sus nu contează natura obiectelor ci numai numărul lor, întrucît un acelaşi cuvînt crescător provine exact din $n!$ aranjări diferite în căsuţe ordonate, rezultă că numărul cuvintelor crescătoare cu $n$ litere formate dintr-un alfabet cu $m$ litere, care este egal cu numărul funcţiilor crescătoare definite pe o mulţime cu $n$ elemente cu valori într-o mulţime cu $m$ elemente, ambele total ordonate, este egal cu:

$$\frac{T_{n,m}}{n!} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!} = C^n_{m+n-1}$$

număr care se mai numeşte combinări cu repetiţie de $m$ obiecte luate cîte $n$.

Revenind la problema care a făcut obiectul acestei expuneri, să notăm cu $S_k = \sum_{i=k}^{k} u_i$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, sumele parțiale, pentru o soluție oarecare $x_1, \ldots, x_m$. Rezultă de aici că fiecare sumă este caracterizată printr-un cuvînt crescător:

$$S_1 S_2 \ldots S_{n-1}$$

cu proprietatea:

$$0 \leqslant S_1 \leqslant S_2 \leqslant \ldots \leqslant S_{n-1} \leqslant m$$

(avem $x_i = S_i - S_{i-1}$ pentru $2 \leqslant i \leqslant n-1$ iar $x_1 = S_1$, $x_n = n - S_{n-1}$). Dar $S_n = m$, deci trebuie să găsim numărul cuvintelor $S_1 S_2 \ldots S_{n-1}$, care au proprietatea că:

$$0 \leqslant S_1 \leqslant \ldots \leqslant S_{n-1} \leqslant m$$

adică numărul cuvintelor de lungime $m-1$ formate dintr-un alfabet cu $m+1$ litere, $\{0, 1, \ldots, m\}$, cu ordinea naturală:

$$0 \leqslant 1 \leqslant \ldots \leqslant m$$

Deci numărul căutat este:

$$\frac{T_{n-1, m+1}}{(n-1)!} = \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!\, m!}.$$

**II.104°.** Să se arate că:

$$\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=n} i_1 i_2 \ldots i_m = C_{n+m-1}^{2m-1}, \quad i_s \in \mathbb{N}, \ (\forall)\ i \in \overline{1, n}.$$

**R.** Demonstrăm afirmația prin inducție. Fie, pentru simplificarea limbajului:

$$\sum_{i_1+\ldots+i_m=n} i_1 \ldots i_m = S_m^n.$$

Pentru $m = 1$:

$$S_1^n = \sum_{i=n} i = n = C_n^1.$$

Fie $k \in \mathbb{N}^*$ și $S_m^n = C_{n+m-1}^{2m-1}$ pentru toți $m \leqslant k$. Să arătăm că și $S_{k+1}^n = C_{n+k}^{2k+1}$. Numărul $i_{k+1}$ care apare în suma $i_1 + \ldots + i_m$ după care este extinsă suma din enunț poate lua ca valoare oricare din numerele $1, 2, \ldots, n-k$, astfel că:

$$S_{k+1}^n = 1 \cdot S_k^{n-1} + 2 \cdot S_k^{n-2} + 3 \cdot S_k^{n-3} + \ldots + (n-k) S_k^k$$

și folosind ipoteza inducție:

$$S_{k+1}^n = 1 \cdot C_{n+k-2}^{2k-1} + 2 \cdot C_{n+k-3}^{2k-1} + \ldots + (n-k) \cdot C_{2k-1}^{2k-1}.$$

Cu notațiile $n - k = r$, $2k - 1 = p$, obținem:

$$S_{k+1}^n = 1 \cdot C_{p+r-1}^p + 2 \cdot C_{p+r-2}^p + \ldots + r \cdot C_p^p \overset{\text{not.}}{=} t_r^p.$$

Pentru $r = 1$, găsim $t_1^p = C_p^p = 1 = C_{p+1}^{p+1}$ și:

$$t_{r+1}^p = 1 \cdot C_{p+r}^p + 2 \cdot C_{p+r-1}^p + 3 \cdot C_{p+r-2}^p + \ldots + (r+1) C_p^p =$$

$$=(C_{p+r}^p + C_{p+r-1}^p + \ldots + C_p^p) + t_r^p$$

Dar:

$$C_p^p + C_{p+1}^p + \ldots + C_{p+r}^p = C_{p+1+r}^{p+1}. \qquad (1)$$

În adevăr, folosind identitatea:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

se obține:

$$C_k^k = C_{k+1}^{k+1};\ C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k+1} = C_{k+2}^{k+1};\ C_{k+2}^k + C_{k+2}^{k+1} = C_{k+3}^{k+1};\ldots;$$

$$C_{k+m-1}^k + C_{k+m-1}^{k+1} = C_{k+m}^{k+1}$$

și, adunînd termen cu termen egalitățile de mai sus avem, după oarecari reduceri:

$$C_k^k + C_{k+1}^k + \ldots + C_{k+m-1}^k = C_{k+m}^{k+1}$$

adică o variantă a egalității (1).

Presupunînd că:

$$t_r^p = C_{p+r+1}^{p+2}$$

obținem:

$$t_{r+1}^p = C_{p+r+1}^{p+1} + C_{p+r+1}^{p+2} = C_{p+r+2}^{p+2}$$

astfel că formulele:

$$t_r^p = C_{p+r+1}^{p+2};\ S_{k+1}^n = C_{n+k}^{2k+1};\ S_m^n = C_{m+n-1}^{2m-1}$$

sînt adevărate.

**II.105°.** a°). Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze minimul produsului:

$$P = x_1!x_2!\ldots x!$$

in ipoteza că suma:

$$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

este constantă și $x_i \in \mathbb{N}^*$, $(\forall)$ $i \in \overline{1, n}$.

b°). Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze minimul sumei:

$$T = x_1! + x_2! + \ldots + x_n!$$

în ipoteza că suma:

$$k = x_1 + \ldots + x_n$$

este constantă și $x_i \in \mathbb{N}^*$, $(\forall)$ $i \in \overline{1, n}$.

c°) Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze maximul produsului:

$$n_1 n_2 \ldots n_k$$

în ipoteza că suma:

$$n = n_1 + \ldots + n_k$$

este constantă şi $n_i \in \mathbb{N}^*$, $(\forall)$ $i \in \overline{1, k}$.

**R.** Presupunem, fără a restrînge generalitatea, că $x_1 \leqslant x_2$ şi fie:

$$P_1 = (x_1 - 1)!\,(x_2 + 1)!\,x_3!\,\ldots x_n!.$$

Cum:

$$x_1!\,x_2! < (x_1 - 1)!\,(x_2 + 1)!$$

deoarece $x_1 \leqslant x_2$, rezultă că $P < P_1$. Rezultă deci că produsul este minim cînd numerele $x_1, \ldots, x_n$ sînt egale sau diferă între ele prin cel mult o unitate.

Fie:

$$x_1 + \ldots + x_n = k$$

şi fie $q$ şi $r$ cîtul şi restul împărţirii lui $k$ la $n$, altfel scris:

$$k = nq + r$$

cu $0 \leqslant r < n$.

Trebuie deci ca $x_1 = x_2 = \ldots = x_r = q + 1$ şi $x_{r+1} = \ldots = x_n = q$. Atunci:

$$P_{\min} = \underbrace{q!\,q!\,\ldots q!}_{(n-r)\text{ ori}}\,(q+1)!\,\ldots(q+1)! = (q!)^{n-r}\,[(q+1)!]^r =$$

$$= \left(\left[\frac{k}{n}\right]!\right)^{n-k+n\cdot\left[\frac{k}{n}\right]_*}\left[\left(\left[\frac{k}{n}\right]_* + 1\right)!\right]^{k-n\cdot\left[\frac{k}{n}\right]_*},$$

deoarece: $q = \left[\dfrac{k}{n}\right]_*$.

b°). Un raţionament analog celui precedent conduce la:

$$S_{\min} = \left[\frac{k}{n}\right]_*!\left[n + \left[\frac{k}{n}\right]_*\left(n - n\left[\frac{k}{n}\right]_*\right)\right].$$

c°). Maximul cerut este:

$$\left(\left[\frac{n}{k}\right]_* + 1\right)^{n-k\left[\frac{n}{k}\right]_*}\left(\left[\frac{n}{k}\right]_*^{\,k-n+k\left[\frac{n}{k}\right]_*}\right).$$

**II.106°.** Să se arate că ultimele 5 cifre ale numărului:

$$N_1 = 9^{9^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9}}}}}$$

sînt 45289, numărul cifrelor de 9 folosite pentru $N_1$ fiind $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

**R.** Fie:

a$_1^\circ$). $Z_1 = 9$;

$a_2^\circ$). $Z_2 = 9^{Z_1} = (10-1)^{Z_1} = 10^{Z_1} - C^1_{Z_1} \cdot 10^{Z_1-1} + \ldots + C^{Z_1-1}_{Z_1} \cdot 10 - 1$ unde termenii omişi se divid la 100. Prin urmare, ultimele două cifre ale numărului $Z_2$ sînt date de:

$$C^1_{Z_1} \cdot 10 - 1 = 9 \cdot 10 - 1 = 89.$$

$a_3^\circ$). Fie, de asemenea, numărul:

$$Z_3 = 9^{Z_2} = (10-1)^{Z_2} = 10^{Z_2} - C^1_{Z_2} \cdot 10^{Z_2-1} + \ldots - C^2_{Z_2} \cdot 10^2 + C^1_{Z_2} \cdot 10 - 1.$$

Dar $Z_2$ se termină în 89, prin urmare $C^1_{Z_2} = Z_2$ se termină în 89 iar:

$$C^2_{Z_2} = \frac{Z_2(Z_2-1)}{1 \cdot 2} = \frac{(\ldots 89)(\ldots 88)}{2}$$

(însemnînd prin puncte cifrele necunoscute) se termină în cifra 6.

Prin urmare, ultimele trei cifre ale numărului $Z_3$ vor fi aceleaşi cu ultimele trei cifre ale numărului $-600 + 890 - 1 = 289$.

$a_4^\circ$): $Z_4 = 9^{Z_3} = (10-1)^{Z_3} = 10^{Z_3} - C^1_{Z_3} \cdot 10^{Z_3-1} + \ldots + C^3_{Z_3} \cdot 10^3 -$

$$- C^2_{Z_3} \cdot 10^2 + C^1_{Z_3} \cdot 10 - 1$$

Deoarece $Z_3$ se termină în 289, atunci şi $C^1_{Z_3} = Z_3$ se termină în 289. Însă:

$$C^2_{Z_3} = \frac{Z_3(Z_3-1)}{2!} = \frac{(\ldots 289)(\ldots 288)}{2}$$

se termină în 16;

$$C^3_{Z_3} = \frac{Z_3(Z_3-1)(Z_3-2)}{3!} = \frac{(\ldots 289)(\ldots 288)(\ldots 287)}{3!}$$

se termină în cifra 4. Prin urmare, ultimele 4 cifre ale lui $Z_4$ vor fi aceleaşi ca şi ultimele 4 cifre ale numărului:

$$4000 - 1600 + 2890 - 1 = 5289.$$

$a_5^\circ$). $Z_5 = 9^{Z_4} = (10-1)^{Z_4} = 10^{Z_4} - C^1_{Z_4} \cdot 10^{Z_4-1} + \ldots - C^4_{Z_4} \cdot 10^4 +$

$$+ C^3_{Z_4} \cdot 10^3 - C^2_{Z_4} \cdot 10^2 + C^1_{Z_4} \cdot 10 - 1.$$

Deoarece $Z_4$ se termină în 5289 atunci şi $C^1_{Z_4} = Z_4$ se termină în 5289;

$$C^2_{Z_4} = \frac{Z_4(Z_4-1)}{2!} = \frac{(\ldots 5289)(\ldots 5288)}{2!}$$

se termină în 116;

$$C^3_{Z_4} = \frac{Z_4(Z_4-1)(Z_4-2)}{3!} = \frac{(\ldots 5289)(\ldots 5288)(\ldots 5287)}{6}$$

se termină în 64;

$$C_{Z_4}^4 = \frac{Z_4(Z_4-1)(Z_4-2)(Z_4-3)}{4!}$$

se termină în cifra 6. Prin urmare, ultimele 5 cifre ale numărului $Z_5$ sînt date de ultimele 5 cifre ale numărului:

$$-60000 + 64000 - 11600 + 52890 - 1 = 45289.$$

Analog, $Z_6 = 9^{Z_5}$ are ultimele cifre 45289 şi, în general, $Z_n = 9^{Z_{n-1}}$ are ultimele cifre egale cu 45289, pentru orice $n \geqslant 5$, lucru ce se poate demonstra prin inducţie matematică.

**II.107°.** Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice $p \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, are loc egalitatea:

$$S_n^p = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{p-1} \left[\frac{n + ip^k}{p^{k+1}}\right]_* = n.$$

**R.** Împărţim demonstraţia în mai multe etape.
a°). Vom arăta mai întîi că pentru orice $n, h \in \mathbb{N}^*$:

$$\left[\frac{n}{q}\right]_* = \begin{cases} \left[\dfrac{n-1}{q}\right]_* + 1 \text{ dacă } n \equiv 0 \pmod q \\ \left[\dfrac{n-1}{q}\right]_* \text{ dacă } n \not\equiv 0 \pmod q \end{cases} \qquad (1)$$

În adevăr, $n \equiv 0 \pmod q$ dacă şi numai dacă există $s \in \mathbb{N}$ astfel încît $n = sq$, deci dacă $n \equiv 0 \pmod q$ atunci:

$$\left[\frac{n}{q}\right]_* + \left[\frac{sq}{q}\right]_* = [s]_* = s$$

iar:

$$\left[\frac{n-1}{q}\right]_* = \left[\frac{sq-1}{q}\right]_* = \left[\frac{(s-1)q+q-1}{q}\right]_* =$$

$$= \left[(s-1) + \frac{q-1}{q}\right]_* = s - 1$$

şi, prin urmare, dacă $n \equiv 0 \pmod q$, atunci:

$$\left[\frac{n}{q}\right]_* = \left[\frac{n-1}{q}\right]_* + 1.$$

Dacă însă $n \not\equiv 0 \pmod q$ atunci există $r \in \mathbb{N}$ şi $s \geqslant 0$ astfel încît $n = sq + r$, cu $0 < r < q$. Deci, în acest caz:

$$\left[\frac{n}{q}\right]_* = \left[\frac{sq+r}{q}\right]_* = \left[s + \frac{r}{q}\right] = s$$

deoarece $0 \leqslant \frac{r}{q} < 1$ iar:

$$\left[\frac{n-1}{q}\right]_* = \left[\frac{sq+r-1}{q}\right]_* = \left[s + \frac{r-1}{q}\right]_* = s$$

deoarece $0 \leqslant \frac{r-1}{q} < 1$. Ca atare, dacă $n \not\equiv 0 \pmod q$ atunci $\left[\frac{n}{q}\right]_* =$ $= \left[\frac{n-1}{q}\right]_*$, deci relația (1) este astfel demonstrată.

b°) Să observăm că diferența $S_n^p - S_{n-1}^p$ este egală cu numărul de întregi dintre numerele:

$$\frac{n+ip^k}{p^{k+1}}$$

cu $1 \leqslant i \leqslant p-1$.

În adevăr:

$$S_n^p - S_{n-1}^p = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{p-1}\left[\frac{n+ip^k}{p^{k+1}}\right]_* - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{p-1}\left[\frac{n-1+in^k}{p^{k+1}}\right]_* =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{p-1}\left(\left[\frac{n+in^k}{p^{k+1}}\right]_* - \left[\frac{n-1+ip^k}{p^{k+1}}\right]_*\right)$$

și, ținînd seama de (1), rezultă tocmai afirmația anterioară.

c°). Este clar că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ și oricare ar fi $p \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, cu $p \leqslant n$, există $\alpha \in \mathbb{N}$ și un $m \in \mathbb{N}^*$ cu $m \not\equiv 0 \pmod p$ astfel încît $n = p^\alpha m$.

Vom demonstra acum că unul și numai unul dintre numerele de forma $\frac{n+ip^k}{p^{k+1}}$ cu $1 \leqslant i \leqslant p-1$ și $k$ întreg pozitiv, este întreg. În adevăr, pe baza afirmației anterior enunțată, pentru $k = \alpha$:

$$\left[\frac{n+ip^\alpha}{p^{\alpha+1}}\right]_* = \frac{mp^\alpha + ip^\alpha}{p^{\alpha+1}} = \frac{m+i}{p}. \tag{2}$$

Deoarece $m \not\equiv 0 \pmod p$, există un $t \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ astfel ca $m \equiv t \pmod p$ deci $m = up + t$ unde $u \geqslant 0$. Din faptul că $t \in \{1, 2, \ldots p-1\}$ rezultă $p - t \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, și deci, dacă $i = p - t$ atunci relația (2) dă:

$$\frac{n+(p-t)p^\alpha}{p^{\alpha+1}} = \frac{mp^\alpha + (p-t)p^\alpha}{p^{\alpha+1}} = \frac{m+p-t}{p} =$$

$$= \frac{up+t+p-t}{p} = u + 1 \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă însă $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\} - \{p-t\}$, atunci:

$$\frac{n+ip^\alpha}{p^{\alpha+1}} = \frac{m+1}{p} = \frac{up+t+i}{p} = u + \frac{t+i}{p} = u +$$

$$+ \frac{t+(p-t)+v}{p} = u + 1 + \frac{v}{p}\quad .$$

cu $v \in \{-(p-t-1), -(p-t-2), \ldots, -1, 1, 1, \ldots, t-1\}$, deci $0 <$ $< |v| < p$ şi $0 < \left|\frac{u}{p}\right| < 1$, şi prin urmare:

$$\frac{n+ip^\alpha}{p^{\alpha+1}} = \frac{m+i}{p} \notin \mathbb{N}$$

dacă $i \neq p-t$.

Pentru $k < \alpha$ putem scrie:

$$\frac{n+ip^k}{p^{k+1}} = \frac{mp^\alpha+ip^k}{p^{k+1}} = \frac{p^k(mp^{\alpha-k}+i)}{p^{k+1}} = \frac{mp^{\alpha-k}+i}{p} = mp^{\alpha-k-1} + \frac{i}{p} \notin \mathbb{N}$$

deoarece $i \not\equiv 0 \pmod p$ şi $\alpha - k \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $k > \alpha$:

$$\frac{n+ip^k}{p^{k+1}} = \frac{mp+ip^k}{p^{k+1}} = \frac{p^\alpha(m+ip^{k-\alpha})}{p^{k+1}} = \frac{m+ip^{k-\alpha}}{p^{k+1-\alpha}} \notin \mathbb{N}$$

deoarece $m \not\equiv 0 \pmod p$ şi $k - \alpha > 0$. Cu aceasta afirmaţia este dovedită.

Toate consideraţiile precedente dovedesc, respectiv, că:

$$S_n^p = S_{n-1}^p + 1.$$

Deoarece $ip^k < p^{k+1}$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ rezultă că:

$$S_0^p = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{p-1} \left[\frac{0+ip}{p^{k+1}}\right]_* = 0$$

şi atunci din (3), prin recurenţă:

$$S_n^p = n,$$

adică tocmai relaţia de demonstrat.

**II.108°.** Dacă numărul $k \in \mathbb{N}^*$ este prim cu 3 şi $a, b \in \mathbb{N}^*$, atunci numărul:

$$a^{2k} + b^{2k} + (a+b)^{2k}$$

este divizibil prin:

$$a^2 + ab + b^2.$$

**R.** Fie $\alpha$ una din rădăcinile cubice ale unităţii — dar diferită de 1. Fie funcţia polinomială de grad $2k$, $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$P(x) = (1+x)^{2k} + x^{2k} + 1\quad .$$

În acest caz:

$$P(\alpha) = (1 + \alpha)^{k} + \alpha^{4k} + 1 = (-\alpha^2)^{2k} + \alpha^{2k} + 1 = (\alpha^3)^k \cdot \alpha^k +$$
$$+ \alpha^{2k} + 1 = \alpha^{2k} + \alpha^k + 1 = \frac{(\alpha^3)^k - 1}{\alpha^k - 1} = 0$$

pentru $k \in \mathbb{N}$, $k \neq \mathcal{M}3$.

Analog:

$$P(\alpha^2) = (1 + \alpha^2)^{2k} + \alpha^{4k} + 1 = (-\alpha)^{2k} + \alpha^k(\alpha^3)^k + 1 = \alpha^{2k} + \alpha^k + 1 = 0.$$

În felul acesta, produsul $b^{2k}P(x)$ se divide prin:

$$b^2(x - \alpha)(x - \alpha^2) = b^2(x^2 + x + 1)$$

$b$ fiind un număr natural nenul oarecare. Pentru $x = \frac{a}{b}$, $a$ număr natural oarecare, rezultă că numărul:

$$(a + b)^{2k} + a^{2k} + b^{2k}$$

se divide prin:

$$a^2 + ab + b^2.$$

**II.109°.** Să se demonstreze că pentru orice pereche de numere naturale nenule $(a, b)$, cu $ab \neq 1$, există o infinitate de numere naturale $n$ pentru care:

$$n \mid a^n + b^n.$$

**R.** Distingem două cazuri:

a°). Numărul $a + b$ nu este o putere întreagă a lui 2 şi:

b°). Numărul $a + b$ este o putere întreagă a lui 2.

Să ne situăm în primul caz. Evident, $a + b$ admite un divizor prim $p > 2$. Să arătăm, în acest caz, că

$$p^{k+1} \mid a^{p^k} + b^{p^k}.$$

Pentru $k = 0$, afirmaţia este evidentă prin ipoteză. Presupunem că pentru un $k$ oarecare:

$$p^{k+1} \mid a^{p^k} + b^{p^k}$$

şi să arătăm, în această ipoteză, că:

$$p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}} + b^{p^{k+1}}$$

În adevăr, notînd:

$$a^{p^k} = A, \quad b^{p^k} = B,$$

are loc, potrivit ipotezei:

$$p^{k+1} \mid A + B$$

dar, de aici:

$$p \mid A + B$$

deci $A \equiv -B \pmod p$, adică:

$$(-1)^k B^k = A^k \pmod p, \ (\forall)\ k \in \mathbb{N}$$

Cum, $p$ fiind impar:

$$A^p + B^p = (A + B)(A^{p-1} - A^{p-2} B + \ldots + (-1)^k A^{p-k-1} B^k + \ldots - B^{p-1}) \quad (2)$$

şi, cum, folosind (1), al doilea factor din membrului drept din (2) se divide cu $p$, rezultă:

$$p^{k+2} | A^p + B^p$$

căci:

$$p^{k+1} | A + B$$

Deci, dacă $a + b$ are un factor prim $p > 2$, atunci există o infinitate de numere naturale $n$ aşa ca:

$$n | a^n + b^n$$

anume numerele $p^k$.

b°). Fie $a + b = 2^\alpha$. Cum $ab > 1$ deci $a \neq 1$ sau $b \neq 1$, rezultă $\alpha > 1$. Din $a + b = 2^\alpha$ rezultă că $a$ şi $b$ au aceeaşi paritate.

Dacă $a$ şi $b$ sînt pare, din $2 | a$ şi $2 | b$ rezultă $2^k | 2^{2k} | a^{2k}$ şi $2^k | 2^{2k}, | b^{2k}$ deci, din tranzitivitatea relaţiei de divizibilitate, $2^k | a^{2k}$ şi, analog, $2^k | b^{2k}$ deci:

$$2^k | a^{2k} + b^{2k}, \ (\forall)\ k \in \mathbb{N}$$

deci enunţul.

Să demonstrăm afirmaţia pentru $a$ şi $b$ impare. Fie $s = 2(2m + 1)$, $m \in \mathbb{N}$ şi presupunem că:

$$s | a^s + b^s.$$

Să arătăm în acest caz că există $s_1$, $s_1 = 2(2m + 1)$ aşa ca:

$$s_1 | a^{s_1} + b^{s_1}$$

şi $s_1 > s$.

În adevăr, numărul $s_1 = a^s + b^s$ îndeplineşte condiţiile impuse; evident, $s_1 > s$ (deoarece $ab > 1$, prin ipoteză) şi:

$$a^s + b^s = (a^2)^{2m+1} + (b^2)^{2m+1} = (\mathcal{M}8 + 1)^{2m+1} + (\mathcal{M}8 + 1)^{2m+1} =$$

$$= \mathcal{M}8 + 1 + \mathcal{M}8 + 1 = \mathcal{M}8 + 2 = 2(2m_1 + 1), \ m_1 \in \mathbb{N}.$$

Din:

$$s | a^s + b^s$$

rezultă:

$$s_1 = a^s + b^s = ts$$

$t$ impar, deci:

$$a^s + b^s | a^{ts} + b^{ts} = a^{s_1} + b^{s_1}$$

Luînd în acest caz ($a$ şi $b$ impare), $s = 2$ (deci $m = 0$), obţinem, iterînd procedeul, o infinitate de numere $n$ care satisfac problema.

**II.110°.** Să se arate că dacă $p$ este un număr natural prim fixat, ecuaţia :

$$x^2 + y^2 + 1 = mp$$

admite o infinitate de soluţii în numere naturale.

**R.** Dacă $p = 2$, luăm $x$ şi $y$ de parităţi diferite şi afirmaţia este evidentă.

Fie $p$ un număr prim impar şi $n$ un număr natural prim cu $p$. Fie numerele :

$$0,\ n,\ 2n, \ldots, \frac{p-1}{2}n,$$

în număr de $\frac{p+1}{2}$. Pătratele oricăror două dintre ele dau prin împărţire la $p$ resturi diferite; în adevăr, dacă am avea :

$$(an)^2 = q_1p + r,\ (bn)^2 = q_2p + r$$

unde $a,\ b \in \overline{0, \frac{p-1}{2}}$, ar rezulta :

$$(an)^2 - (bn)^2 = n^2(a - b)(a + b) = (q_1 - q_2)p$$

adică $p$ divide produsul $n^2(a - b)(a + b)$, absurd fiindcă, prin ipoteză $(p,\ n)_* = 1$ iar :

$$|a - b| < p$$

căci din $0 \leqslant a \leqslant \frac{p-1}{2},\ 0 \leqslant b \leqslant \frac{p-1}{2}$ rezultă $|a - b| < p$).

Astfel, numerele :

$$0^2,\ n^2,\ (2n)^2,\ (3n)^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}n\right)^2 \qquad (1)$$

prin împărţirea la $p$ dau $\frac{p+1}{2}$ resturi diferite, mai mici decît $p$.

Analog, următoarele $\frac{p+1}{2}$ numere :

$$-1,\ -n^2 - 1,\ -(2n)^2 - 1,\ -(3n)^2 - 1, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}n\right)^2 - 1 \qquad (2)$$

prin împărţire la $p$ dau $\frac{p+1}{2}$ resturi diferite, mai mici decît $p$.

Rezultă că printre cele $p + 1$ numere din şirurile (1) şi (2) există, cu necesitate, o pereche de numere care prin împărţirea la $p$ dau acelaşi rest (căci resturile sînt mai mici decît $p$ şi sînt $p + 1$ numere).

Fie $(nx_1)^2$ şi $-(ny_1)^2 - 1$ cele două numere. Din:

$$(nx_1)^2 = q_1p + r, \quad -(ny_1)^2 - 1 = q_2p + r$$

rezultă:

$$(nx_1)^2 + (ny_1)^2 + 1 = (q_1 - q_2)p = mp.$$

şi, notînd $nx_1 = x$, $ny_1 = y$ obţinem:

$$x^2 + y^2 = mp.$$

Dînd lui $n$ o infinitte de valori prime cu $p$, de exemplu $n = k^2p + 1$, $k \in \mathbb{N}^*$ rezultă afirmaţia enunţului.

**II.111°.** Să se arate că $n!$ nu poate fi pătrat perfect, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

**R.** Demonstraţia teoremei BERTRAND — CEBÎŞEV pe care o vom folosi mai jos este dificilă, motiv pentru care o omitem. Pentru detalii, pot fi consultate lucrările fundamentale de teoria numerelor.

Presupunem că există $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, aşa încît $n!$ să fie pătrat perfect. Evident, în şirul $1, 2, \ldots, n$ există un număr prim $p$ maximal. Pentru ca $n!$ să fie pătrat perfect, este necesar ca exponentul la care figurează $p$ în descompunerea canonică a lui $n!$ (produs de factori primi între ei) să fie par. Aceasta înseamnă că printre numerele $1, 2, \ldots, n$ există, în afară de $p$, încă un număr care se divide prin $p$. Primul număr multiplu de $p$, după $p$, este $2p$, dar, potrivit teoremei BERTRAND — CEBÎŞEV, între $p$ şi $2p$ există cel puţin un număr prim, diferit de $p$ — se poate arăta mai mult, anume că pentru $a > 10$, între $a$ şi $2a$ există cel puţin două numere prime şi încă pentru fiecare $k \in \mathbb{N}^*$ există $n_k \in \mathbb{N}$ aşa încît pentru orice $n > n_k$, $n \in \mathbb{N}$ între $n$ şi $2n$ există cel puţin $k$ numere prime. Dar concluzia la care am ajuns este contrară proprietăţii de maximalitate a lui $p$, deci presupunerea făcută — că $n!$ este pătrat perfect pentru $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ — este falsă.

**II.112°.** Să se arate că ecuaţia:

$$3x^2 - 7y^2 + 1 = 0$$

are o infinitate de soluţii în numere întregi nenule.

**R.** Avem identitatea:

$$3(55a + 84b)^2 - 7(36a + 55b)^2 = 3a^2 - 7b^2$$

astfel ccă dacă $a$ şi $b$ sînt soluţii ale ecuaţiei, atunci şi $x = 55a + 84b$, $y = 36a + 55b$ sînt soluţii. Luînd, pentru început, $a = 3$, $b = 2$, obţinem o infinitate de soluţii.

**II.113°.** Să se găsească toate soluţiile în numere întregi ale sistemului.

$$x + y + z = 3,$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3.$$

**R.** Avem identitatea:

$$(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(x+y)(y+z)(z+x)$$

astfel, că, în baza ipotezelor:

$$8=(x+y)(y+z)(z+x)$$

Cum $x+y=3-z$, $y+z=3-x$, $z+x=3-y$, (1) devine:

$$8=(3-x)(3-y)(3-z). \qquad (1)$$

Rezultă de aici soluţiile:

$$(1, 1, 1), (-5, 5, 4), (4, -5, 4), (4, 4, -5).$$

**II.114°.** Dacă $p$ este un număr prim de forma $4k+1$, $k \in \mathbb{N}$, atunci numărul:

$$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]+1$$

se divide prin $p$.

**R.** Fie $p$ un număr prim de forma $4k+1$. Numărul:

$$1\cdot 2\cdot\ldots\frac{p-1}{2}=(-1)(-2)\ldots\left(-\frac{p-1}{2}\right)$$

dă prin împărţire la $p$ acelaşi rest ca şi numărul:

$$(p-1)(p-2)\ldots\left(p-\frac{p-1}{2}\right).$$

Dar ultimul număr poate fi reprezentat sub forma de mai jos, dacă scriem factorii în ordinea inversă:

$$\frac{p+1}{2}\left(\frac{p+1}{2}+1\right)\ldots(p-2)(p-1).$$

Dacă înmulţim expresia de mai sus cu $\left(\frac{p-1}{2}\right)!$, cum $\frac{p+1}{2}=\frac{p-1}{2}+$ $+1$, obţinem că numărul la care am ajuns, $(p-1)!$, dă prin împărţire la $p$ acelaşi rest ca şi $\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2$. Deoarece, conform teoremei lui Wilson, numărul $(p-1)!+1$ se divide la $p$, rezultă că şi numărul:

$$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2+1$$

se divide la $p$.

**II.115°.** Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, numărul:

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}\, 2^{3k}$$

nu se divide cu 5.

**R.** Succesiv:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{3k} C_{2n+1}^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} 8^k C_{2n+1}^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} (5+3)^k C_{2n+1}^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} 3^k C_{2n+1}^{2k+1} \pmod 5.$$

Avem, tot după NEWTON:

$$(1+\sqrt{3})^{2n+1} = 1 + 3^{\frac{1}{2}} C_{2n+1}^1 + 3^{\frac{2}{2}} C_{2n+1}^2 + \ldots + 3^{\frac{2n+1}{2}} C_{2n+1}^{2n+1},$$

$$(1-\sqrt{3})^{2n+1} = 1 - 3^{\frac{1}{2}} C_{2n+1}^1 + 3^{\frac{2}{2}} C_{2n+1}^2 + \ldots + 3^{\frac{2n+1}{2}} C_{2n+1}^{2n+1}$$

sau, scăzînd:

$$(1+\sqrt{3})^{2n+1} - (1-\sqrt{3})^{2n+1} = 2\sqrt{3}\,(C_{2n+1}^1 + 3C_{2n+1}^3 + \ldots + 3^n C_{2n+1}^{2n+1})$$

de unde:

$$S_n \overset{\text{mod } 5}{\equiv} \frac{(1+\sqrt{3})^{2n+1} - (1-\sqrt{3})^{2n+1}}{2\sqrt{3}} = u_n$$

şi încă:

$$u_{n+2} = 8u_{n+1} - 4u_n$$

cu $u_1 = 6$, $u_2 = 44$, $u_3 = 328$ etc.

Se demonstrează prin inducţie că:

$u_{12k+1} \equiv 1 \pmod 5$

$u_{12k+2} \equiv 4 \pmod 5$

$u_{12k+3} \equiv 3 \pmod 5$

$u_{12k+4} \equiv 3 \pmod 5$

$u_{12k+5} \equiv 2 \pmod 5$

$u_{12k+6} \equiv 4 \pmod 5$

$u_{12k+7} \equiv 4 \pmod 5$

$u_{12k+8} \equiv 1 \pmod 5$

$u_{12k+9} \equiv 2 \pmod 5$

$u_{12k+10} \equiv 2 \pmod 5$

$u_{12k+11} \equiv 3 \pmod 5$

$u_{12k+12} \equiv 1 \pmod 5$

oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, fapt ce dovedeşte că $S_n$ nu se divide la 5, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

**II.116°.** Fie $m \in \mathbb{N}^*$. Să se construiască o funcţie $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ care ia fiecare valoare $n \in \mathbb{N}^*$ de exact $m$ ori.

**R.** Luăm $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ astfel:

$$f(n) = \left[\frac{n-1}{m}\right]_* + 1.$$

**II.117°.** Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi fie $A$ o mulţime finită de sisteme:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

de numere naturale.

Să se arate că există numerele naturale $b_1, b_2, \ldots, b_n$ astfel încît pentru orice $a, c \in A$, cu $a \neq c$, are loc:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \neq \sum_{i=1}^{n} b_i c_i.$$

**R.** Raţionăm prin inducţie după $n$.

Pentru $n = 1$ propoziţia se verifică deoarece $\alpha_1\gamma_1 = \beta_1\gamma_1$ implică $\alpha_1 = \beta_1$.

Presupunem afirmaţia adevărată pentru un $n$ oarecare. Pentru a arăta că:

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)\gamma_i \neq 0 \tag{*}$$

unde $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$, $\gamma_i \in \mathbb{N}^*$ $(\forall)$ $i \in \overline{1, n}$ îl alegem pe $\gamma_{n+1}$ aşa ca $\gamma_{n+1} > \max \left| \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)\gamma_i \right|$, corespunzător tuturor perechilor de sisteme $\alpha, \beta \in A$. În felul acesta:

$$|(\alpha_{n+1} - \beta_{n+1})\gamma_{n+1}| > \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)\gamma_i$$

oricare ar fi sistemele $\alpha, \beta \in A$.

Deci inegalitatea (*) se verifică.

**II.118°.** Să se arate că dacă un întreg se poate reprezenta sub forma:

$$x^2 - 3y^2,$$

atunci el se poate reprezenta sub această formă într-o infinitate de moduri.

**R.** Evident:

$$(2x + 3y)^2 - 3(x + 2y)^2 = x^2 - 3y^2$$

şi dacă $m$ admite reprezentarea $x^2 - 3y^2$ atunci admite o infinitate de astfel de scrieri.

**II.119°.** Să se arate că toţi coeficienţii din dezvoltarea după Newton a expresiei:

$$(a + b)^n$$

sînt impari dacă şi numai dacă $n$ este forma $2^k - 1$, fiind un număr natural.

**R.** Pentru $n \leqslant 8$ afirmaţia se verifică direct. De aceea, este suficient, presupunînd că, pentru $n > 8$, afirmaţia este adevărată pentru binoamele:

$$(a+b),\ (a+b)^2, \ldots, (a+b)^{n-1}$$

să demonstrăm afirmaţia şi pentru binomul $(a+b)^n$. Coeficienţii dezvoltării acestui binom sînt, însă, cu excepţia celor extremi (egali cu 1), numerele:

$$\frac{n}{1},\ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \ldots, \frac{n(n-1)\ldots 2}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)}$$

dar aceştia din urmă, din cauză că $n_1 < n$, vor fi impari cu toţii dacă şi numai dacă $n_1$ are forma $2^k - 1$, adică $n$ are forma:

$$2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1.$$

**II.120°.** În cîte moduri se poate reprezenta $2^n$ ca sumă de patru pătrate de numere naturale?

**R.** Fie:

$$2^n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \tag{1}$$

Fie $p$ cea mai mare putere a lui 2 pentru care $2^p$ divide fiecare din numerele $a, b, c, d$. Împărţind ambii membrii ai egalităţii (1) prin $2^{2p}$, găsim:

$$2^{n-2p} = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 \tag{1'}$$

unde

$$2^p a_1 = a,\ 2^p b_1 = b,\ 2^p c_1 = c,\ 2^p d_1 = d,$$

şi cel puţin unul din numerele $a_1, b_1, c_1, d_1$ este impar.

Dacă din cele patru numere $a_1, b_1, c_1, d_1$ numai unul sau trei sînt impare, atunci numărul:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2$$

este impar şi inegalitatea (1') este imposibilă.

Dacă din numerele $a_1, b_1, c_1, d_1$ două, de exemplu $a_1$ şi $b_1$, sînt impare, $a_1 = 2k + 1$ şi $b_1 = 2l + 1$ iar celelalte două, $c_1, d_1$ sînt pare, $c_1 = 2m$ şi $d_1 = 2n_1$, atunci:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 + 4l + 1 + 4m^2 + 4n_1^2 = 2^{n-2p}$$

sau:

$$2k^2 + 2k + 2l^2 + 2l + 1 + 2m^2 + 2n_1^2 = 2^{n-2p-1}$$

absurd, întrucît:
$2^{n-2p-1}$ nu are divizori impari (dacă $n = 2p + 1$, $k = l = m = n_1 = 0$ atunci $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $c_1 = 0$, $d_1 = 0$ soluţie care dă $n = 1$ dar restrînge generalitatea).

Dacă însă fiecare din cele patru numere, $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1$ sînt impare, $a_1 = 2k + 1$, $b_1 = 2l + 1$, $c_1 = 2m + 1$, $d_1 = 2n_1 + 1$, atunci:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 + 4l + 1 + 4m^2 + 4m + $$
$$+ 1 + 4n_1^2 + 4n_1 + 1 = 2^{n-2p}$$

sau:

$$k^2 + k + l^2 + l + m^2 + m + n_1^2 + n_1 + 1 = 2^{n-2p-2}$$

sau:

$$k(k + 1) + l(l + 1) + m(m + 1) + n_1(n_1 + 1) + 1 = 2^{n-2p-2}.$$

Însă produsul a două numere întregi consecutive este totdeauna un număr par (unul din factorii produsului este obligatoriu par). Prin urmare, expresia din paranteza dreaptă este un număr impar.

Rămîne de studiat cazul în care: $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $c_1 = 1$, $d_1 = 1$, deci:

$$(2^p)^2 + (2^p)^2 + (2^p)^2 + (2^p)^2 = 2^{2p+2}.$$

În felul acesta, $2^n$ se descompune în mod unic, pentru $n$ par (pentru $n$ impar am văzut că nu este posibilă o descompunere de tipul cerut), $n = 2s$, $s \in \mathbb{N}$, sub forma:

$$2^{2s} = (2^{s-1})^2 + (2^{s-1})^2 + (2^{s-1})^2 + (2^{s-1})^2.$$

**II.121°.** Să se arate că există o infinitate de numere naturale $n$ așa încît:

$$n \mid 2^n + 1.$$

**R.** Un exemplu de șir infinit de tip cerut este $\{3^k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Vom dovedi prin inducție. Avem $3 \mid 2^3 + 1$. Presupunem că pentru un $k \in \mathbb{N}$ oarecare:

$$3^k \mid 2^{3^k} + 1;$$

conform identității:

$$2^{3^{k+1}} + 1 = (2^{3^k} + 1)(2^{2 \cdot 3^k} - 2^{3^k} + 1)$$

deoarece:

$$2^{2 \cdot 3^k} - 2^{3^k} + 1 = 2^{2 \cdot 3^k} + 2 - (2^{3^k} + 1),$$

$$3 \mid 2^{2 \cdot 3^k} + 2$$

urmează că:

$$2^{3^{k+1}} + 1 \,\vdots\, 3^{k+1}$$

și, conform principiului inducției, $3^k \mid 2^{3^k} + 1$, $(\forall)\ k \in \mathbb{N}$.

**II.122°.** Să se arate că nu există nici un $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ așa încît:

$$n \mid 2^n - 1.$$

**R.** Presupunem, prin absurd, că există întregi pozitivi $n > 1$ așa ca $n|2^n-1$. Fie $m$ cel mai mic dintre ei. Conform teoremei lui EULER:

$$m|2^{\varphi(m)} - 1,$$

(evident, dacă există, $m$ trebuie să fie impar). Dar, cel mai mare divizor comun al numerelor $2^a - 1$, și $2^b - 1$ este $2^{(a,b)_*} - 1$, după cum se poate constata, scriind descompunerile canonice ale lui $a$ și $b$.

Pentru $a = m$, $b = \varphi(m)$, urmează că $m \mid 2^{(m, \varphi(m))_*} - 1$ căci, cum $m$ divide pe $2^m - 1$ și pe $2^{\varphi(m)} - 1$, divide și pe c.m.m.d.c. al acestor numere. Deoarece $m > 1$, avem $2^{(m, \varphi(m))_*} - 1$ deci $(m, \varphi(m))_* > 1$ și $1 < (m, \varphi(m))_* \leqslant \varphi(m) \leqslant m$ și încă $(m, \varphi(m))_* | m | 2^{(m, \varphi(m))_*} - 1$, contrar proprietății de minimalitate a lui $m$.

**II.123°.** Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{b} \left[\frac{ka}{b}\right]_* + \sum_{k=1}^{a} \left[\frac{kb}{a}\right]_* = ab + (a, b)_*.$$

**R.** Să presupunem, pentru început, că $(a, b)_* = 1$. Fie $r_k$ restul împărțirii lui $ka$ la $b$; cum $r_k < b$, vom obține:

$$\left[\frac{ka}{b}\right]_* = \frac{ka - r_k}{b}$$

și, sumînd:

$$\sum_{k=1}^{b} \left[\frac{ka}{b}\right]_* = \sum_{k=1}^{b} \frac{ka - r_k}{b} = \frac{a}{b} \sum_{k=1}^{b} k - \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{b} r_k.$$

Dar $r_i \neq r_j$, pentru $i \neq j$ deoarece cînd $k$ parcurge mulțimea $\{1, 2, \ldots, b\}$, $r_k$ parcurge sistemul complet de resturi $0, \ldots, b - 1$, astfel că egalitatea de mai sus devine:

$$\sum_{k=1}^{b} \left[\frac{ka}{b}\right]_* = \frac{ab + a - b + 1}{2}.$$

Analog:

$$\sum_{k=1}^{a} \left[\frac{kb}{a}\right]_* = \frac{ab - a + b + 1}{2}.$$

Sumînd cele două relații, o obținem pe cea din enunț.

Să presupunem acum $(a, b)_* = d \neq 1$, deci $a = \alpha d$, $b = \beta d$, cu $(\alpha, \beta)_* = 1$. Vom obține:

$$\sum_{k=1}^{b} \left[\frac{ka}{b}\right]_* + \sum_{k=1}^{a} \left[\frac{kb}{a}\right]_* = \sum_{k=1}^{\beta d} \left[\frac{k\alpha}{\beta}\right]_* + \sum_{k=1}^{\alpha d} \left[\frac{k\beta}{\alpha}\right]_* =$$

$$= \sum_{i=0}^{d-1} \left( \sum_{k=i\beta+1}^{(i+1)\beta} \left[\frac{k\alpha}{\beta}\right]_* + \sum_{k=i\alpha+1}^{(i+1)\alpha} \left[\frac{k\beta}{\alpha}\right]_* \right).$$

Pe de altă parte:

$$\sum_{k=i\beta+1}^{(i+1)\beta} \left[\frac{k\alpha}{\beta}\right]_* + \sum_{k=i\alpha+1}^{(i+1)\alpha} \left[\frac{k\beta}{\alpha}\right]_* = 2i\alpha\beta + \sum_{k=1}^{\beta} \left[\frac{k\alpha}{\beta}\right]_* + \sum_{k=1}^{\alpha} \left[\frac{k\beta}{\alpha}\right]_*.$$

Ca atare, ţinînd seama de cele arătate în prima fază a demonstraţiei:

$$\sum_{k=1}^{b}\left[\frac{ka}{b}\right]_* + \sum_{k=1}^{a}\left[\frac{kb}{a}\right]_* = 2\alpha\beta\sum_{i=1}^{d-1} i + d\left(\sum_{k=1}^{\beta}\left[\frac{k\alpha}{\beta}\right]_* + \sum_{k=1}^{\alpha}\left[\frac{k\beta}{\alpha}\right]_*\right) =$$

$$= \alpha\beta + d(d-1) + d(\alpha\beta+1) = d^2\alpha\beta + d = (a,\ b)_* + ab$$

fapt ce sfîrşeşte demonstraţia.

**II.124°.** Să se determine cel mai mic număr natural nenul $n$ aşa încît $\frac{7^n - 1}{29} \in \mathbb{N}$.

**R.** Potrivit teoremei lui Fermat:

$$7^{29} - 7 \,\vdots\, 29$$

astfel că $n = 28$ ar putea fi numărul căutat. Fie $m$ cel mai mic întreg pozitiv pentru care:

$$\frac{7^m - 1}{29} \in \mathbb{N}.$$

Deci:

$$7^{28} - 1 = 29\, k_1,\ k_1 \in \mathbb{N},$$

$$7^m - 1 = 29\, k_2,\ k_2 \in \mathbb{N}, \quad m \leqslant 28,\ m \in \mathbb{N}.$$

Ca atare:

$$7^{28} - 1 - (7^m - 1) = 7^m(7^{28-m} - 1) = 29\,(k_1 - k_2)$$

deci:

$$7^{28-m} - 1 \,\vdots\, 29$$

deci $28 - m \geqslant m$, avînd în vedere proprietatea de minimalitate a lui $m$. Deci $m \leqslant 14$.

Dar:

$$\frac{7^{14} - 1}{29} \in \mathbb{N}$$

căci:

$$\frac{7^{14} - 1}{29} = \frac{49^7 - 1}{29} = \frac{(58-9)^7 - 1}{29} = k_3 - \frac{9^7 + 1}{27} = k_3 - \frac{9 \cdot 81^3 + 1}{29} =$$

$$= k_3 - \frac{9(87-6)^3 + 1}{29} = k_4 + \frac{1943}{29} = k_5$$

unde $k_3, k_4\, k_5 \in \mathbb{Z}$.

Aşadar:

$$7^{14} - 1 = 29k_6$$

$$7^m - 1 = 29k_7$$

unde $k_6, k_7 \in \mathbb{N}$.

Procedînd analog, găsim $m \leqslant 7$ şi:

$$\frac{7^7-1}{29} \in \mathbb{N}$$

afirmaţie ce se verifică prin calcule. Pentru $n < 7$ se constată, prin calcul, că:

$$\frac{7^n-1}{29} \notin \mathbb{N}$$

deci $n = 7$ este cel mai mic număr care satisface afirmaţia din enunţ.

**II.125°.** Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale $a$ astfel că pentru orice număr natual $n$, numărul:

$$z = n^4 + a$$

nu este prim.

**R.** Pornim de la identitatea:

$$n^4 + a = (n^2 + \sqrt{a} + n\sqrt[4]{4a})(n^2 + \sqrt{a} - n\sqrt[4]{4a}),$$

şi pentru $a = \frac{k^4}{4}$, fiecare paranteză este un număr întreg, în care $k = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, astfel ca $a$ să fie întreg.

Dar, în acest caz:

$$z = (n^2 + 2m^2 + 2mn)(n^2 + 2m^2 - 2mn)$$

şi:

$$n^2 + 2m^2 + 2mn > n^2 + 2m^2 - 2mn = (n-m)^2 + m^2 \geqslant m^2 > 1$$

pentru $m \geqslant 2$, astfel că cei doi factori sînt mai mari decît 1 şi deci $z$ nu este, în acest caz, prim.

Se obţin deci, pentru $a$, numerele:

$$8^2, 18^2, \ldots, (2m^2)^2, \ldots$$

**II.126°.** Să se găsească toate numerele naturale impare $n$ aşa încît:

$$n \mid 3^n + 1.$$

**R.** Există un singur astfel de număr impar, anume $n = 1$. În adevăr să presupunem că există $n > 1$, impar, aşa încît $n \mid 3^n + 1$. Atunci, evident, $n \mid 9^n - 1$. Fie $m$ cel mai mic număr impar strict mai mare decît 1 aşa încît $m \mid 9^m - 1$. Evident, $(n; 9)_* = 1$. Deoarece, conform teoremei lui Euler, $m \mid 9^{\varphi(m)} - 1$, rezultă că $m \mid 9^d - 1$ unde $d = (m, \varphi(m))_*$. Însă $d > 1$ deoarece dacă $d$ ar fi egal cu 1, ar rezulta $m \mid 8$, absurd căci $m$ este impar şi $n \neq 1$. Dar $1 < d \leqslant \varphi(m) < m$ şi $d \mid m \mid 9^d - 1$, absurd căci se contrazice minimalitatea lui $m$.

**II.127°.** Să se arate că pentru fiecare număr prim impar $p$, există o infinitate de numere naturale $n$ așa încît:

$$p \mid n2^n + 1.$$

**R.** Dacă $p$ este număr prim impar și $n = (p-1)(kp+1)$ unde $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, atunci $n \equiv -1 \pmod p$ și $p - 1 \mid n$. Conform teoremei lui FERMAT, rezultă $2^n \equiv 1 \pmod p$ deci $n2^n + 1 \equiv 0 \pmod p$.

De aici rezultă existența unei infinități de numere compuse de forma $n2^n+1$, $n \in \mathbb{N}$; numerele $n2^n+1$, $n \in \mathbb{N}$ se numesc numerele lui CULLEN și s-a demonstrat că pentru $1 < n < 141$ toate aceste numere sînt compuse iar pentru $n = 141$ acest număr este prim.

Nu se știe dacă există o infinitate de numere prime CULLEN (cf. SIERPINSKI, *250 problems in elementary number theory*, PWN — Polish scientific publishers Warszawa, 1970, p. 30).

**II.128°.** Să se rezolve în numere întregi ecuația:

$$x(x^2+1) = 2y^4.$$

**R.** Înmulțind cu 8 ambii membri ai ecuației date, obținem:

$$8x(x^2+1) = (2y)^4$$

sau:

$$(x+1)^4 - (x-1)^4 = (2y)^4$$

adică, altfel scris:

$$(x+1)^4 = (x-1)^4 + (2y)^4 \tag{1}$$

Dar ecuația:

$$x^4 + y^4 = z^4 \tag{2}$$

nu are soluții în numere naturale nenule, deci soluțiile ecuației (1) vor fi date de sistemele:

$$\begin{cases} x+1 = \pm(x-1) \\ 2y = 0 \end{cases}$$

respectiv:

$$\begin{cases} x+1 = \pm 2y \\ x-1 = 0 \end{cases}$$

adică vor fi $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$.

**II.129°.** Să se studieze existența soluțiilor în numere naturale ale ecuației:

$$x^2 + y^2 + z^2 = kxyz.$$

**R.** Fie $x$, $y$, $z$, $k$ patru numere naturale care satisfac ecuaţia:

$$x^2 + y^2 + z^2 = kxyz \tag{x}$$

Să arătăm pentru început că:

$$x \leqslant \frac{kyz}{2}, y \leqslant \frac{kxz}{2}, z \leqslant \frac{kxy}{2} \tag{xx}$$

În adevăr, dacă, de exemplu, $z > \frac{kxy}{2}$, atunci, deoarece pentru o soluţie $(x_1, y_1, z_1, k_1)$ formată cu cel mai mic $z$ (aleasă dintre toate soluţiile în numere naturale, dacă acestea există):

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = k_1x_1y_1z_1$$

are loc şi:

$$x_1^2 + y_1^2 + (k_1x_1y_1 - z_1)^2 = k_1x_1y_1 (k_1x_1y_1 - z_1)$$

după cum se vede imediat din calcule şi:

$$k_1x_1y_1 - z_1 < z_1,$$

contrar ipotezei.

Presupunem, fără a restrînge generalitatea, că $x \leqslant y \leqslant z$, dată fiind simetria ecuaţiei, în caz contrar schimbăm rolul necunoscutelor între ele. De aici rezultă:

$$y \leqslant z \leqslant \frac{kxy}{2}$$

deci:

$$1 \leqslant \frac{kx}{2}$$

adică:

$$kx \geqslant 2.$$

Evdent, relaţia (x) se poate scrie sub forma:

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{kxy}{2} - z\right)^2 = \left(\frac{kxy}{2}\right)^2.$$

Deoarece $z \leqslant \frac{kxy}{2}$, atunci, prin înlocuirea în membrul stîng al ultimei egalităţi a numărului $z$ cu $y \leqslant z$, membrul stîng al acesteia creşte (sau, în cazul $y = z$, nu se schimbă). Prin urmare:

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{kxy}{2} - y\right)^2 \geqslant \frac{k^2x^2y^2}{4}$$

de unde, desfăcînd parantezele:

$$x^2 + 2y^2 \geqslant kxy^2 \tag{1}$$

Cum $x \leqslant y$, găsim:

$$y^2 + 2y^2 \geqslant kxy^2$$

deci $kx \leqslant 3$.

În felul acesta, $2 \leqslant kx \leqslant 3$. Dacă $xk = 2$, atunci $(x)$ devine:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2yz$$

adică:

$$x^2 + (y - z)^2 = 0$$

deci $x = 0$, $y = z$, soluţie inacceptabilă. Ca atare, $kx = 3$. De aici $k = 1$ şi $x = 3$, respectiv $k = 3$ şi $x = 1$.

Din (1), făcînd $kx = 3$, deducem:

$$x^2 + 2y^3 \geqslant 3y^2$$

adică $x^2 \geqslant y^2$, deci $x \geqslant y$ şi cum — s-a presupus — $x \leqslant y$, rezultă $x = y$.

Ecuaţia devine:

$$2x^2 + z^2 = 3xz$$

sau:

$$(z - x)(z - 2x) = 0.$$

Deducem $z = x$ sau $z = 2x$. Dar, deoarece:

$$z \leqslant \frac{kxy}{2} = \frac{3y}{2} = \frac{3x}{2}$$

nu putem avea $z = 2x$, deci $z = x$. Ca atare, $x = y = z$. Cum $kx = 3$, dacă avem $k = 3$ atunci $x = y = z = 1$ şi dacă avem $k = 1$ atunci $x = y = z = 3$.

Am văzut însă că dacă $(x, y, z)$ este soluţie a problemei, avînd pe $k$ fixat atunci şi $(x, y, kxy - z)$ este soluţie a problemei, deci, cum pentru $k = 3$ ecuaţia are pe $(1, 1, 1)$ drept soluţie, avem şi pe $(1, 1, 2)$ drept soluţie, deci şi pe $(1, 2, 1)$ şi deci şi pe $(1, 2, 5)$ etc.

În final, conchidem că ecuaţia propusă are o infinitate de soluţii.

**II.130°.** Să se arate că dacă $a, b, c$ sînt numere întregi şi $n \in \mathbb{N}^* - \{1, 2, 3\}$, atunci există un $k \in \mathbb{Z}$ aşa încît nici unul din numerele:

$$k + a,\ k + b,\ k + c$$

nu este divizibil prin $n$.

**R.** Fie $r_1$, $r_2$ şi $r_3$, resturile împărţirii prin $n$ ale numerelor $-a$, $-b$, $-c$. Astfel, $r_1$, $r_2$ şi $r_3$ sînt întregi din mulţimea $\{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$ şi deoarece numerele $r_1$, $r_2$, $r_3$ sînt în număr de trei în timp ce $n > 3$, rezultă că există $r \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ așa încît $r \neq r_1$, $r \neq r_2$, $r \neq r_3$. Dacă am avea $n | a + r$ atunci, în ipoteza că $-a \equiv r_1 \pmod{n}$, vom avea $n | r - r_1$.

Cum $r$ și $r_1$ sînt întregi, $0 \leqslant r, r_1 < n$, rezultă $r = r_1$, contrar definiției lui $r$. Într-un mod analog arătăm că $n \nmid b + r$ și și $n \nmid c + r$ deci putem lua $k = r$.

**II.131°.** Dacă $p$ este număr prim, să se rezolve în numere naturale ecuația:

$$2^{4n+2} + 1 = 5p.$$

**R.** Considerăm identitatea:

$$2^{4n+2} + 1 = (2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1)(2^{n+1} + 2^{2n+1} + 1).$$

Deoarecea $5 | 2^2 + 1 | 2^{4n+2} + 1$ și pentru $n > 1$:

$$2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1 = 2^{n+1}(2^n - 1) + 1 > 2^3 \cdot 3 + 1 = 25$$

rezultă că numărul $\frac{1}{5}(2^{4n+2} + 1)$ este produsul a doi factori supraunitari ceea ce dovedește că nu poate fi egal cu un număr prim. Pentru $n = 1$ ecuația devine $65 = 5p$ deci $p = 13$ care verifică.

**II.132°.** Dacă $a$, $b$, $c \in \mathbb{N}^*$, atunci:

a°). $$[a, b, c]_* = \frac{abc\,(a, b, c)_*}{(a, b)_*(b, c)_*(c, a)_*}$$

b°). $$\frac{[a, b, c]_*^2}{[a, b]_*\,[b, c]_*\,[c, a]_*} = \frac{(a, b, c)_*^2}{(a, b)_*\,(b, c)_*\,(c, a)_*}.$$

**R.** Are loc formula de distributivitate:

$$([a, b]_*, c)_* = [(a, c)_*, (b, c)_*]_*$$

și cum:

$$[a, b]_*, c) = \frac{ab}{(a, b)_*}$$

rezultă:

$$[a, b, c]_* = [[a, b]_*, c]_* = \frac{[a, b]_*\,c}{([a, b]_*, c)_*} = \frac{abc}{(a, b)_*\,[(a, c)_*, (b, c)_*]_*} =$$

$$= \frac{abc\,((a, c)_*\,(b, c)_*)_*}{(a, b)_*\,(b, c)_*\,(c, a)_*} = \frac{abc\,(a, b, c)_*}{(a, b)_*\,(b, c)_*\,(c, a)_*}.$$

Analog pentru b°).

**II.133°.** Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $n$ numere prime sînt în progresie aritmetică atunci rația progresiei se divide prin fiecare număr prim $p < n$.

**R.** Fie:

$$a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n - 1) d,$$

cele $n$ numere prime în progresie aritmetică și $p < n$ un număr prim. Prin împărțirea la $p$ a acestor numere vom obține într-o anumită ordine, resturile $1, 2, \ldots, p - 1$ dacă $a \neq p$ sau resturile $0, 1, 2, \ldots, p - 1$ dacă $p = a$. Deoarece numărul lor este mai mare decît numărul resturilor, cel puțin două dintre ele vor da același rest. Fie:

$$a + id = q_1 p + r, a + jd = q_2 p + r; \; 0 \leqslant i < j \leqslant p - 1$$

de unde:

$$(j - i)d = (q_2 - q_1)p = \mathcal{M}p$$

deci:

$$p \mid (j - i)d$$

și cum $j - i < p$ deci $p \nmid j - i$, rezultă $p \mid d$ de unde și afirmația din enunț.

**II.134°.** Să se arate că există o infinitate de numere prime de forma $4m + 3$ și o infinitate de numere prime de forma $6m + 5$. Aici, $m \in \mathbb{N}^*$.

**R.** Fie $p$ un număr prim de forma $4k + 3$. (în particular, un astfel de număr există, anume 7). Există atunci un număr prim $p_1$ de forma $4k + 3$ cu $p_1 > p$. În adevăr, fie $N_1 = 4p! - 1$ care, evident, este de forma $4k + 3$. Dacă $N_1$ este prim, putem lua $p_1 = N_1 > p$. Dacă este compus, toți factorii săi sînt strict mai mari decît $p$ deoarece, în caz contrar, ar însemna că unul dintre aceștia se află între numerele $1, 2, \ldots, p$ deci $4p!$ s-ar divide cu el, absurd căci și $N_1$ se divide cu el. Cel puțin unul din factorii lui $N_1$ este de forma $4k + 3$ deoarece dacă toți ar fi de forma $4k + 1$, produsul lor ar fi de aceeași formă. Deci enunțul.

Analog pentru numerele de forma $6k + 5$.

**II.135°.** Să se arate că există o infinitate de perechi $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ cu proprietățile:

a°). $m$ și $n$ au aceeași factori primi;

b°). $m + 1$ și $n + 1$ au aceiași factori primi.

**R.** Numerele $m = 2^k - 2^k$ și $n = 2^k(2^k - 2)$, cu $k \in \mathbb{N} - \{1\}$ satisfac condițiilor enunțului (căci $m + 1 = 2^k$, și $n + 1 = (2^k - 1)^2$).

**II.136°.** Să se găsească toate numerele naturale $x$ astfel încît produsul cifrelor fiecărui număr $x$ să fie:

$$x^2 - 10x - 22.$$

**R.** Fie un număr format din cel puțin două cifre:

$$A = 10^{n-1} a_1 + 10^{n-2} a_2 + \ldots + 10^0 a_n$$

cu cifrele $a_1, \ldots, a_n$; să arătăm mai întîi că:

$$a_1 a_2 \ldots a_n \leqslant A.$$

Evident:

$$A - a_1 a_2 \ldots a_n = a_1 (10^{n-1} - a_2 a_3 \ldots a_n) + 10^{n-2} a_2 + \ldots + a_n$$

și deoarece $10 \geqslant a_i$, $(\forall)$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$, rezultă $A - a_1 \ldots a_n \geqslant 0$.

Deci este necesar că $x$ să verifice inegalitatea :

$$x \geqslant x^2 - 10x - 22$$

care dă $x^2 - 11x - 22 \leqslant 0$, deci $\frac{11 - \sqrt{209}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{11 + \sqrt{209}}{2}$ şi $x \in \mathbb{N}$.

Dar, pe de altă parte, produsul cifrelor lui $x$ este număr pozitiv deci :

$$x^2 - 10x - 22 \geqslant 0$$

de unde $x \geqslant 12$. Rămîne $x = 12$.

**II.137°.** Să se determine cel mai mic număr natural $n$ care are următoarele proprietăţi :

a°). Numărul se termină cu cifra 6.

b°). Dacă se suprimă ultima cifră şi se scrie cifra 6 la începutul numărului, se obţine de patru ori numărul căutat.

**R.** Fie :

$$n = 10x + 6$$

numărul căutat şi fie $y$ numărul cifrelor sale. Trebuie să avem :

$$4(10x + 6) = 6 \cdot 10^{y-1} + x$$

sau :

$$13x = 2(10^{y-1} - 4)$$

Numărul $10^{y-1} - 4$ poate fi de forma 6, 69, 996,... şi trebuie găsit primul dintre ele care este divizibil cu 13. Rezultă numărul 99996 de unde $y = 5$ şi $x = 15384$ deci $n = 153846$.

Generalizare. Numerele $n$ care se bucură de proprietatea din enunţ au forma :

$$n = 153846\ 153846 \ldots 153846$$

**II.138°.** Prima cifră a unui număr este 1. Mutînd această cifră la sfîrşit, obţinem un număr de trei ori mai mare. Să se găsească un astfel de număr.

**R.** Un număr cu prima cifră 1 poate fi scris $10^m + x$, $x$ fiind un număr de $m$ cifre. Trecînd cifra 1 la sfîrşit, obţinem numărul $10x+1$. Condiţia problemei este :

$$3 \cdot 10^m = 7x + 1, \quad x \in \mathbb{N}.$$

Trebuie să găsim deci un număr de forma 3000 ... 0 care împărţit la 7 să dea restul 1. Obţinem numărul 300000 deci un număr dintre cele căutate este 142857.

**II.139°.** Să se găsească toţi $m \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ care au următoarea proprietate : există un polinom $f$ cu coeficienţi întregi astfel încît pentru nişte întregi $x, f(x)$ dă restul 0 prin împărţire la $m$, pentru nişte întregi $x, f(x)$ dă restul 1 prin împărţire la $m$ şi, pentru toţi întregii $x$, $f(x)$ dă restul 0 sau 1 prin împărţirea la $m$.

**R.** Numerele $m$ căutate sînt puteri ale numerelor prime (cu exponent natural) şi numai acestea. În adevăr, dacă $m = p^k$, $p$ prim şi $k \in \mathbb{N}$, atunci pentru $f(x) = x^{\varphi(p^k)}$, $\varphi$ fiind indicatorul lui EULER, în cazul cînd $p \nmid x$, conform teoremei lui EULER avem $f(x) \equiv (\mod p^k)$ iar în cazul cînd $p|x$, cum $\varphi(p^k) \geq p^{k-1} \geq k$ (lucru ce se poate ușor arăta, de pildă, prin inducție) avem $p^k|x^k$ și, în consecință, $p^k|x^{\varphi(p^k)}$. Deci, $f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$.

Dacă $m$ este număr natural strict mai mare decît 1, care nu este puterea unui număr prin, atunci $m$ are cel puțin doi divizori primi distincți, fie aceștia $p$ și $q$. Presupunem că $f$ este un polinom cu coeficienți întregi și că există întregii $x_1$, și $x_2$ așa încît $f(x_1) \equiv 0 \pmod m$ și $f(x_2) \equiv 1 \pmod m$. Vom avea atunci, întrucît $p|m$, și $q|m$, că $f(x_1) \equiv 0 \pmod p$ și $f(x_2) \equiv 1 \pmod q$. Deoarece $p$ și $q$ sînt numere prime diferite, conform teoremei chineze a resturilor, există un întreg $x_0$ așa ca $x_0 \equiv x_1 \pmod p$ și $x_0 \equiv x_2 \pmod q$. Urmează că $f(x_0) \equiv f(x_1) \equiv 0 \pmod p$ și $f(x_0) \equiv f(x_2) \pmod q$. Prima din aceste congruențe implică faptul că nu putem avea $f(x_0) \equiv 1 \pmod m$. Analog, nu putem avea $f(x_0) \equiv 0 \pmod p$. Ca urmare, $f(x_0)$ nu dă nici restul 1 la împărțirea cu $m$. Astfel, dacă $m$ nu este o putere a unui număr prim, atunci nu există nici un polinom $f$ cu coeficienți întregi care să satisfacă enunțul.

**II.140°.** Să se arate că există o infinitate de numere tetraedrale:

$$T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2),\ n \in \mathbb{N}^*,$$

prime între ele două cîte două.

**R.** Vom arăta întîi că dacă pentru un număr $m \in \mathbb{N}$, numerele tetraedrale $a_1, \ldots, a_m$ sînt relativ prime două cîte două, atunci există un număr tetraedral $T > a_m$ așa ca $(T, a_1, \ldots, a_m)_* = 1$. În adevăr fie $a = a_1 a_2 \ldots a_m$. Punem $T = T_{6a+1} = (6a+1)(3a+1)(2a+)1$; este clar că $T$ este relativ prim cu $a$ deci este relativ prim cu fiecare dintre numerele $a_1, \ldots, a_m$ și $T > a \geq a_m$.

În felul acesta, construim un șir infinit de numere tetraedrale cu proprietatea din enunț, luînd, de exemplu $T_1 = 1$, $T_2 = 4$, $T_3 = 35$, etc

**II.141°.** Fie $m$ și $n$ două numere naturale astfel încît $(m, n)_* = 1$. Să se demonstreze că dacă fracțiile:

$$\frac{m+n}{m}, \frac{2(m+n)}{m}, \frac{3(m+n)}{m}, \ldots, \frac{(m-1)(m+n)}{m},$$

$$\frac{m+n}{n}, \frac{2(m+n)}{n}, \frac{3(m+n)}{n}, \ldots, \frac{(n-1)(m+n)}{n}$$

se reprezintă pe o axă, atunci în fiecare din intervalele:

$$(1, 2), (2, 3), (2, 4), \ldots, (m+n-2,\ m+n-1)$$

se află una și numai una din cele $(m+n-2)$ fracții.

**R.** Să observăm mai întîi că nici una din fracțiile considerate nu este număr întreg. În adevăr, dacă fracția (alegem una din primul șir, fără a restrînge prin aceasta generalitatea):

$$\frac{k(m+n)}{m}$$

ar fi număr întreg, atunci, cum $k < m$, ar trebui ca $m$ şi $m + n$ să aibă un divizor comun deci ca $m$ şi $n$ să aibă un divizor comun, contrar ipotezei.

De asemenea, două fracţii oarecare din cele considerate nu pot fi egale. În adevăr, dacă :

$$\frac{k(m+n)}{m} = \frac{l(m+n)}{n}$$

rezultă :

$$kn = ml$$

de unde $m|kn$ şi cum $(m, n)_* = 1$, rezultă $m|k$, absurd căci $k < m$

Fie $A$ un întreg mai mic decît $m + n$ şi fie :

$$\frac{m+n}{m}, \frac{2(m+n)}{m}, \ldots, \frac{k(m+n)}{m}$$

fracţiile din primul şir mai mici decît $A$. Din :

$$\frac{k(m+n)}{m} < A$$

rezultă, evident :

$$k < \frac{Am}{m+n}$$

şi, cum $k$ este cel mai mare număr natural cu proprietatea anterioară, rezultă :

$$k = \left[\frac{Am}{m+n}\right]_*$$

adică numărul tuturor fracţiilor din primul şir mai mici decît $A$ este :

$$\left[\frac{Am}{m+n}\right]_*.$$

Analog, deducem că numărul tuturor fracţiilor din al doilea şir mai mici decît $A$ este $\left[\frac{An}{m+n}\right]_*$. Deoarece numerele :

$$\frac{Am}{m+n}, \frac{An}{m+n}$$

nu sînt întregi (fiindcă $m$, $n$ şi $m+n$ sînt prime între ele două cîte două şi $m + n \nmid A$) şi cum :

$$\frac{Am}{m+n} + \frac{An}{m+n} = A$$

rezultă că :

$$\left[\frac{Am}{m+n}\right]_* + \left[\frac{An}{m+n}\right]_* = A - 1 \qquad (x)$$

deoarece, din definiţia părţii întregi, $x - 1 < [x]_* \leqslant x$, şi avem:

$$\frac{Am}{m+n} - 1 < \left[\frac{Am}{m+n}\right]_* \leqslant \frac{Am}{m+n} \qquad (1)$$

$$\frac{An}{m+n} - 1 < \left[\frac{An}{m+n}\right]_* \leqslant \frac{An}{m+n}$$

deci, adunînd cele două relaţii:

$$A - 2 < \left[\frac{Am}{m+n}\right]_* + \left[\frac{Am}{m+n}\right]_* \leqslant A$$

adică:

$$\left[\frac{Am}{m+n}\right]_* + \left[\frac{An}{m+n}\right]_* = A$$

sau:

$$\left[\frac{Am}{m+n}\right]_* + \left[\frac{An}{m+n}\right]_* = A - 1$$

şi cum:

$$\left[\frac{Am}{m+n}\right]_* < \frac{Am}{m+n}, \left[\frac{Am}{m+n}\right] < \frac{An}{m+n}$$

(în cazul primei relaţii ar trebui ca numerele $\frac{Am}{m+n}$, $\frac{An}{m+n}$ să fie întregi deoarece în relaţiile (1) semnul $\leqslant$ devine $=$ cînd numerele $\frac{Am}{m+n}$, $\frac{An}{m+n}$ sînt întregi şi deci prima relatare are loc cînd avem simultan egalitate în (1) ori acest lucru nu este posibil fiindcă, am arătat că numerele $\frac{Am}{m+n}$, $\frac{An}{m+n}$ nu sînt întregi) rezultă (x) astfel că numărul fracţiilor din cele două şiruri mai mici decît $A$ este $A - 1$.

Să dăm acum lui $A$ valorile $1, 2, \ldots, m + n - 1$. Pentru $A = 1$ nici o fracţie din cele date nu este mai mică decît 1 deci în intervalul $(0, 1)$ nu se găseşte nici o fracţie. Pentru $A = 2$, conform celor arătate anterior, există $A - 1 = 1$, deci o singură fracţie mai mică decît 2 şi deci ea este situată în intervalul $(1, 2)$ (fiindcă în $(0, 1)$ nu se găseşte nici una). Pentru $A = 3$, în intervalul $(0, 3)$ avem $A - 1 = 2$ fracţii deci, cum una se găseşte deja în $(0, 2)$ (mai exact în $(1,2)$), rezultă că în intervalul $(2.3)$ se găseşte o singură fracţie. Repetînd raţionamentul pînă ajungem la intervalul $(m + n - 2,\ m + n - 1)$, obţinem afirmaţia din enunţ.

**II.142°.** Să se demonstreze că dacă fracţiile:

$$\frac{a_1}{p}, \frac{a_2}{p^2}, \frac{a_3}{p^3}, \ldots, \frac{a_n}{p^n}, \ldots$$

unde $p$ este un număr prim diferit de 2 şi 5, iar $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sînt numere întregi prime cu $p$, se dezvoltă în fracţii zecimale periodice simple, atunci primele cîteva fracţii (eventual una sau chiar niciuna) vor avea perioada de o singură cifră, iar fiecare din următoarele va avea perioada de $p$ ori mai mare decît precedenta.

**R.** Numărul cifrelor perioadelor fracţiilor $\frac{a_n}{p^n}$ şi $\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}$ sînt cei mai mici întregi pozitivi $k$ şi $m$ astfel ca $10^k - 1$ să se dividă prin $p^n$ şi respectiv $10^m - 1$ să se dividă prin $p^{n+1}$.

Să demonstrăm mai întîi că $m$ este multiplu de $k$. În adevăr, fie $m = qk + r$, cu $0 \leqslant r < k$. Din :

$$10^k \equiv 1 \pmod{p^n}$$

rezultă :

$$10^{qk+r} \equiv 10^r \pmod{p^n}$$

adică :

$$10^m \equiv 10^r \pmod{p^n}$$

dar cum :

$$10^m \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$$

deci şi :

$$10^m \equiv 1 \pmod{p^n}$$

rezultă :

$$10^r \equiv 1 \pmod{p^n}$$

de unde $r = 0$ căci presupunînd $r \neq 0$, contrazicem minimalitatea lui $k$. Din :

$$10^m - 1 = 10^{qk} - 1 = (10^k - 1)(10^{(q-1)k} + 10^{(q-2)k} + \ldots + 10^k + 1)$$

şi din :

$$10^k \equiv 1 \pmod{p^n}$$

sau :

$$10^{ks} \equiv 1 \pmod{p^n}$$

rezultă că ultima paranteză a egalităţii precedente dă prin împărţirea la $p^n$, restul $q$. Urmează că dacă $10^k - 1$ nu se divide prin $p^{n+1}$, pentru ca $10^m - 1$ să se dividă prin $p^{n+1}$ trebuie ca $q$ să fie multiplu de $p$ deci $m = qk = \mathcal{M}pk$ şi din minimalitatea lui $m$, rezultă $m = pk$.

**II.143°.** Să se arate că există o infinitate de numere compuse de forma :

$$(n!)^2 + 1.$$

**R.** Conform teoremei lui Wilson, dacă $p$ este număr prim, atunci :

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Să arătăm că şi :

$$(p-n)!(n-1)! \equiv (-1)^n \pmod{p} \qquad \textbf{(1)}$$

$n$ fiind un număr natural cu proprietatea $1 < n < p$. Evident:

$$1 \equiv -(p-1) \pmod{p},$$
$$2 \equiv -(p-2) \pmod{p},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$n-1 \equiv -(p-n+1) \pmod{p}$$

deci, înmulțind aceste congruențe:

$$(p-1)!\,(n-1)! \equiv (-1)^n(p-1)(p-2)\dots(p-n+1) \pmod{p}.$$

Cum $p$ este prim, el este relativ prim cu fiecare dintre numerele $p-1$, $p-2,\dots,p-n+1$, deci și cu produsul lor și deci putem simplifica ultima congruență cu acest produs, obținînd tocmai (1).

Fie acum $m \in \mathbb{N}$ și fie $P_1$ mulțimea, infinită, a numerelor prime de forma $4m+1$. Fie $p = 4m+1$. Luăm $n = 2m+1$ care, evident, satisface condiției $1 < n < p$. Din (1) obținem:

$$(2m)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p} \pmod{(4m+1)}$$

deci există o infinitate de numere compuse de forma

$$(n!)^2 + 1.$$

**II.144°.** Să se găsească cea mai mare putere a lui 2 prin care se divide numărul:

$$[(1+\sqrt{3})^n]_*.$$

**R.** Avem:

$$[(1+\sqrt{3})^n]_* = \begin{cases}(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n - 1 & \text{dacă } n \text{ este par,}\\[2ex] (1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n & \text{dacă } n \text{ este impar.}\end{cases} \qquad (1)$$

În adevăr, numărul:

$$(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n$$

este întreg căci, potrivit dezvoltării binomului după Newton:

$$(1+\sqrt{3})^n = 1 + \sqrt{3}\,C_n^1 + (\sqrt{3})^2C_n^2 + \dots + (\sqrt{3})^kC_n^k + \dots + (\sqrt{3})^n$$

$$(1-\sqrt{3})^n = 1 - \sqrt{3}\,C_n^1 + (\sqrt{3})^2C_n^2 + \dots + (-\sqrt{3})^kC_n^k + \dots + (-\sqrt{3})^n$$

și, prin adunare:

$$(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n = 2(1 + 3C_n^2 + 3^2C_n^4 + \dots)$$

Pentru $n$ par, are loc:

$$0 < (1-\sqrt{3})^n < 1$$

deci:

$$[(1+\sqrt{3})^n]_* = (1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n - 1$$

iar pentru $n$ impar are loc:

$$-1 < (1-\sqrt{3})^n < 0$$

deci:

$$[(1+\sqrt{3})^n]_* = (1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n.$$

Formula (1) o mai putem scrie și sub forma:

$$[(1+\sqrt{3})^n]_* = (1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n - \frac{1+(-1)^n}{2}.$$

Vom distinge două cazuri:

a°). Numărul $n$ este par: $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. În acest caz:

$$[(1+\sqrt{3})^n]_* = [(1+\sqrt{3})^{2m}]_* = (1+\sqrt{3})^{2m} + (1-\sqrt{3})^{2m} - 1 =$$

$$= [(1+\sqrt{3})^2]^m + [1-\sqrt{3})]^m - 1 = (4+2\sqrt{3})^m + (4-2\sqrt{3})^m - 1 =$$

$$= 2^m[(2+\sqrt{3})^m + (2-\sqrt{3})^m] - 1$$

și cum numărul:

$$(2+\sqrt{3})^m + (2-\sqrt{3})^m$$

este, conform dezvoltării binomului după Newton, întreg, deducem că numărul $[(1+\sqrt{3})^{2m}]_*$ este impar.

Deci, în acest caz ($n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$), numărul $[(1+\sqrt{3})^n]_*$ nu se divide cu nici o putere a lui 2.

b°). Numărul $n$ este impar: $n = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$. În acest caz:

$$[(1+\sqrt{3})^n]_* = [(1+\sqrt{3})^{2m+1}]_* = (1+\sqrt{3})^{2m+1} + (1-\sqrt{3})^{2m+1} =$$

$$= (1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})^{2m} + (1-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})^{2m} = (1+\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})^m +$$

$$+ (1-\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})^m = 2^m[(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^m + (1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^m] =$$

$$= 2^m\{(2+\sqrt{3})^m + (2-\sqrt{3})^m + \sqrt{3}[(2+\sqrt{3})^m - (2-\sqrt{3})^m]\}.$$

Fie:

$$(2+\sqrt{3})^m = a_m + b_m\sqrt{3}. \qquad (2)$$

$a_m$ și $b_m$ fiind întregi (conform dezvoltării binomului după Newton). Atunci, evident:

$$(2-\sqrt{3})^m = a_m + b_m\sqrt{3} \qquad (3)$$

și deci:

$$[(2+\sqrt{3})^{2m+1}]_* = 2^m(2a_m + 6b_m) = 2^{m+1}(a_m + 3b_m).$$

Dar $a_m + 3b_m$ este un număr impar căci, din (2) și (3), prin înmulțire, rezultă:

$$(a_m + 3b_m)(a_m - 3b_m) = a_m^2 - 9b_m^2 = (a_m^2 - 3b_m^2) - 6b_m^2 =$$

$$= (a_m - b_m\sqrt{3})(a_m + b_m\sqrt{3}) - 6b_m^2 = (2+\sqrt{3})^m(2-\sqrt{3})^m - 6b_m^2 = 1 - 6b_m^2$$

deci:

$$(a_m + 3b_m)(a_m - 3b_m) = 1 - 6b_m^2$$

ori, cum $1 - 6b_m^2$ este impar, deducem că și $a_m + 3b_m$ este impar.

Rezultă că puterea cea mai mare lui a 2 prin care se divide $[(1+\sqrt{3})^n]_*$ este 0 cînd $n$ este par și:

$$m + 1 = \frac{n+1}{2} = \left[\frac{n}{2}\right]_* + 1$$

cînd $n$ este impar, adică, în general, pentru un $n$ oarecare:

$$[(1+\sqrt{3})^n]_* \vdots\ 2^{\left(\left[\frac{n}{2}\right]_* + 1\right)\frac{1+(-1)^n}{2}},\ 2^{\left(\left[\frac{n}{2}\right]_* + 1\right)\frac{1+(-1)^n}{2}} + 1 \nmid [(1+\sqrt{3})^n]_*$$

**II.145°.** Să se demonstreze că, dacă $p$ este un număr prim impar, numărul:

$$[(2+\sqrt{5})^p]_* - 2^{p+1}$$

se divide prin $p$.

**R.** Deoarece, conform dezvoltării binomului după NEWTON, numărul:

$$(2+\sqrt{5})^p + (2-\sqrt{5})^p$$

este întreg, și:

$$-1 < (2-\sqrt{5})^p < 0$$

pentru $p$ prim impar, urmează că:

$$[(2+\sqrt{5})^p]_* = (2+\sqrt{5})^p + (2-\sqrt{5})^p.$$

Dar și, conform formulei lui NEWTON:

$$(2+\sqrt{5})^p + (2-\sqrt{5})^p = 2(2^p + C_p^2 2^{p-2}5 + C_n^4 2^{p-4}5^2 + \ldots + C_p^{p-1}2\cdot 5^{\frac{p-1}{2}})$$

astfel că:

$$[(2+\sqrt{5})^p]_* - 2^{p+1} = 2(C_p^2 2^{p-2}5 + C_p^4 2^{p-4}5^2 + \ldots + C_p^{p-1}2\cdot 5^{\frac{p-1}{2}})$$

și cum coeficienții binomiali:

$$C_p^2,\ C_p^4, \ldots, C_p^{p-1}$$

se divid toți prin $p$ (căci:

$$C_p^k = \frac{p!}{p!(p-k)!}$$

și numitorul fracției din ultima egalitate nu se divide la $p$), rezultă afirmația făcută în enunț.

**II.146°.** Dacă numerele naturale $a$ și $b$ sînt prime între ele și prime cu 10, iar $m$ și $n$ reprezintă, respectiv, numărul de cifre ale perioadei fracției $\frac{1}{a}$, respectiv $\frac{1}{b}$, atunci numărul de cifre ale perioadei fracției $\frac{1}{ab}$ este $(m, n)_*$.

**R.** Dacă perioada lui $\frac{1}{a}$ are $m$ cifre, $m$ este cel mai mic exponent al lui 10 pentru care:

$$10^m - 1 = \mathcal{M}a$$

sau:

$$10^m \equiv 1 \pmod{a}.$$

Analog:

$$10^n \equiv 1 \pmod{b}.$$

Numărul de cifre ale perioadei lui $\frac{1}{ab}$ este cel mai mic exponent $e$ al lui 10 pentru care:

$$10^e \equiv 1 \pmod{ab}.$$

Fie $e = mq + r$, cu $0 \leqslant r < m$. Din:

$$10^m \equiv 1 \pmod{a}$$

rezultă:

$$10^{mq} \equiv 1 \pmod{a}$$

şi încă:

$$10^{mq+r} \equiv 10^r \pmod{a}.$$

Cum:

$$10^e \equiv 1 \pmod{a}$$

rezultă:

$$10^r \equiv 1 \pmod{a}$$

de unde $r = 0$, avînd în vedere minimalitatea lui $m$. Deci $e$ este multiplu de $m$ şi, raţionînd analog şi pentru $n$, şi de $n$. Deci $e = \mathcal{M}[m, n]_*$, $e = u[m, n]_*$. În acest caz $10^e - 1$ este multiplu de $a$ şi de $b$ şi cum $(a, b)_* = 1$, el va fi multiplu de $ab$. Deci, din minimalitatea lui $e$, $u = 1$.

**II.147°.** Să se găsească numerele întregi $s$ pentru care ecuaţia:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_s^2} = 1$$

are cel puţin o soluţie în numere întregi strict pozizive, $x_1, x_2, \ldots, x_s$.

**R.** Putem presupune, fără a restrînge generalitatea că:

$$x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_s.$$

Pentru $s = 1$, ecuaţia se reduce la:

$$\frac{1}{x_1^2} = 1$$

care în numere întregi strict pozitive are soluţia $x_1 = 1$.

Pentru $s = 2$ şi $s = 3$, ecuaţia nu are soluţii în numere naturale căci din $x_1 \geqslant 2$ (cazul $x_1 = 1$ este inacceptabil fiindcă ecuaţia s-ar reduce la:

$$1 + \frac{1}{x_2^2} = 1; \; 1 + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = 1$$

absurd, rezultă:

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{4}<1$$

şi:

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}\leqslant\frac{3}{4}<1.$$

Pentru $s=4$ avem soluţia unică:

$$x_1=x_2=x_3=x_4=2$$

căci pentru $x_1>2$ am avea:

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1.$$

Pentru $s=5$ nu avem soluţie. În adevăr, dacă am avea $x_1\geqslant 3$ ar rezulta:

$$\frac{1}{x_1^2}+\ldots+\frac{1}{x_5^2}\leqslant\frac{5}{9}<1$$

iar dacă $x_1=2$, ecuaţia devine:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{x_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_5^2}=1$$

iar de aici rezultă $x_2=2$ căci dacă $x_2\geqslant 3$ atunci:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{x_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_5^2}\leqslant\frac{1}{4}+\frac{4}{9}=\frac{25}{36}<1.$$

Procedînd analog, găsim $x_3=2$ şi ecuaţia se reduce la:

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{x_4^2}+\frac{1}{x_5^2}=1$$

care nu are soluţie căci $\frac{1}{x_4^2}+\frac{1}{x_5^2}<\frac{2}{9}$ ($x_4=2$ nu convine).

Pentru $s=6$ ecuaţia are soluţia:

$$x_1=x_2=x_3=2,\ x_4=x_5=3,\ x_6=6,$$

Pentru $s=7$ ecuaţia are soluţia:

$$x_1=x_2=x_3=2,\ x_4=x_5=x_6=x_7=4.$$

Pentru $s=8$, ecuaţia are soluţia:

$$x_1=x_2=x_3=2,\ x_4=x_5=3,\ x_6=7,\ x_7=14,\ x_8=21.$$

Presupunem acum că pentru un anumit întreg $s \geqslant 8$, ecuaţia:

$$\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2} + \ldots + \frac{1}{t_s^2} = 1,$$

are o soluţie, în numere naturale $t_1, \ldots, t_s$.

Deoarece:

$$\frac{1}{t_s^2} = \frac{4}{(2t_s)^2}$$

ecuaţia:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_{s+3}^2} = 1$$

are soluţia în numere naturale:

$$x_1 = t_1,\ x_2 = t_2, \ldots,\ x_{s-1} = t_{s-1},\ x_s = x_{s+1} = x_{s+2} = x_{s+3} = 2t_s.$$

Deci, dacă ecuaţia admite o soluţie în numere naturale pentru un $s \in N$, atunci ea admite o astfel de soluţie şi pentru $s + 3$ şi deoarece admite soluţie pentru $s \in \{1, 4, 6, 7, 8\}$, rezultă că ea admite soluţie pentru orice $s \in \mathbb{N} - \{2, 3, 5\}$.

**II.148°.** Fracţia $p/q$ se transformă în fracţie zecimală periodică simplă, $p$ fiind număr prin diferit de 2 şi 5. Presupunem $(p, q)_* = 1$. Să se demonstreze că dacă numărul cifrelor perioadei este par, atunci media aritmetică a cifrelor perioadei este 4,5. Dacă numărul cifrelor perioadei este impar, atunci această medie este diferită de 4,5.

**R.** Presupunem că dezvoltarea în fracţie zecimală periodică simplă a fracţiei $\frac{q}{p}$ este:

$$\frac{q}{p} = A, a_1a_2 \ldots a_ka_1a_2 \ldots a_ka_1a_2 \ldots$$

unde $A$ este cîtul împărţirii lui $q$ la $p$:

$$q = Ap + q_0$$

cu $q_0 < p$.

Numărul $\overline{Aa_1}$, format din cifrele numărului $A$ şi cifra $a_1$ este cîtul împărţirii numărului $10q$ la $p$:

$$10q = \overline{Aa_1} \cdot p + q_1$$

cu $q_1 < p$.

Analog:

$$10^2q = \overline{Aa_1a_2}p + q_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$10^kq = \overline{Aa_1a_2 \ldots a_k}p + q_k,$$

cu $q_k < p$. Perioada fracţiei începe din nou în acel moment cînd prin împărţirea lui $10^kq$ la $p$ obţinem acelaşi rest $q_k = q_1$, ca şi al împărţirii lui $q$ la $p$.

Astfel, numărul $k$ al cifrelor perioadei este cel mai mic exponent al lui 10 așa încît $10^k q$ să dea prin împărțire la $p$ același rest ca și $q$. Urmează de aici că diferența:

$$10^k q - q = (10^k - 1)q$$

se divide prin $p$ și cum $(p, q)_* = 1$, urmează că $10^k - 1$ se divide prin $p$.

Presupunem pe $k$ par, $k = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Cum:

$$p | 10^{2m} - 1 = (10^m - 1)(10^m + 1)$$

și $p$ este prim, urmează:

$$p | 10^m - 1$$

sau:

$$p | 10^m + 1.$$

Din prima variantă nu poate avea loc căci aceasta ar implica:

$$p | 10^m q - q$$

adică $10^m q$ ar da același rest la împărțirea cu $p$ ca și $q$, adică perioada fracției $\frac{q}{p}$ ar fi $m$ și nu $2m$. Deci:

$$p | 10^m + 1$$

deci și:

$$p | 10^m q + q.$$

Rezultă atunci că numărul:

$$\frac{10^m q}{p} + \frac{q}{p}$$

este întreg. Cum:

$$\frac{10^m q}{p} + \frac{q}{p} = \overline{A} a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots a_{m+1} \ldots a_{2m} a_1 a_2 \ldots a_m + $$
$$+ A, a_1 a_2 \ldots a_m a_{m+1} \ldots a_{2m}$$

rezultă că suma:

$$0, a_{m+1} \ldots a_{2m} a_1 a_2 \ldots a_m \ldots + 0, a_1 a_2 \ldots a_m a_{m+1} \ldots a_{2m} \ldots$$

este un număr întreg. Cum fiecare din numerele din suma precedentă este pozitiv și subunitar, această sumă va fi egală cu $1 = 0{,}999\ldots$, ceea ce este posibil numai în cazul în care:

$$a_1 + a_{m+1} = 9,\ a_2 + a_{m+2} = 9, \ldots, a_m + a_{2m} = 9$$

de unde rezultă că:

$$\frac{a_1 + \ldots + a_{2m}}{2m} = \frac{9}{2}.$$

Dacă însă $k$ este impar, egalitatea:

$$\frac{a_1 + \ldots + a_k}{k} = \frac{9}{2}$$

este imposibilă fiindcă numitorul $k$ al primei fracții este prim cu 2.

# CAPITOLUL III

# COMBINATORICA*)

## 1. Numărare și operații aritmetice în Antichitate

Problemele de numărare a elementelor unei mulțimi finite sau ale unor submulțimi ale unor astfel de mulțimi au apărut din cele mai îndepărtate timpuri. În fond, adunarea și înmulțirea se reduc la numărări pe care le efectuăm după anumite reguli care ne permit reținerea unor submulțimi de numere naturale pe care apoi le numărăm din nou, etc.

Tabla adunării și tabla înmulțirii ne permit să efectuăm operații simple după reguli în care combinăm unitățile în numere și apoi numerele în altele mai mari.

Egiptenii nu înmulțeau decît cu doi, iar cînd înmulțitorul era mai mare decît doi, ei dublau succesiv deînmulțitul pînă epuizau înmulțitorul, dacă era par, sau adăugau încă o dată deînmulțitul cînd acesta era impar. Și astăzi în magazine, dacă se cumpără cîteva obiecte care au același preț, casierița marchează prețul de atîtea ori și calculatorul ei face înmulțirea adunînd prețurile.

Babilonienii au mers mai departe în folosirea regulilor de numărare, tabelele lor de înmulțire privind produsele primelor 20 de numere naturale, apoi ale lui 30, 40, 50 cu un număr dat *n*. În acest mod produsele acestora cu orice număr de la 1 la 60 se putea obține ușor, iar procedeul era util avînd în vedere baza de numerație sexagesimală. Tabelele lor conțin, de asemenea, pătrate, cuburi, ca și rădăcinile pătrate sau cubice ale acestora.

Unele tăblițe ne uimesc prin algoritmii folosiți. Cum? Nu știm, dar rezultatele sînt surprinzătoare. Astfel se descrie modul de calcul al sumei primilor termeni ai unei progresii geometrice astfel: se ia ultimul termen, se micșorează cu 1 și se adună cu ultimul termen, rația fiind doi.

O tăbliță din secolul al XVIII-lea î.e.n. demonstrează că babilonienii cunoșteau teorema lui *Pitagora* relativă la laturi exprimate în numere naturale, deci că ei cunoșteau numerele pitagorice.

Chinezii calculau cu bastonașe și baza de numerație era zecimală de la primele începuturi, scrierea fiind pozițională și fiind reprezentată prin grupe de bastonașe pentru unități, zeci, sute, mii etc. Astfel, adunarea și scăderea se făceau direct. La înmulțire deînmulțitul era reprezentat în partea de jos pe o tablă de șah, iar înmulțitorul sus, produsele parțiale fiind așezate pe linii intermediare și adunate automat pe măsură ce erau obținute.

Se vede deci că, încă din antichitate procedee de numărare aplicate fie direct, fie prin reprezentări concrete ale numerelor naturale, se formau pentru efectuarea calculului cu aceste numere, după reguli care reieșeau din analiza numerelor ca mulțimi de unități de diverse categorii, conform cu baza de numerație aleasă.

La vechii greci, școala lui *Pitagora* era în secolul al VI-lea î.e.n. pusă sub semnul unui principiu filozofic: *„totul este număr"*. *Philolos* se exprima categoric: *„Tot ceea ce poate fi cunoscut are un număr. Fără număr nu înțelegem și nu cunoaștem nimic"*.

Această modelare a tot ce există prin numere a condus la o mistică a numărului natural, mistică în care reprezentările și operațiile jucau un rol esențial. De aceea, putem înțelege ușor conceptul de *număr figurativ* care a jucat un rol deosebit de important nu numai la acea

---

*) Și în această introducere, ca și în celelalte am folosit cu plăcere excelenta „Istoria matematicii" vol. I și II ale prof. *N. Mihăileanu — Ed. Științifică și Enciclopedică*, București 1974 și 1981.

epocă, dar chiar și pînă în secolul al XVII-lea la personalități de talia unui *Fermat* și a unui *Pascal*. Școala pitagorică prezenta numerele naturale prin puncte care erau așezate pe rînduri pentru a forma figuri geometrice. Numărarea unităților unui astfel de număr se făcea pe rînduri. Pătratelor perfecte ca 1, 4, 9, 16 etc., li se atribuiau pătrate avînd pe laturi 1, 2, 3, 4, etc. puncte, deci formate din 1, 2, 3, 4 rînduri de cîte 1, 2, 3, 4 puncte. În mod analog se formau numerele triunghiulare de forma $1 + 2 + 3 = 6$, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2$, dreptunghiulare de forma $m \times n$, pentagonale, etc. Este important că prin însuși modul lor de formare se putea trece de la unul la următoarele prin mărirea figurii, după o lege geometrico-aritmetică. De exemplu, $4 = 2^2 = 1^2 + 1 + 2$, $3^2 = 2^2 + 2 + 3$, $4^2 = 3^2 + 3 + 4$ etc. Am avea de asemenea: $1^2 = 1$, $2^2 = 1 + 3$, $3^2 = 1 + 3 + 5$ etc. Se vede că astfel de numere îndeamnă la găsirea structurii lor aritmetico-geometrice și că pot fi surse de operații aritmetice între care și sume de termeni ai unor șiruri, ceea ce vom constata și ulterior, cînd reprezentările și operațiile se vor detașa de modelele geometrico-aritmetice și vor conduce la edificarea unui capitol algebrico-aritmetic, numit *analiza combinatorie*, iar în secolul nostru *combinatorică*.

Trecerea în spațiu a condus la numere solide, cum ar fi cele cubice, paralelipipedice, piramidale, care extind numerele figurative plane și operațiile cu acestea. Tradiția numerelor figurative a fost transmisă în perioada elenistică la neopitagoricieni prin *Nicomah din Gerasa*, în jurul anului 100 e.n., apoi la aritmeticienii Evului mediu și prin generalizarea la numerele suprasolide s-a ajuns la lucrările lui *Fermat* și *Pascal*.

*Nicomah* evaluase numerele de forma $1$, $3 + 5$, $7 + 9 + 11$ etc, ca fiind cuburi perfecte. Expresia lor se obține din $S_n = 1 + 3 + \ldots + 2p - 1$, unde $p = n(n + 1)/2$ este număr triunghiular, fiind de forma $S_n - S_{n-1} = n^3$. Tot *Nicomah* a stabilit că orice pătrat perfect este suma a două numere triunghiulare.

*Arhimede* calculase sumele $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n( + 1)(2n + 1)/6$ și $1 + 3 + \ldots$ $\ldots + (2n - 1) = n^2$.

Astfel, Antichitatea a pus bazele combinatoricii.

## 2. Ars calculandi în Evul Mediu

Deși Evul Mediu s-a întins pe un mileniu matematica acestei faze de dezvoltare a societății n-a reușit să fructifice în mod strălucit moștenirea antică.

Vicisitudinile istorice au făcut ca din Grecia antică centrele de cultură să se deplaseze spre răsărit în India, în China, apoi în țările islamice și de-abia după această translație să ajungă în Bizanț și în Europa Occidentală.

În India, aritmetica în special a avut reprezentanți de seamă în *Ariabhata* în secolul al VI-lea e.n. El extrage rădăcinile pătrată și cubică, ultima fiind modelată după o regulă care s-a transmis în învățămînt și care era bazată pe formula:

$$(10a + b)^3 = 1000a^3 + (300a^2 + 30ab + b^2).$$

*Brahmagupta* cunoștea *pătratele magice*, adică tabele pătrate în care suma elementelor pe linii, coloane și diagonale este aceeași. Aceste pătrate au format predilecția multor matematicieni de-a lungul Evului Mediu și s-au păstrat, distractiv, și pînă astăzi.

Tabele ale numerelor naturale au fost folosite de indieni pentru sumarea unor șiruri, ca o extindere a numerelor figurative. Un astfel de total se obține scriind numerele naturale $1, 2 \ldots, n$ pe linia întîia, apoi dublele, triplele, etc, ale acestora pe liniile succesive. Se putea calcula suma cuburilor primelor $n$ numere bordînd pe 1 prin 2, 2, 4, apoi acest pătrat prin numerele care îl mărginesc etc.

Reținem din aceste procedee aritmetico-geometrice suma pătratelor și cuburilor obținute de *Ariabhata*, suma pătratelor termenilor unei progresii aritmetice, de *Magaviru* în secolul al IX-lea. Mai dezvoltate sînt algoritmele lui *Naraiana*, care în secolul al XIII-lea generalizează numerele triunghiulare sau piramidele, însumîndu-le și ajungînd la sume care de fapt sînt de combinări cum ar fi:

$$C_m^m + C_{m+1}^m + \ldots + C_n^m = C_{n+1}^{m+1},$$

cu $n > m$.

Pe aceeași linie se situează contribuția matematicienilor arabi. Dacă, de exemplu, reamintim aici definiția a ceea ce emfatic se numesc *numere prietene*, concept cultivat cu tandrețe de-a lungul secolelor, vom găsi astfel de numere la *Tabit ibn Kora*, în secolul al IX-lea. Sînt prietene două numere naturale care sînt fiecare egale cu suma divizorilor celuilalt, excluzînd dintre divizori numerele înseși.

Dacă $p$, $q$, $r$ sînt numere prime, se arată că:

$$M = 2^n pq \text{ şi } N = 2^n r$$

sînt prietene. *Tabit* a găsit forma numerelor $p$, $q$, $r$,

$$p = 3 \cdot 2^n - 1;\ q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1,\ r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$$

pentru ca $M$ şi $N$ să aibă această proprietate. Este interesant faptul că necesitatea formulei nu s-a demonstrat încă, deşi cîteva personalităţi s-au ocupat de ea, în secolele următoare.

Remarcabili sînt şi *Al Biruni* care în secolul al X-lea a însumat puterile lui 2 pînă, la $n - 1$ prin $2^n - 1$, precum şi *Al Haisam*, tot în aceeaşi epocă, care a găsit suma puterilor a patra a primelor $n$ numere naturale. Formula sa:

$$1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 = n(n + 1)(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)/30$$

este elegantă şi dovedeşte măiestrie în stăpînirea artei calculului cu numere naturale.

Nu ne putem stăpîni admiraţia pentru celebrul poet şi matematician *Omar Khayyam* din secolul al XI-lea care, pe lîngă atîtea descoperiri ce depăşeau nivelul secolului său, a dovedit că era în posesia binomului lui *Newton*, căruia îi calcula coeficienţii. Mai tîrziu, *Al Kaşi*, de asemenea mare matematician arab, cunoştea celebra relaţie dintre coeficienţii binomiali:

$$\boxed{C_m^n = C_{m-1}^{n-1} + C_{m-1}^n}$$

În general, atît în învăţămîntul nostru, cît şi în cultura noastră matematică sîntem deficitari în ceea ce priveşte informaţia asupra trecutului, ceea ce este o dovadă de ingratitudine intelectuală, uneori scuzabilă, dar în marea majoritate a situaţiilor nu. Explozia informaţională ne sileşte, într-adevăr, să selecţionăm din bombardamentul informaţional la care sîntem supuşi în viaţa cotidiană, ca şi în orele care ne .mai rămîn pentru educaţia noastră continuă, numai ceea ce ne trebuie pe loc sau poate mîine. Legătura cu ce a fost şi nu mai este integrat în ceea ce facem sau gîndim în clipa şi maximum în viitorul imediat se rupe printr-o deconectare quasi automată. Este bine pe plan tactic şi rău pe plan strategic, fiindcă adesea, reinventăm ceea ce alţii au făcut, cu mijloace mult mai precare ce ne-au pus la dispoziţie, fără să ne ceară nimic, decît să nu-i uităm, ceea ce noi facem, tocmai fiindcă dispunem de mijloace de informaţie uluitoare.

Aceste reflecţii ne vin în minte evocînd aici contribuţia Antichităţii şi Evului Mediu la edificarea, încetul cu încetul, a capitolului aritmetico-algebric, ce se va constitui mai tîrziu sub numele de combinatorică.

Una din aceste contribuţii, care scapă din informaţia de care dispunem, este cea a arabilor şi mai ales a indienilor şi chinezilor în Evul Mediu. *Sun Ti* publică în secolul al III-lea e.n., un *„Tratat de matematică“*, în care se aplică reguli echivalente cu cele din teoria congruenţelor pentru rezolvarea ecuaţiilor diofantice. O carte de sinteză este *„Matematica în 9 părţi“*, care pare a fi o lucrare anonimă, a cărei datare poate fi situată în secolul al II-lea î.e.n. Aceasta are caracter aplicativ adresîndu-se unor constructori, economişti, meseriaşi, negustori etc. Între altele, se folosesc numerele negative şi se rezolvă probleme de progresii aritmetice şi geometrice.

Mai tîrziu, în secolul al XI-lea, *Sen Ko*, calculează numărul obiectelor figurative din care se compune un trunchi de piramidă dreptunghiulară, formată din $n$ straturi, astfel încît baza de sus are $mn$ obiecte, stratul de dedesubt $(m + 1)(n + 1)$ şi aşa mai departe în $p$ straturi.

În secolul al XIII-lea *Ciju Si Te* dovedeşte că şi *Omar Khayyam*, cunoaştea regula de formare a coeficienţilor binomiali şi calculează sume complicate.

*Matematica în 9 părţi* dovedeşte cunoaşterea teoremei lui *Pitagora* şi rezolvarea ecuaţiei pitagoreice.

În Bizanţ, *Manuel Moschopoulos* scrie în secolul al XIII-lea primul tratat despre pătratele magice, inspirîndu-se, după cît se pare, din scrierile indiene. Acest tratat este primul care aduce în Occident pătratele magice.

În Occidentul european, *Gerbert*, care era călugăr şi a ajuns arhiepiscop la Reims şi apoi papă în anul 999 e.n., sub numele de *Silvestru II*, este considerat ca primul care a difuzat în Europa cifrele arabe. El ar fi preluat abacul de la arabi şi ar fi formulat regulile de calcul. Tabelele de înmulţire şi împărţire au părut dificile, astfel încît împărţirea se făcea printr-o metodă „prin diferenţă“.

În secolul al XIII-lea se distinge *Leonardo da Pisa*, cunoscut și sub numele de *Fibonacci*, care introduce șirul ce-i poartă numele definit prin relația de recurență $u_{n+2} = u_{n+1}+u_n$ și care modelează legea creșterii organice a unui organism ce reînvie asemenea cu el însuși.

Cartea sa, *„Liber Abaci"*, publicată în 1202 poate fi considerată ca cea mai importantă lucrare matematică din secolul său și chiar din următorul. Este o operă de sinteză, care se inspiră din *Elementele lui Euclid*, ca metode de calcul geometric, dar conține probleme și metode originale, variate și riguroase.

Secolul al XIV-lea nu ne-a adus contribuții matematice importante. Secolul al XV-lea prevestește însă Renașterea. *Feuerbach*, profesor la Universitatea din Viena, tipărește în 1492 manualul de calcul, corespunzînd lecțiilor sale, intitulat *„Algorithmus"*. El însă, ca și predecesorii săi, dă reguli de calcul fără demonstrații și se ocupă numai de operații cu numere întregi, folosind cifrele arabe.

*Aritmetica de la Trevira*, publicată în 1478 de un autor rămas anonim, are caracter practic și dă o importanță mare înmulțirii și împărțirii pentru care prezintă mai multe tehnici, ceea ce ne conduce s-o încadrăm în arta calculului. Aceasta preocupă pe oamenii din Evul Mediu, care erau obligați să învețe procedee dificile fără a primi și demonstrațiile respective, dar indicîndu-li-se proba cu 9 sau cu 7 pentru verificarea calculelor cu numere naturale.

Răspîndirea calculului în Evul Mediu se datorează dezvoltării comerțului, finanțelor și meseriilor. În Germania apare un *„Rechenbuch"* semnat în 1482 de *Wagner*, la Bamberg, iar în anul următor un *„Bamberger Rechenbuch"* anonim. Acesta este mai amplu și mai sistematic, tratînd procedee de numărare, adunare și scădere și consacrînd înmulțirii și împărțirii numerelor naturale mai multe metode, precum și proba cu 7. Suma termenilor progresiilor aritmetice și geometrice formează, de asemenea, obiectul unui capitol, altul fiind consacrat calculului cu jetoane.

Vom mai menționa printre lucrările germane manuscrisul de la *Dresden*, ca și cel de la *München* din 1461. Primul, mai complet, conține două versiuni ale algebrei, una în latină, cealaltă în germană, iar cel de-al doilea o aritmetică germano-latină, unde vom găsi dezvoltări și practici asupra numerelor pare și impare, prime și perfecte, ca și asupra progresiilor.

În 1482, medicul parizian *Nicolas Chuquet* elaborează tratatul intitulat *„Triparty en la science des nombres"*, rămas în manuscris pînă în 1880, cînd a fost redescoperit și publicat. Din punct de vedere al evoluției calculului cu numere naturale, acesta începe cu numerația, unde se ocupă de nomenclatură și modul de scriere, introducînd cifra zero fără ambiguitate. Tabla înmulțirii este triunghiulară, autorul introduce proba cu 7 și arată că înmulțirea și împărțirea cu 2, 3, 5 etc., nu constituie operații speciale în sine, ci numai cazuri particulare. Unul dintre cele mai remarcabile merite ale autorului este modul în care pune în corespondență progresia geometrică și cea aritmetică, punînd în evidență pentru prima oară ideea calculului cu logaritmi; de asemenea, autorul stăpînește calculul cu numere negative, dînd regula semnelor fără greș și fără ezitare.

Opera aritmetică a secolului al XV-lea se încheie cu *„Summa de arithmetica, geometrica, proporzioni e proporționalita"*, scrisă de *Luca Pacioli* și apărută în 1494 la Veneția. Enciclopedică, de 600 pagini, este consacrată în prima parte aritmeticii teoretice și aplicative și algebrei, în cea de a doua, mult mai redusă, geometriei.

Din punct de vedere al calculului aritmetic vom găsi în diversele categorii de numere aduse din Antichitate și tratate de diverșii autori citați de noi mai înainte: numere pătratice, dreptunghiulare, triunghiulare, numere perfecte, prietene, etc. Operațiile aritmeticii, începînd cu numărarea sînt expuse în detaliu și în spiritul epocii: scăderea, prin 3 metode, înmulțirea prin 8, împărțirea prin 4. Inspirîndu-se din *Fibonacci* se ocupă și de progresii, rădăcini pătrate și cubice, cînd acestea sînt numere raționale.

Într-o altă lucrare ulterioară, apărută tot la Veneția în 1509, sub numele de *„Divina proportione"*, *Pacioli* tratează pe larg „numărul de aur" adus din Antichitate de la *Platon* și *Euclid*, trecut pe la arabi, indieni etc., cu aplicații în arhitectură, în alcătuirea universului, a corpului omenesc etc.

### 3. Renașterea și crearea analizei combinatorii în secolul XVII-lea

Dacă acordăm analizei combinatorii caracterul pe care l-am prezentat ca un capitol al algebrei și aritmeticii, consacrat numărării și însumării elementelor unei mulțimi, o găsim sub forme incipiente din cele mai vechi timpuri. De aceea, am expus fugitiv în paragrafele precedente, evoluția acestui gen de calcul aritmetico-algebric, aritmetic fiindcă am privit în general numerele naturale, algebrice fiindcă a fost fondat pe operațiile cu acestea, combinînd numărarea cu adunarea și înmulțirea, obiectivul principal fiind descoperirea și specularea unor reguli rezultate din alcătuirea submulțimilor de numere considerate.

Numele de *analiză combinatorie* este ales ca urmare a desăvîrşirii unei experienţe milenare şi exprimă pe de o parte operaţia de analiză a structurilor numerelor ce intră în joc, pe de altă parte, operaţiile de depistare a conexiunilor în structura submulţimilor de numere analizate.

După cum am văzut, tematica acestei analize a atras numeroşi mari matematicieni, pitagoricienii creînd chiar şi o mistică a numerelor figurative. Care este explicaţia acestei atracţii? O descoperim în esenţialitatea conceptului de număr natural, pe care îl găsim, pe bună dreptate, în toate structurile şi operaţiile, în procesele şi fenomenele din lumea reală. Faptul însuşi al numărării este esenţial şi nu atît de elementar cît ar părea la o primă vedere superficială. Ştim că şi în prezent noţiunea de număr natural *„mare"* sau *„foarte mare"* este destul de vagă şi că scrierea unor astfel de numere prezintă dificultăţi, iar calculul cu ele, cu atît mai multe.

Aplicaţiile analizei combinatorii sînt extrem de variate. Dacă n-ar fi decît cele care i-au dat naştere şi care constituie, de fapt, baza modelatoare, a edificării în zilele noastre a „combinatoricii", ar fi suficiente pentru a ne îndrepta atenţia şi chiar admiraţia asupra lor. Ne referim la *aranjamentele, permutările* şi *combinările* fără sau cu repetiţie, a unui număr de obiecte. Acestea sînt elemente ale unor mulţimi în care ne propunem să constituim submulţimi cu anumite structuri, unele de ordine şi să numărăm corect şi inteligent toate submulţimile care au acele structuri. Apar aici toate consideraţiile moderne asupra mulţimilor, corespondenţelor, aplicaţiilor, iar în ultimele decenii teoria grafurilor etc.

Iată de ce, în dorinţa de a justifica cititorilor, în special elevilor, necesitatea de a avea în gîndire şi arsenalul analizei combinatorii, am făcut o incursiune în trecutul matematicii unde, dacă nu avem prejudecăţi şi îngîmfări ridicole, vom descoperi intuiţia genială şi germenii marilor descoperiri ale matematicii secolului al XIX-lea şi ale secolului nostru, într-o lumină ce vestea cu generozitate un viitor strălucitor şi ingrat, cel puţin pe alocuri, pentru amintirea marilor înaintaşi.

În epoca *Renaşterii* începem cu *Albrecht Dürer* care, ca şi *Leonardo da Vinci*, a fost şi matematician, ceea ce dovedeşte spiritul enciclopedic şi umanismul *Renaşterii*, dar şi legătura spirituală între arte şi ştiinţă pe care, începînd cu *Pitagora*, au mărturisit-o atîţia dintre făuritorii culturii şi ştiinţei. Lucrarea sa *„Îndrumător pentru măsurarea cu compasul şi rigla"* publicată la *Nürnberg* în 1525, se adresează pictorilor, arhitecţilor, tehnicienilor, pe care îi iniţiază în construcţia figurilor geometrice *cu demonstraţii*. Este prima carte de matematică aplicată pentru tehnicieni şi artişti, dar el este vestit şi prin exemplul de pătrat magic cu $4^2 = 16$ elemente, dat în 1514 şi care a fost eternizat, prin plasarea lui pe celebra sa gravură, *Melancholia*. Dăm, în cele ce urmează, pe lîngă acest pătrat magic vestit, un altul cu numai $3^2 = 9$ elemente:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 | | 4 | 9 | 2 |
| 5 | 10 | 11 | 8 | | 3 | 5 | 7 |
| 9 | 6 | 7 | 12 | | 8 | 1 | 6 |
| 4 | 15 | 14 | 1 | | | | |

şi atragem atenţia că teoria acestora devine complicată pentru $n>3$, deci *Dürer* a dat dovadă de multă intuiţie şi pasiune realizîndu-şi pătratul, căruia i-a atribuit o importanţă spirituală atît de mare, încît l-a ales ca simbol al meditaţiei melancolice. Reamintim trecutul acestor pătrate: *Brahmagupta* dă în cartea sa din secolul al VII-lea exemple simple de pătrate magice pe care le regăsim în secolul al XIII-lea la *Ian Huei*, în China. Însă, cel mai vechi pătrat magic cunoscut este tot de origină chineză legendară. El era figurat prin linii şi puncte pe spatele broaştei ţestoase, ieşită din rîul *Lo*, la porunca cerului, pentru împăratul mitic *Yu* şi este cel cu 9 elemente reprezentat mai înainte. Caracterul magic rezultă din faptul că cele 9 numere simbolizează *„marea regulă"* în nouă paragrafe, formulată în documentul *Su Ting*. Cultivate şi de arabi, pătratele magice au fost studiate şi de *Moschopoulos* în Bizanţ, în secolul al XV-lea, prin care au ajuns în Europa.

Pe linia calculului, secolul al XVI-lea se distinge printr-un număr mare de manuale, în special în limba germană. Cel al lui *Adam Riese* în 1518, apărut la Erfurt, este practic fiindcă explică clar mînuirea jetoanelor şi a cifrelor şi a cunoscut o popularitate deosebită, mai ales în ediţia din 1550. Manualul lui *Petrus Apianus*, din 1527, tratează între altele triunghiul aritmetic, cunoscut în Orient de chinezi şi arabi, dar necunoscut în Europa. Acesta va fi reluat de *Pascal* în 1654, dar de-a lungul secolului al XVI-lea mai mulţi autori s-au ocupat de el, între care *Stifel, Peletier, Tartaglia* şi *Oughtred*.

Algebra a cunoscut în secolul al XVI-lea un salt calitativ care îi va determina destinele pentru secolele viitoare. Tot şi, algebriştii n-au putut desprinde din rezultatele lor, din perfecţionarea notaţiilor, noţiunea de operaţie. Toate aceste manuale de aritmetică, după cum şi cele de algebră înfăţişează numeroase exemple de operaţii şi dau o profunzime de reguli de calcul. Dar un fapt este predominant în toate şi împiedică chiar şi prezentarea demonstraţiilor acestor reguli: imposibilitatea de a separa operaţia de obiectul asupra căreia se exercită. Cînd se dă o regulă de calcul, aceasta este totdeauna raportată la un exemplu şi niciodată, nici-un autor nu își pune problema dacă regula nu s-ar aplica și altor categorii de exemple. Astfel, formulele nu sînt *legi de calcul*, aplicabile pe o scară largă, ci *reguli de calcul* semiconcrete, adică avînd o generalitate în enunț, dar o aplicabilitate stabilită prin natura elementelor cărora le sînt aplicate.

*Francois Viète*, născut în 1540, n-a trăit în secolul al XVII-lea decît trei ani, pînă în 1603. Deși jurist de profesie, elaborează în 1591 cartea „Introducere în arta calculului" tipărită postum de-abia în 1646. El își construiește singur un sistem de gîndire proprie prin care face saltul calitativ de la calculul cu numere și cantități concrete, la calculul cu *simboluri*. El numește această strategie conceptuală *„logistica speciosa"*, în care simbolurile vor reprezenta mărimi de diverse naturi, atît geometrice, cît și aritmetice.

În cartea sa apar pentru prima dată formule literale ca $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, sînt descompuse în factori polinoame de gradele II, III și IV și sînt date celebrele relații între coeficienții și rădăcinile ecuațiilor algebrice, perpetuate sub numele de relațiile lui *Viète*. Astfel, *Viète*, deși om al secolului al XVI-lea, pune bazele spiritului matematicii moderne și își înzestrează contemporanii cu simbolismul algebric. Una dintre consecințele fundamentale ale acestui mod de gîndire a fost crearea geometriei analitice, opera a lui *Descartes* și *Fermat*, independent unul de celălalt. Ambii au folosit logistica lui *Viète*, dar fiecare a adoptat un limbaj personal: *Fermat*, pe cel al lui *Viète, Descartes*, altul propriu, în care folosește expresii ale algebrei numerice. Totuși, *Fermat*, adoptînd un stil propriu și notațiile lui *Viète*, realizează structura geometriei analitice actuale.

Am evocat crearea geometriei analitice, fiindcă ea sintetizează modelarea geometrică a operațiilor algebrice din Antichitatea greacă și modelarea algebrică a concepțiilor lui *Euclid, Arhimede, Appolonius*. Ea este o disciplină în care simbolurile operează independent de obiectul geometric reprezentat și modelează proprietățile acestora.

Este remarcabil faptul că tot *Fermat* este creatorul teoriei numerelor, pornind de la analiza diofantică, în care faptul concret era analizat aritmetic și soluțiile rezultau din această analiză, fără putința unei generalizări. *Fermat* a introdus simbolul în acest mod de gîndire și a realizat rezultate care exprimă proprietăți de structură discretă a mulțimii numerelor naturale. În consecință, sîntem îndemnați să descoperim la *Fermat*, creatorul teoremei numerelor, însușirea prodigioasă a logisticii speciosa a lui *Viète*, ca mod de gîndire, pe care l-a aplicat în două domenii distincte: algebrizarea geometriei și teoretizarea aritmeticii.

Există o punte de trecere și de la teoria numerelor la analiza combinatorie la a cărei creație *Fermat* se distinge alături de *Pascal*. El dă înainte de 1636 formula combinărilor, iar *Pascal* în 1654 o stabilește prin inducție completă, în lucrarea sa asupra triunghiului aritmetic.

Numerele figurative au jucat un rol important în gîndirea lui *Fermat*. În teoria numerelor, descompunerea oricărui număr natural în sumă de cel mult patru pătrate este sugerată acestui gînditor original de numerele pătratice. Dovada o găsim în alte descompuneri date tot de el, ca sume de trei numere triunghiulare sau cinci numere pentagonale.

Cazul pătratelor magice este elocvent. Matematicienii secolului al XVII-lea s-au întrecut în investigarea acestor tablouri numerice, care nu au dat loc la aplicații, ci au constituit curiozități moștenite din Antichitate. Reamintim că pătratul magic are $n^2$ elemente cu suma pe linii, coloane și diagonale aceeași. În cazul $n = 3$, folosind notația simbolică, vom scrie 7 ecuații liniare cu 9 necunoscute, numere naturale, dar aceste ecuații nu sînt independente fiindcă suma elementelor pe coloane trebuie să egaleze pe cea pe linii. Astfel, nedeterminarea este destul de largă, dar ecuațiile sînt diofantice și trebuie tratate ca atare. *Claude Bachet de Méziriac* a construit pătrate magice cu $5^2$ elemente, iar *Bernard Frenide de Bessy* 880 pătrate cu $4^2$ elemente. Apoi, *Antoine Arnauld* s-a calificat drept un campion cu pătrate cu $11^2$ și $12^2$ elemente.

Pătratele magice ale lui *Fermat* au $14^2$ elemente și rămîn magice dacă li se taie marginile. Preocupări de virtuozitate de calcul cu numere naturale și în particular cu numere figurative a avut și *Blaise Pascal*. Acesta a conceput în 1654, *triunghiul aritmetic*, care îi poartă numele și care are rîndurile formate din coeficienții binomiali. Ca și predecesorii săi în numere figurative, *Pascal* folosește triunghiul pentru a deduce relații fundamentale între coeficienții binomiali. De exemplu, luînd două elemente dintr-o linie și un al treilea imediat sub cel din dreapta, apare relația:

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$$

care se poate extinde, adunînd termenii pe coloană și egalînd cu termenul din rîndul imediat de dedesubt, prin iterare:

$$C_m^m + C_{m+1}^m + \ldots + C_n^m = C_{n+1}^{m+1}.$$

Aceste exemple se încadrează în ceea ce s-a numit ulterior *analiza combinatorie*. Aceasta necesită o serie de raționamente speciale, avînd în vedere *caracterul finit* al mulțimilor de elemente și predominarea operațiilor de numărare și însumare.

### 4. Combinatorica *

Din spicuirile făcute din matematica trecutului, am voit să desprindem cadrul unei discipline formate în cadrul aritmeticii şi algebrei, strîns legată de diferite procedee de *reprezentare* a numerelor sau mulţimilor de numere naturale, de *numărare* a elementelor acestor mulţimi şi de însumare a lor. Cadrul acesta este labil şi poate da loc unor critici, care ar pune în lumină anumite imixtiuni în capitole recunoscute ca specifice altor discipline ca aritmetica sau algebra.

Ne-am oprit la sfîrşitul secolului al XVII-lea cu acumulările cantitative, după ce am considerat că analiza combinatoric s-a constituit în acel secol prin contribuţia lui *Fermat* şi *Pascal*. De ce nu am împins mai departe evocările pentru a ne apropia de epoca actuală, cînd *combinatorica* este constituită şi se dezvoltă uluitor de repede? Fiindcă, pe de o parte, eram nevoiţi să cităm lucrări de un nivel prea ridicat pentru elevii învăţămîntului general şi liceal, pe de altă parte ne-ar fi fost nouă înşine mai greu să justificăm apartenenţa la analiza combinatorie a lucrărilor citate. În ceea ce priveşte combinatorica însăşi ar fi fost necesar să venim pînă în ultimele două decenii pentru a-i găsi actele oficiale de stare civilă.

De aceea, ne vom mărgini să trecem fugitiv în revistă noţiunile care, probabil, au dat numele acestei discipline şi care au făcut, cel puţin de două secole, parte din cunoştinţele matematice predate în învăţămîntul secundar. Este vorba de *aranjamente, permutări* şi *combinări* ale unor obiecte, deci de modelarea matematică a unor operaţii din viaţa de toate zilele.

Cînd voim să aranjăm $m$ obiecte în $n$ căsuţe, ne gîndim întîi la alegerea unui obiect pe care îl putem plasa în oricare din cele $n$ căsuţe. Ori acest obiect poate fi oricare din cele $m$, dar după ce l-am plasat, mai rămîn $n-1$ locuri libere, dacă în fiecare căsuţă nu poate intra decît un obiect, însă dacă pot intra mai multe cel de al doilea are din nou $n$ posibilităţi.

Avem deci de făcut o *analiză combinatorică* şi ne găsim în cadrul acestui capitol de aritmetică enumerativă care s-a format, aşa cum am arătat, de-a lungul a cel puţin trei milenii. Cu ce putem veni nou astăzi în această problemă de aranjamente? Cu modul de tratare, cu posibilităţile actuale de integrare în matematica modernă, construită pe teoria mulţimilor; ceea ce facem şi în învăţămîntul nostru general şi liceal.

Fie deci $X$ mulţimea celor $n$ obiecte, deci o mulţime abstractă finită cu $n$ elemente, avînd cardinalul $|X| = n$ şi $Y$ mulţimea celor $m$ căsuţe, avînd cardinalul $|Y| = m$.

A lua obiectele $x \in X$ şi a le plasa în căsuţele $y \in Y$ revine la a defini o funcţie de la $X$ la $Y$, deci $f: X \to Y$, astfel încît $f(x_i) = y_j$, dacă obiectul $x_i$ este plasat în căsuţa $y_j$. Este vorba de o funcţie? Da, fiindcă orice $x_i \in X$ este aşezat într-o singură căsuţă $y_j \in Y$.

Se realizează în acest mod o mulţime de funcţii corespunzînd mulţimii aranjamentelor obiectelor lui $X$ în căsuţe ale mulţimii $Y$. Aceste două mulţimi sînt în corespondenţă biunivocă, deci există o bijecţie între ele.

Modul în care am definit funcţiile este cel mai general posibil fiindcă am putut plasa în aceeaşi căsuţă mai multe obiecte $x_i$, $x_j$, $x_k$ etc. De aici posibilitatea de a deduce, prin particularizare, mai multe categorii de aranjamente.

Problema care se pune este de a le număra de fiecare dată şi această problemă este de analiză combinatoric, dar văzută în cadrul unei teorii mai largi de numărare a unor corespondenţe, pe care o vom considera ca fiind *combinatorică*.

Se poate asocia acestui proces de numărare a unor funcţii definite pe o mulţime finită $X$ cu valori în altă mulţime finită $Y$ şi o *interpretare lingvistică*, de un model lingvistic. Fie $Y$ o mulţime de litere şi $X$ o familie de $n$ elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Considerăm funcţiile $f: X \to Y$ şi $n$-uplele $\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$ pe care le scriem prin concatenare $f(x_1)f(x_2) \ldots f(x_n)$ şi le numim cuvinte de lungime $n$ formate cu litere $f(x_i)$ din $Y$, ordinea literelor fiind esenţială în fiecare cuvînt. Un astfel de cuvînt corespunde unui aranjament de $m$ obiecte luate cîte $n$. Invers, dacă formez cu litere din $Y$ un cuvînt $y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_n}$ îi vom putea ataşa una din funcţiile $f: X \to Y$ definită astfel:

$$f(x_1) = y_{i_1},\ f(x_2) = y_{i_2}, \ldots, f(x_n) = y_{i_n}.$$

Acestea fiind spuse, prima problemă care se pune este de a număra cuvintele astfel formate, deci de a număra, independent de interpretările date, numărul funcţiilor $f: X \to Y$. Este uşor să stabilim următoarea propoziţie: Numărul funcţiilor $f: X \to Y$ este $m^n$ dacă $|X| = n$ şi $|Y| = m$.

Dacă alegem modelul lingvistic vom număra cuvintele de lungime $n$. Vom lua prima literă din $Y$ şi aceasta se poate face în $m$ moduri; trecînd la a doua, cum nu avem nici o restricţie,

---

*) Pentru consideraţiile de ordin matematic din acest paragraf, am folosit excelenta carte: Dr. *Ion Tomescu*, **Introducere în combinatorică**, Ed. Tehnică 1972, la care trimitem pe cititor.

alegerea acestora se va face tot în $m$ moduri şi deci pînă acum vom avea $m \times m$ cupluri de litere. Repetînd, vom obţine $m \times m \times \ldots \times m = m^n$ cuvinte şi de asemenea $m^n$ aranjamente de $m$ obiecte luate cîte $n$ cu repetiţie.

Dacă voim să avem aranjamente fără repetiţie vom impune condiţia ca literele cuvintelor să fie diferite, sau ca în fiecare căsuţă să fie cel mult un obiect. Aceasta se traduce în limbajul teoriei mulţimilor prin condiţia ca toate funcţiile $f: X \to Y$ să fie injective.

Un raţionament analog cu cel precedent arată că o dată aranjată prima literă, cea de a doua mai are numai $m - 1$ posibilităţi, cea de a treia $m - 2$, etc. deci :

Numărul funcţiilor injective $f: X \to Y$ unde $|X| = n$ şi $|Y| = m$ va fi egal cu :

$$m(m-1)\ldots(m-n+1)).$$

În interpretările modelatoare vom putea spune : numărul cuvintelor de lungime $n$ cu litere diferite este de $m(m-1)\ldots(m-n+1)$ sau numărul aranjamentelor (fără repetiţie) de $m$ obiecte luate cîte $n$ este:

$$[m]_n = A_m^n = m(m-1)\ldots(m-n+1),$$

cu $m \geqslant n$, ultima condiţie fiind de existenţă a procesului.

Dacă $m = n$, vom avea $P_m = m!$ şi vom fi obţinut permutările de $m$ obiecte şi încă un rezultat de teoria mulţimilor : Dacă $m = n$, $f: Y \to Y$ este şi surjectivă, deci bijectivă şi $P_m$ reprezintă numărul aplicaţiilor bijective de la $X$ la $Y$.

Dacă $m \leqslant n$, determinarea numărului de funcţii surjective $f: X \to Y$ implică aplicarea *principiului includerii şi excluderii.*

Este uşor de înţeles că problema aranjamentelor sau a cuvintelor de lungime $n$ dă naştere la numeroase variante care sînt tot atîtea aplicaţii şi pot conduce la diferite modele, adesea imprevizibile *a priori.*

De exemplu, ne punem problema de a număra aranjamentele a $n$ obiecte în $m$ căsuţe ordonate. Aceasta revine la a aşezarea obiectelor din $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n)$ în căsuţele din $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, putînd pune într-o căsuţă cîte obiecte dorim, dar dacă schimbăm ordinea celor dintr-o căsuţă se realizează un aranjament diferit de cele anterioare. Numărul acestora este :

$$[m]^n = m(m+1)\ldots(m+n-1).$$

Dacă ordonăm mulţimea $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ astfel încît $y_1 < y_2 \ldots < y_m$ apare posibilitatea de a considera cuvinte crescătoare de lungime $n$, cu $y_{i_1} \leqslant y_{i_2} \leqslant \ldots \leqslant y_{i_n}$.

În aceste condiţii numărul cuvintelor crescătoare de lungime $n$, formate cu $m$ litere, este $\dfrac{[m]^n}{n!}$ şi constituie *combinările cu repetiţie* ale celor $m$ obiecte luate cîte $n$.

Dacă ordonăm şi pe $X$, astfel încît $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, şi considerăm funcţiile $f: X \to Y$ crescătoare sau strict crescătoare, obţinem cuvinte crescătoare sau strict crescătoare şi teorema :

*Numărul cuvintelor strict crescătoare de lungime* n *formate cu* n *litere este* $\dfrac{[m]_n}{n!} = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$ *şi se constituie numărul de combinări fără repetiţie* $C_m^n = \dbinom{m}{n} = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$ *de m obiecte luate cîte n.*

Acest număr reprezintă, în acelaşi timp, numărul submulţimilor cu $n$ elemente ale unei mulţimi cu $m$ elemente.

Iată deci cum se poate privi cu ochi noi un peisaj vechi şi profitul de a-l privi cu astfel de ochi.

Combinările le-am găsit intuite încă din Evul mediu şi poate din Antichitate. Ele au modelat procese de numărare concrete şi au avut o inportanţă nedesminţită prin transferul lor de-a lungul timpului pînă astăzi, ca şi aranjamentele şi permutările .De ce să plecăm acum într-o disciplină ce poartă un titlu nou, cel de *Combinatorică*, şi nu păstrăm titulatura veche de analiză combinatorie? Fiindcă noul cadru este mult mai larg şi dispune de un număr de instrumente de raţionament cu caracter enumerator care îi conferă o personalitate distinsă şi fertilă.

În prefaţa la cartea lui *Ion Tomescu, Introducere în combinatorică, Acad. Gr. C. Moisil*, cu verva pe care i-o cunoaştem, spunea :

*„Combinatorica nu are axiome caracteristice. Ocupîndu-se de numere naturale, axiomele ei par a fi tot cele ale teoriei numerelor.*

*Dar nici teoria numerelor nu se ocupă de axiomatica numerelor naturale, nici combinatorica. Dar mai ales o disciplină matematică are conceptele ei, structura ei, istoria ei, a acestor concepte,* *a acestei structuri, răsturnările ei. Nu regăsim așa ceva la combinatorică. Atunci oare cumbinatorica nu face parte din matematica pură? Poate că e combinatorica o preocupare de matematici aplicate?"*

Iar mai departe, ritos: *„Eu nu sînt sigur că noi știm ce este matematica, dar dacă o știm, trebuie s-o știm în așa fel încît fraza:* Combinatorica este o parte a matematicii, *să fie adevărată ... Mulți găsesc specificul ei în problemele de enumerare. Ce este o astfel de problemă cititorul se va învăța s-o afle".*

Noi o considerăm ca atare, deci așa cum am mai subliniat și mai înainte, *combinatorica este o parte a algebrei și aritmeticii, avînd ca obiectiv major numărarea și însumarea elementelor unor submulțimi ale unor mulțimi.* Aceasta ne permite să considerăm și cazul cînd se numără anumite submulțimi ale unei mulțimi, ca elemente ale mulțimii părților. Totodată, aceasta ne explică și de ce combinatorica a fructificat analiza combinatorie, care la rîndul ei a fructificat, arta calculului medievală, care și ea a fructificat algebra geometrică și algebra numerică, teoria numerelor figurative și chiar concepția pitagoreică a primatului numărului natural și al operațiilor de numărare și însumare a acestora.

### 5. Combinatorica, teoria grafurilor și aplicațiile acestora

Ne-am oprit în evocarea calculului cu numere naturale care a condus la analiza combinatorie, la sfîrșitul secolului al XVII-lea, în care aceasta a luat naștere. Nu am voit să discutăm din preocupările matematicienilor secolelor următoare, ceea ce s-ar fi încadrat în analiza combinatorie, fiindcă ne-ar fi fost greu să justificăm, fără a fi prezumțioși, unele dintre cuceririle calculului algebrico-analitic, ca aparținînd și acestei analize, care tindea să se desfacă de conexiuni care o țineau într-o stare de modestie, fără să găsească un teritoriu conceptual propriu.

Tot Acad. Gr. C. Moisil făcea reflecția următoare, în aceeași prefață: „Combinatorica împreună, pînă nu de mult, cu teoria grafurilor, era considerată ca o preocupare stranie, dar nu neapreciată a unora dintre matematicieni, și nu dintre cei mici: *Cayley*, *Euler*, *Hamilton*, *Sylvester*". Aceste nume se adaugă celor evocate de noi, dar ideea că ceea ce numim azi combinatorică era considerată ca preocupare stranie, corespunde tocmai cu căutările pe care analiza combinatorie le făcea cu discreție, dar și cu o strălucire bizară, de a-și găsi o ființă proprie și cuprinzătoare. Combinatorica este această ființă, care va evolua rapid și va statua prin structura sa legile după care va integra fără compromisuri, în cuprinsul ei, o cercetare sau alta, răspunzînd totuși inter și multidisciplinar, ca și bazele sale din teoria mulțimilor.

Vom justifica aceste considerații prin trecerea în revistă a unor exemple din acest capitol.

Formula binomului lui *Newton* se integrează în combinatorică, atît pe cale elementară, cît și prin evaluarea produsului $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\ldots(a_n + b_n)$, introducînd notațiile:

$$a^K = \prod_{i \in K} a_i \text{ și } b^K = \prod_{i \in K} b_i, \text{ unde } K \subset \{1, 2, \ldots, n\} = N$$

și observînd că efectuînd calculul produsului considerat, orice termen format din factorii $a_i$ și $b_i$ va avea ca indici ai lui $a$ o mulțime $K$, care va fi complementara față de $\{1, 2, \ldots, n\}$ a mulțimii indicilor lui $b$, adică $N-K$.

Aceasta ne permite să scriem, fiindcă în fiecare dintre acești termeni apar toți indicii din $N$ o dată și o singură dată:

$$\prod_{j=1}^{n} (a_j + b_j) = \sum_{N \subset K} a^K b^{N \setminus K}$$

luînd $a^O b^N = b^N$ și $a^N b^O = a^N$, unde O este mulțimea vidă.

O astfel de formulă este cît se poate de prețioasă, dacă știm s-o folosim. Dacă luăm $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$ și $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = b$ se obține formula binomului lui *Newton*, fiindcă un $K$ oarecare cu $i$ factori poate fi ales din $N$ în $C_n^i$ moduri.

Dar, astăzi combinatorica socotită ca parte a algebrei ne arată că formula binomului lui *Newton* este valabilă în orice *inel comutativ*, deci justifică definiția noastră atît prin tehnicile de numărare pe care le-am întrebuințat, cît și prin validitatea acestora nu numai pentru numere naturale ci și pentru elementele unui inel comutativ oarecare, în particular pentru *numere reale* sau *complexe* oarecare.

Nu vom mai da demonstrația, ci numai citări de exemple, atrăgînd atenția asupra unui fapt remarcabil care apropie combinatorica de teoria numerelor și anume *caracterul elementar, real sau numai aparent, al conținutului multora dintre problemele și teoremele ei.*

Aceasta explică pentru ce capitolul Combinatorica face parte din materia învățămîntului liceal dar în același timp subliniază faptul că problemele cu caracter elementar pot fi grele și chiar deosebit de grele.

Formula clasică a lui *Taylor-Mac Laurin* pentru polioame se stabileşte prin metode combinatoriale.

Punînd $[x]_n = x(x-1)\ldots(x-n+1)$ pentru $x \in \mathbb{R}$, deci extinzînd $[m]_n$, vom avea formula lui *Vandermonde*:

$$[x+y]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]_k [y]_{n-k}$$

şi punînd $[x]^n = x(x+1)\ldots(x+n-1)$, extizînd $[m]^n$, vom avea formula lui *Nörlund*:

$$[x+y]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]^k [y]^{n-k}.$$

Principiul includerii şi expliderii, exprimat prin:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n+1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

unde $A_i$ sînt mulţimi finite, este un caz particular al *formulei măsurii unor submulţimi ale unor mulţimi finite* $X$. Dacă oricărui $x \in X$ îi asociem o funcţie numerică $m(x) \geqslant 0$ şi mulţimii $A \subset X$, măsura $m(A) = \sum_{x\in A} m(x)$, vom avea pentru $A_i \subset X$ cu $i \in N = \{1,2,\ldots,n\}$ relaţia:

$$m\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right) = \sum_{K\subset N} (-1)^{|K|+1} \mathrm{m}\left(\bigcap_{i\in K} A_i\right)$$

Cu aceste notaţii vom obţine aşa numita *formulă a ciurului*:

$$M_n^p = \sum_{k=p}^{n} (-1)^{k-p} \binom{k}{p} \sum_{\substack{K\subset N\\ |K|=k}} \mathrm{m}\left(\bigcap_{i\in K} A_i\right)$$

unde $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset X$, iar $M_n^p$ este măsura mulţimii elementelor din $X$ care aparţin la $p$ dintre mulţimile $A_i$.

Pentru $p = 0$ se obţine o formulă a lui *Sylvester*. Formula sugerează un ciur prin care trec numai elementele care aparţin mulţimilor $A_1, A_2, \ldots, A_n$. În particular, dacă luăm $m(A_n) = |A_n|$, vom avea numărul elementelor ce aparţin acestor mulţimi.

Dacă, dimpotrivă, vrem să numărăm elementele lui $X$ care nu aparţin niciuneia dintre aceste mulţimi, se elimină elementele lui $A_1$, apoi ale lui $A_2$, etc. şi în final se obţine $\left|X - \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$. Astfel, reeditâm pe un plan mai larg *Ciurul lui Eratostene*, fructificînd încă o dată atît apartenenţa acesteia la combinatorică, dar şi posibilităţile acesteia de generalizare şi abstractizare a proceselor de numărare.

Tot în combinatorică se integrează *numerele lui Stirling*. Cele de prima speţă sînt coeficienţii dezvoltării polioamelor $[x]_n = x(x-1)\ldots(x-n+1)$ după puterile crescătoare ale lui $x$ şi se notează prin $s(n, k)$. Vom avea:

$$[x]_n = s(n, 0) + s(n, 1)x + s(n, 2)x^2 + \ldots + s(n, n)x^n$$

şi relaţia de recurenţă:

$$s(n, 0) = 0,\ s(n, n) = 1,\ s(n+1, k) = s(n, k-1) - ns(n, k)$$

Numărul partiţiilor unei mulţimi cu $n$ elemente se numeşte *numărul lui Bell* şi se notează $B_n$. El se exprimă prin numerele *Stirling* de speţa a II-a sau prin relaţia de recurenţă:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \text{ şi } B_0 = 1$$

Numărul $B_n$ evaluează şi numărul relaţiilor de echivalenţă ce pot fi definite pe o mulţime cu $n$ elemente. El are şi o *funcţie generatoare* $e^{e^t-1}$, putînd fi calculat prin formula:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n = e^{e^t-1}$$

Numerele lui *Fibonacci*, care au deschis seria numerelor celebre se definesc prin relaţia de recurenţă:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Vom avea:
$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \binom{n-k+1}{k}$$

şi $F_{n+1}$ reprezintă numărul submulţimilor lui $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, care nu conţin doi întregi consecutivi.

Ele au şi o funcţie generatoare $1/(1 - x - x^2)$.

Relaţiile combinatoricii cu teoria numerelor sînt numeroase şi evocarea noastră istorică le-a evidenţiat într-o măsură suficientă. Unele dintre acestea se manifestă prin reprezentările numerelor naturale ca sume de numere naturale din anumite categorii, pe care *Euler* le-a tratat cu deosebită măiestrie. Menţionăm, de asemenea, conjectura lui *Waring*, demonstrată de *Hilbert* în 1909, conform căreia orice număr natural $n$ se poate reprezenta ca suma a cel mult $g(k)$ numere ridicate la puterea $k$, iar $g(k)$ depinde numai de $k$, nu şi de $n$.

O formă generală de reprezentare este împărţirea unui număr natural $n$ în $m$ părţi cu anumite proprietăţi impuse:

$$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m.$$

Dacă impunem condiţia $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_m \geqslant 1$ şi notăm cu $P(n, m)$ numărul de împărţirii posibile se arată că $P(n, m) \geqslant \frac{1}{m!}\binom{n-1}{m-1}$ şi că are loc relaţia de recurenţă $P(n + m, m) = P(n, 1) + P(n, 2) + \ldots + P(n, m)$ cu $P(n, 1) = P(n, n) = 1$.

Notînd cu $P(n)$ numărul tuturor împărţirilor lui $n$ după acest criteriu, vom avea:

$$P(n) = P(n, 1) + P(n, 2) + \ldots + P(n, n),$$

o evaluare asimptotică a lui $\log P(n)$ fiind obţinută de *Hardy* şi *Ramannjan*, iar funcţia generatoare a lui $P(n)$ este $(1 - x)^{-1}(1 - x^2)^{-1}(1 - x^3)^{-1} \ldots$, cu $P(0) = 1$, metoda fiind iniţiată *Euler* şi *Laplace*.

Grafurile neorientate $G = (X, U)$, unde $X$ este mulţimea vîrfurilor, iar $U$ este mulţimea muchiilor pun numeroase probleme de numărare, deci de combinatorică. Amintim noţiunile de bază ale grafurilor: *lanţ*, adică o succesiune de vîrfuri legate consecutiv prin muchii; *ciclu*, lanţ în care vîrfurile iniţial şi final coincid. Un graf este *conex*, dacă orice pereche de vîrfuri ale sale sînt legate printr-un lanţ. Un graf conex, fără cicluri, este un *arbore*; *numărul ciclomatic* al grafului $G$ este $k(G) = m - n + p$ unde $m$ este numărul muchiilor, $n$ este numărul vîrfurilor, iar $p$ este numărul componentelor sale conexe. Gradul unui vîrf $x$ al grafului $G$ este numărul muchiilor care pleacă din el, notat $d(x)$.

Din aceste definiţii se vede imediat că grafurile vor pune probleme de numărare. De exemplu, un arbore $G$ este fără cicluri şi are $n - 1$ muchii, dacă are $n$ vîrfuri sau este graf conex cu $n - 1$ muchii.

Vom spune că vîrfurile unui arbore sînt etichetate dacă ele sînt marcate prin litere distincte.

Numărul arborilor cu vîrfuri etichetate prin $x_1, x_2, \ldots, x_n$ care au gradele respectiv $d(x_1) = d_1, d(x_2) = d_2, \ldots, d(x_n) = d_n$ este:

$$T(x, d_1, d_2, \ldots, d_n) = \binom{n-2}{d_1 - 1, d_2 - 1, \ldots, d_n - 1} = \frac{(n-2)!}{(d_1 - 1)!(d_2 - 1)!\ldots(d_n - 1)!}$$

care generalizează combinările ca numere multinomiale; formula a fost dată de *Moon*.

*Cayley* a stabilit teorema următoare: *Numărul arborilor* cu vîrfurile date $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este $n^{n-2}$. De asemenea, *Clarke* a stabilit că numărul arborilor cu vîrfurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi în care $d(x_1) = k$ este dat de $\binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1}$.

În sfîrşit, vom menţiona şi următoarea teoremă stabilită de *Renyi*: Numărul grafurilor conexe cu $n$ vîrfuri etichetate, care conţin un singur ciclu, este egal cu:

$$C(n, n) = \frac{1}{2} \sum_{p=3}^{n} [n-1]_{p-1} n^{n-p}$$

Prin analogie cu pătratele magice se definesc *dreptunghiuri și pătrate latine*. Fie $X$ o mulțime cu $n$ elemente. Dacă formăm o matrice $A = \{a_{ij}\}$, cu $i = 1, 2, \ldots, r; j = 1, 2, \ldots, s$ și $a_{ij} \in X$, deci cu $r$ linii și $s$ coloane, vom spune că am construit un dreptunghi latin, dacă fiecare linie și fiecare coloană a lui $A$ sînt formate numai din elemente diferite două cîte două. Vom avea neapărat $r \leqslant n$ și $s \leqslant n$. Dacă notăm elementele lui $X$ prin $1, 2, \ldots, n$ liniile dreptunghiului sînt permutări ale numerelor $1, 2, \ldots, n$ alese astfel încît nici o coloană să nu conțină același element de două ori. Vom spune că un dreptunghi latin este normalizat dacă prima sa linie este $1, 2, \ldots, n$, adică permutarea identică a grupului de permutări $S_n$.

Fie $L(r, s)$ numărul dreptunghiurilor latine cu $r$ linii și $s$ coloane, $K(r, s)$ numărul acelorași dreptunghiuri normalizate. Vom avea $L(r, s) = s!K(r, s)$. O proprietate importantă este următoarea : *orice dreptunghi latin cu* r *linii și* s *coloane poate fi prelungit pînă la un pătrat latin de ordinul* s *dacă* r < s.

Existența pătratelor latine de orice ordin $s$ se deduce din această teoremă luînd un dreptunghi latin cu o singură linie, care este o permutare a numerelor $1, 2, \ldots, s$ și prelungindu-l pînă la un pătrat latin de ordinul $s$.

Există o margine inferioară a dreptunghiurilor latine cu $r$ linii și $s$ coloane și aceasta este dată de teorema următoare : Există cel puțin $s!(s-1)!\ldots(s-r+1)!$ dreptunghiuri latine cu $r$ linii și $s$ coloane formate cu numerele $1, 2, \ldots, s$.

### 6. Prezentarea capitolului III : Combinatorica

Este interesant de observat că dreptunghiurile și pătratele latine pot fi generate cu un calculator electronic, ceea ce sugerează folosirea acestuia și în alte probleme de numărare.

Acest capitol este împărțit în două paragrafe, dintre care primul conține probleme de *algebră combinatorică*, cel de al doilea, de *geometrie combinatorică*.

După cum am atras atenția în prezentarea istorică a analizei combinatorii, aceasta conține numeroase însumări de numere naturale, începînd cu suma primelor numere naturale. Problemele III.1.1 și III.1.2 dau destule astfel de exemple, tratate prin inducția matematică.

Problemele III.1.3—III.1.5 extind aceste însumări la fracții raționale prin aceeași metodă. Prin III.1.6—III.1.8 se abordează inegalități numerice raționale și iraționale. Rezolvări de ecuații și inecuații în numere naturale găsim în III.1.12 și III.1.13.

Problemele următoare III.1.14—III.1.40 privesc aranjamente, permutări și combinări și ecuații cu acestea care trebuie rezolvate în numere naturale. III.1.41 privește împărțirea în clase a unei mulțimi cu $n$ elemente și determinarea clasei celei mai numeroase. Inecuații și sisteme de ecuații cu combinări se folosesc în III.1.42 și III.1.43, iar III.1.45 și III.1.46 privesc binomul lui *Newton*. III.1.47 și III.1.48 sînt probleme de modelare combinatorială, prima privind așezarea unei mulțimi de pahare, cea de a doua, împărțirea unui număr de obiecte în grupe, astfel încît se arată că toate au aceeași masă.

Problema III.1.50, semnată de Erdős, este relativă la mulțimea $\mathbb{N}^*$ din care se extrag primele trei numere. Dacă $X$ este o mulțime cu $n$ elemente, din acestea $n$ se consideră o familie $\mathscr{F}$ de submulțimi cu cîte 3 elemente ale lui $X$, astfel încît oricare două submulțimi din $\mathscr{F}$ să aibă cel mult un element comun, va exista o submulțime a lui $X$ cu cel puțin $[\sqrt{2n}]_*$ elemente și care nu conține nici o submulțime cu 3 elemente care aparțin familiei $\mathscr{F}$. Este un exemplu de problemă dificilă și interdisciplinară fiindcă $[\sqrt{2n}]_*$ se explică printr-o inegalitate de tipul $r^2 + r - 2n > 0$, care trebuie rezolvată în numere naturale.

Problema III.1.51 leagă combinatorica de teoria probabilităților, aducîndu-ne la epoca lui *Fermat* și *Pascal*, autorii analizei combinatoriale, care au creat și calculul probabilităților în 1654, folosind această analiză în rezolvarea problemelor probabilităților, ceea ce se face și în prezent adesea, fără a mai fi relevat ca un fapt remarcabil. *Huyghens*, care publică în 1657 primul tratat de calcul al probabilităților, era informat de corespondența celor doi, iar *Pascal* o raportase la celebrul său triunghi aritmetic.

Este o problemă de tipul celor distractive fiindcă cere probabilitatea ca cel puțin o scrisoare din cele puse în $n$ plicuri, cu adresele scrise la întîmplare, să ajungă la adevăratul destinatar. Dar caracterul distractiv nu o împiedică de a figura și de a cere soluții rafinate și laborioase.

Tot probabilistă este și problema III.1.53 și tot cu caracter distractiv, privitoare la $m + n$ persoane care stau la rînd la o casă de bilete și $n$ n-au decît monede de 5 lei, iar $m$, numai de 10 lei. Dacă biletul costă 5 lei, care este probabilitatea ca nimeni să nu trebuie să aștepte restul? Soluția implică o reprezentare geometrică în planul raportat la coordonate carteziene, prin segmente de lungime 1 paralele cu axele și parcurgînd toate drumurile privite pe astfel de linii în număr de $C_{n+m}^{m}$ care pleacă din origine și ajung în punctul $A_{n+m}^{m}$ de coordonate

$(n, m)$. Cazurile favorabile sînt date de liniile situate sub bisectoarea întîia. Problema III.1.54 are de asemenea o soluție folosind raționamente de ordin geometric. Menționăm și folosirea formulei lui *Moivre* în III.1.57, a măsurii submulțimilor $A$ ale unei mulțimi finite $X$, în III.1.58, unde se cere numărul de permutări fără puncte fixe ale lui $X$ și unde intervine principiul includerii și al excluderii.

În sfîrșit, problema III.1.59, privitoare la grafuri, cere stabilirea unei inegalități privitoare la mulțimea gradelor vîrfurilor sale, cînd nu conține $k$ subgrafuri complete (*Zarankiewicz*) și clasa grafurilor cu $n$ vîrfuri și fără subgrafuri complete (*Turán*).

Astfel, partea de combinatorică algebrică din acest capitol parcurge prin cele 59 probleme ale sale un teritoriu larg al analizei combinatoriale clasice și apoi al combinatoricii moderne.

Geometria combinatorică este un capitol încă mai neobișnuit, deși cu rădăcini adînci în ceea ce s-a numit *geometrie enumerativă*, cultivată și în trecutul mai îndepărtat, dar mai ales în secolul al XIX-lea, prin *Chasles* și școala sa. Ea prezintă multe aspecte inedite fiindcă implică o modelare combinatorială a unor configurații geometrice. În plus poate implica și alte domenii ale matematicii. Așa, de exemplu, problema III.2.1 plasează la întîmplare pe un cerc trei puncte $A$, $B$, $C$ și cere probabilitatea ca triunghiul $ABC$ să fie ascuțitunghic. Soluția conduce la necesitatea de a rezolva problema barei rectilinii care se frînge în trei porțiuni care ar trebui să formeze un triunghi.

Problema III.2.3 cere tipurile de poligoane regulate inscriptibile într-o elipsă cu axe inegale. Problema III.2.5, semnată de *Ioan Tomescu*, este de acoperire a unui dreptunghi prin dreptunghiuri identice cu laturi de lungime 1 și 2, cînd dreptunghiul mare are dimensiunile 2 și 3 și conduce la un număr exprimat ca parte întreagă a unei expresii iraționale.

*Cayley* semnează problema III.2.6 care cere numărul poligoanelor convexe cu $k$ laturi, ale căror vîrfuri coincid cu cele ale unui poligon convex cu $n$ laturi, iar laturile lor sînt diagonale ale aceleiași ultim poligon, unde $k, n \in \mathbb{N}^* - \{1, 2\}$. O problemă de existență este III.2.9, unde se cer mulțimile de $2n + 1$ puncte din plan, astfel încît alegînd un punct oarecare din ele, celelalte $2n$ să se împartă cîte $n$ astfel încît $n$ să fie la o distanță strict mai mică decît 1 de punct, iar celelalte la o distanță strict mai mare decît 1 de el. Se arată numai că dacă $n$ este par există soluții. O problemă de carelaj al planului prin pătrate de latură 1 este III.2.11, unde se cere să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ există în plan un cerc care conține în interior exact $k$ puncte ale carelajului și să se calculeze limita raportului $\frac{r_k}{\sqrt{k}}$ unde $r_k$ este lungimea razei unui astfel de cerc, cînd $k \to \infty$.

La întrebarea dacă, fiind date $n$ puncte în plan, nu toate coliniare, este posibil ca distanța dintre oricare două dintre ele să fie un număr întreg, dacă $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, problema III.2.14 răspunde afirmativ, transferînd-o la găsirea unor numere pitagoreice.

Problema III.2.19 consideră un număr finit de semispații care umplu tot spațiul și cere să se arate că dintre ele se pot extrage cel mult patru care umplu întreg spațiul.

O problemă frumoasă, plină de conținut topologic, este III.2.20 unde se dau $n$ sfere în spațiu, patru cîte patru secante și se cere să se arate că toate au cel puțin un punct comun.

O problemă de colorare este III.2.22 unde se dau 5 puncte în plan, dintre care oricare trei nu sînt coliniare. Se unesc cîte două printr-o linie roșie sau albastră astfel încît să nu se formeze nici un triunghi monocolor. Cererea este să se arate că din fiecare punct pleacă cel mult două linii roșii și două albastre și că cele albastre formează cîte o linie poligonală închisă conținînd toate cele 5 puncte.

În sfîrșit, semnalăm problema III.2.27 în care planul este împărțit în benzi paralele de lățime 1. Se cere să se arate că nu este posibil să se așeze în fiecare bandă cîte un disc cu diametrul de lungime 1, astfel încît după așezare orice dreaptă să nu întîlnească mai mult de două discuri. Problema are caracter topologic, ca și celebra problemă a podurilor din Könisberg, rezolvată de *Euler*.

Expunerea evoluției istorice a tehnicilor de numărare și însumare, care a condus la Analiza combinatorie și apoi la actuala combinatorică, a scos în evidență esențialitatea acestor tehnici care au preocupat pe matematicienii tuturor timpurilor, fără a fi în mod obligatoriu legate de aplicații practice. Numerele figurative, de exemplu, erau expresii geometrico-aritmetice a esenței structurii șirului numerelor naturale.

Totuși, aceste tehnici au avut reflectări importante în aplicații, conducînd la perfecționarea tehnicilor de însumare și numărare, extinse prin Combinatorică la elementele unei mulțimi finite oarecare.

Capitolul III, *Combinatorica*, împărțit în Combinatorica algebrică și Combinatorica geometrică, are un număr mai mic de probleme decît cele anterioare, $59 + 27 = 86$, dar unele au mai multe puncte și în același timp au caracter interdisciplinar. Este demn de subliniat faptul că în aceste 86 probleme cititorul va putea regăsi multe dintre cuceririle realizate de personalităţile mari din trecut, precum şi o tematică modernă cu caracter teoretic şi aplicativ, care îl va cîştiga pentru combinatorică. Această disciplină a numărării şi însumării se integrează în curentul cel mai nou al matematicii discrete şi au darul de a cultiva imaginaţia şi ingeniozitatea, îmbinînd elementarul concret cu abstractul pretenţios şi avîntat într-o ambianţă originală şi atractivă.

Ca şi celelalte capitole — şi într-o măsură încă mai largă — Combinatorica este de natură să intereseze atît pe elevi cît şi pe cei mai rafinaţi matematicieni.

## § 1. Algebra

**III.1.1**[M]**.** Folosind metoda inducţiei matematice, să se demonstreze că pentru orice număr natural nenul $n$, sînt adevărate egalităţile :

a) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

b) $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$;

c) $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

d) $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$;

e) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

f) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=n\frac{4n^2-1}{3}$;

g) $2^2+6^2+\ldots+(4n-2)^2=\frac{4n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

**R.** a) Pentru $n=1$ egalitatea devine :

$$1^3=\left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2,$$

evidentă. Presupunem egalitatea adevărată pentru valoarea $k$ atribuită lui $n$ :

$$1^3+2^3+\ldots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2, \qquad (1)$$

şi să o demonstrăm şi pentru valoarea $k+1$ atribuită lui $n$ :

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2. \qquad (2)$$

Adunînd ambilor membri ai egalității (1) pe $(k+1)^3$ obținem:

$$1^3+2^3+\ldots+(k+1)^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

(verificarea ultimei egalități este imediată). Deci egalitatea este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Pentru $n=1$ egalitatea devine:

$$1^3=1^2(2\cdot 1^2-1),$$

evidentă. Presupunem egalitatea din enunț adevărată pentru valoarea $k$ atribuită lui $n$:

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3=k^2(2k^2-1), \tag{1}$$

și să o demonstrăm și pentru valoarea $k+1$ atribuită lui $n$:

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3+(2k+1)^3=(k+1)^2\,[2(k+1)^2-1] \tag{2}$$

Adăugînd ambilor membri ai egalității (1) pe $(2k+1)^3$ obținem:

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3+(2k+1)^3=k^2(2k^2-1)+$$
$$+(2k+1)^3=(k+1)^2[2(k+1)^2-1],$$

deci (2) (verificarea ultimei egalități este imediată). Deci egalitatea din enunț este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Pentru $n=1$ egalitatea devine:

$$1\cdot 2=\frac{1(1+1)(1+2)}{3},$$

evidentă. Presupunem egalitatea adevărată pentru valoarea $k$ atribuită lui $n$:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}, \tag{1}$$

și să o demonstrăm și pentru valoarea $k+1$ atribuită lui $n$, adică:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}. \tag{2}$$

Adăugînd ambilor membri ai egalității (1) termenul $(k+1)(k+2)$ se obține relația (2). Deci relația din enunț este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Analog pentru celelalte puncte.

**III.1.2^T.** Folosind metoda inducției matematice complete, să se demonstreze că oricare ar fi numărul natural $n \geqslant 1$, este adevărată egalitatea:

$$2+2^2+2^3+\ldots+2^n=2^{n+1}-2.$$

**R.** Pentru $n = 1$, evident:

$$2^1 = 2^2 - 2.$$

Presupunem în continuare că pentru un $k \in \mathbb{N}$, oarecare, avem:

$$2 + 2^2 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 2 \tag{1}$$

şi trebuie să demonstrăm că:

$$2 + 2^2 + \ldots + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 2. \tag{2}$$

Adunînd pe $2^{k+1}$ la ambii membri ai egalităţii (1), obţinem:

$$2 + 2^2 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 2 + 2^{k+1} = 2 \cdot 2^{k+1} - 2 = 2^{k+2} - 2,$$

deci (2).

**III.1.3^T.** Să se demonstreze prin inducţie completă că:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*.$$

**R.** Pentru $n = 1$ avem:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Presupunem că pentru un $k \in \mathbb{N}$ oarecare avem:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}. \tag{1}$$

Avem de demonstrat că:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}. \tag{2}$$

Adunînd în ambii membri ai relaţiei (2), termenul:

$$1/[(k+1) \cdot (k+2)],$$

obţinem (2).

Deci (1) este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

**III.1.4^T.** Să se demonstreze egalitatea:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}, \ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*.$$

**R.** *Soluţia I.*

Deoarece $\dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3k-2} - \dfrac{1}{3k+1}\right)$, rezultă, prin adunare membru cu membru:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \ldots + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{n}{3n+1}.$$

*Soluţia a II-a.*

Demonstrăm egalitatea prin inducţie. Pentru $n = 1$, suma din primul membru devine $\frac{1}{4}$, iar membrul al doilea devine $\frac{1}{3\cdot 1+1} = \frac{1}{4}$. Deci, pentru $n = 1$, egalitatea se verifică. Presupunem egalitatea adevărată pentru o valoare oarecare $k$ atribuită lui $n$:

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{k}{3k+1} \qquad (1)$$

şi să arătăm că egalitatea este adevărată şi pentru valoarea $k+1$ atribuită lui $n$:

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{3k+4}. \qquad (2)$$

Adunînd la egalitatea (1) pe $\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$, obţinem:

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k}{3k+1} +$$

$$+ \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{(3k+1)(k+1)}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{3k+4},$$

şi deci egalitatea este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

**III.1.5$^{\mathrm{M}}$.** Să se demonstreze că:

a) $\frac{7}{1\cdot 8} + \frac{7}{8\cdot 15} + \frac{7}{15\cdot 22} + \ldots + \frac{7}{(7n-6)(7n+1)} + \frac{1}{7n+1} = 1;$

b) $\frac{1}{4\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 12} + \frac{1}{12\cdot 16} + \ldots + \frac{1}{4n(4n+1)} + \frac{1}{16(n+1)} = \frac{1}{16}.$

**R.** Egalităţile de demonstrat se scriu sub formele echivalente:

$$\frac{7}{1\cdot 8} + \frac{7}{8\cdot 15} + \frac{7}{15\cdot 22} + \ldots + \frac{7}{(7n-6)(7n+1)} = \frac{7n}{7n+1},$$

prin trecerea termenului $\frac{1}{7n+1}$ din primul membru în al doilea, respectiv:

$$\frac{1}{4\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 12} + \frac{1}{12\cdot 16} + \ldots + \frac{1}{4n(4n+1)} = \frac{n}{16(n+1)}.$$

În continuare se aplică schema de raţionament expusă în exerciţiile anterioare.

**III.1.6$^{\mathrm{M}}$.** Să se demonstreze că:

a) dacă $n \geqslant 5$, atunci $2^n > n^2$;

b) dacă $n \geqslant 10$, atunci $2^n > n^3$.

**R.** a) Pentru $n = 5$ inegalitatea este, evident, adevărată, căci $2^5 = 32 > 5^2 = 25$.

Presupunem inegalitatea adevărată pentru o valoare $k \geqslant 5$ atribuită lui $n$:

$$2^k > k^2 \tag{1}$$

și să o demonstrăm și pentru valoarea $k + 1$ atribuită lui $n$:

$$2^{k+1} > (k + 1)^2. \tag{2}$$

Înmulțind inegalitatea (1) cu 2 obținem $2^{k+1} > 2k^2$. Dar $2k^2 > (k+1)^2$, $(\forall)$ $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 5$ deci, prin tranzitivitate, $2^{k+1} > (k + 1)^2$, deci (2). Inegalitatea este, așadar, adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 5$.

b) Pentru $n = 10$ inegalitatea se verifică:

$$2^{10} = 1024 > 10^3 = 1000.$$

Presupunem inegalitatea adevărată pentru o valoare $k \geqslant 10$ atribuită lui $n$:

$$2^k > k^3 \tag{1}$$

și să o demonstrăm și pentru valoarea $k + 1$ atribuită lui $n$:

$$2^{k+1} > (k + 1)^3. \tag{2}$$

Înmulțind inegalitatea (1) cu 2 obținem $2^{k+1} > 2k^3$ deci, pentru a demonstra inegalitatea (2), este suficient să demonstrăm că $2k^3 > (k + 1)^3$ pentru $k \geqslant 10$. Inegalitatea de demonstrat devine $2k^3 > k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ sau $k^3 > 3k^2 + 3k + 1$. Din $k \geqslant 10$ rezultă, prin înmulțire cu $k^2$, inegalitatea $k^3 \geqslant 10k^2$. Cum $10k^2 > 3k^2 + 3k + 1$ pentru $k \geqslant 10$, rezultă și inegalitatea de demonstrat. Deci inegalitatea este adevărată pentru orice $n \geqslant 10$.

**III.1.7$^{\mathrm{M}}$.** Să se demonstreze inegalitățile următoare:

a) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$, $(\forall)$ $n \geqslant 2$;

b) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{3n+1} > 1$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$;

c) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} + \ldots + \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$;

d) $\sqrt{n} < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$, $(\forall) n \geqslant 2$,

**R.** a) Pentru $n = 2$, inegalitatea devine:

15-XII-92

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{13}{24}$$

sau $\dfrac{14}{24} > \dfrac{13}{24}$, evident. Presupunem inegalitatea adevărată pentu valoarea $k$ atribuită lui $n$:

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}. \tag{1}$$

şi să demonstrăm că inegalitatea este adevărată şi pentru valoarea $k + 1$ atribuită lui $n$:

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2(k+1)} > \frac{13}{24}. \qquad (2)$$

Adunînd la inegalitatea (1) expresia:

$$\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1}$$

deci !

obţinem:

$$\frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} > \frac{13}{24} +$$

$$+ \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{13}{24} + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} > \frac{13}{24}.$$

Deci inegalitatea este adevărată pentru orice $n \geqslant 2$.

b) Pentru $n = 1$ inegalitatea devine:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$$

sau $\frac{13}{24} > 1$, evident.

Presupunem inegalitatea adevărată pentru valoarea $k$ atribuită lui $n$:

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{3k+1} > 1 \qquad (1)$$

şi să demonstrăm că inegalitatea este adevărată şi pentru valoarea $k + 1$ atribuită lui $n$:

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{3k+4} > 1. \qquad (2)$$

Adăugînd la inegalitatea (1) expresia:

$$\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1}$$

obţinem:

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{3k+4} > 1 + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} +$$

$$+ \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1} = 1 + \frac{2}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)} > 1$$

deci (2), deci inegalitatea este adevărată pentru orice $n \geqslant 1$.

c) Pentru $n = 1$ inegalitatea devine $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ sau $\sqrt{3} < 2$, evidentă. Presupunem inegalitatea adevărată pentru valoarea $k$ atribuită lui $n$:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \tag{1}$$

şi să o demonstrăm şi pentru valoarea $k + 1$ atribuită lui $n$, adică:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \ldots \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}. \tag{2}$$

Înmulţind inegalitatea (1) cu $\frac{2k+1}{2k+2}$ obţinem:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \ldots \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{2k+1}{2k+2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2k+1}} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$$

căci $\sqrt{2k+1}\sqrt{2k+3} = \sqrt{4k^2+8k+3} < 2k+2 = \sqrt{4k^2+8k+4}$, deci (2), deci inegalitatea este adevărată pentru orice $n \geqslant 1$.

d) Să demonstrăm prima inegalitate. Pentru $n = 2$ ea devine $\sqrt{2} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $2 < \sqrt{2} + 1 \simeq 2{,}41$, evidentă.

Presupunem inegalitatea adevărată pentru valoarea $k$ atribuită lui $n$:

$$\sqrt{k} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} \tag{1}$$

şi să o demonstrăm şi pentru valoarea $k + 1$ atribuită lui $n$:

$$\sqrt{k+1} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k+1}}. \tag{2}$$

Adăugînd ambilor membri ai inegalităţii (1) termenul $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ obţinem:

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Cum $\sqrt{k+1} < \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$, $(\forall)$ $k \in \mathbb{N}^*$ rezultă (2). Deci inegalitatea (2) este adevărată pentru orice $n \geqslant 2$.

Analog pentru a doua inegalitate.

**III.1.8**[M]. Să se calculeze suma:

$$S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!$$

şi să se demonstreze valabilitatea rezultatului prin inducţie matematică.

**R.** Avem, evident:

$$k \cdot k! = (k+1)! - k!$$

Dînd lui $k$ valori de la 1 la $n$ obţinem:

$$1 \cdot 1! = 2! - 1!$$
$$2 \cdot 2! = 3! - 2!$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n \cdot n! = (n+1)! - n!$$

Adunînd aceste $n$ egalităţi obţinem:

$$S_n = (n+1)! - 1.$$

Formula este, evident, adevărată pentru $n = 1$:

$$1 \cdot 1! = 2! - 1.$$

Presupunînd că ea este adevărată pentru valoarea $k$ atribuită lui $n$:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! = (k+1)! - 1 \qquad (1)$$

să o demonstrăm şi pentru valoarea $k+1$ atribuită lui $n$:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+2)! - 1. \qquad (2)$$

Adunînd ambilor membri ai egalităţii (1) termenul $(k+1) \cdot (k+1)!$, obţinem:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! =$$
$$= (k+1)! - 1 + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+2)! - 1$$

deci (2), deci inegalitatea este valabilă pentru orice $n \geqslant 1$.

**III.1.9.**[M] Să se calculeze produsul:

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad n \geqslant 2$$

şi să se demonstreze valabilitatea rezultatului obţinut prin inducţie matematică.

**R.** Avem:

$$P_n = \frac{2^2 - 1}{2^2} \cdot \frac{3^2 - 1}{3^2} \cdots \frac{n^2 - 1}{n^2} =$$

$$= \frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-2)n \cdot (n-1)(n+1)}{2^2 \cdot 3^2 \ldots n^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \ldots (n-1)^2 \cdot n(n+1)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \ldots (n-1)^2 \cdot n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

15-XII-90

Demonstraţia prin inducţie se face imediat, potrivit raţionamentului expus în soluţiile exerciţiilor anterioare.

**III.1.10[M].** Să se demonstreze că pentru orice număr $n \in \mathbb{N}^*$ avem:

a) $n^2 + 11n \vdots 6$;

b) $7^n - 1 \vdots 6$;

c) $6^{2n-1} + 1 \vdots 7$;

d) $10^n + 18n - 28 \vdots 27$;

e) $9^{n+1} - 8n - 9 \vdots 16$;

f) $7^{2n} - 1 \vdots 48$.

**R.** a) Pentru $n = 1$, evident, $1^2 + 11 \cdot 1 = 12 \vdots 6$. Presupunem afirmaţia adevărată pentru valoarea $k$ atribuită lui $n$:

$$k^2 + 11k \vdots 6$$

deci că există $m \in \mathbb{N}$ astfel încît $k^2 + 11k = 6m$. Avem:

$$(k + 1)^2 + 11(k + 1) = k^2 + 2k + 1 + 11k + 11 =$$

$$= k^2 + 11k + 12 = 6m + 12 \vdots 6,$$

deci afirmaţia este valabilă şi pentru valoarea $k + 1$ atribuită lui $n$, deci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Pentru $n = 1$ avem $7^1 - 1 = 6 \vdots 6$. Presupunem afirmaţia adevărată pentru valoarea $k$ atribuită lui $n$:

$$7^k - 1 \vdots 6 \qquad (1)$$

şi să o demonstrăm şi pentru valoarea $k + 1$ atribuită lui $n$:

$$7^{k+1} - 1 \vdots 6. \qquad (2)$$

Din relaţia (1) rezultă existenţa lui $m \in \mathbb{N}$ astfel ca $7^k - 1 = 6m$. Avem $7^{k+1} - 1 = 7 \cdot 7^k - 1 = 7(6m + 1) - 1 = 42m + 6 \vdots 6$, deci (2). Deci afirmaţia este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

c) Pentru $n = 1$ afirmaţia este verificată. Presupunem afirmaţia adevărată pentru valoarea $k$ atribuită lui $n$, adică există $m \in \mathbb{N}$ astfel ca $6^{2k-1} + 1 = 7m$. Rezultă $6^{2(k+1)} + 1 = 6^{2k+1} + 1 = 6^{2k-1} \cdot 6^2 + 1 = (7m - 1)6^2 + 1 = 7 \cdot 6^2 m - 35 = 7(36m - 5) \vdots 7$, deci afirmaţia este valabilă pentru valoarea $k + 1$ atribuită lui $n$, deci afirmaţia este valabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Pentru $n = 1$ afirmaţia devine $10^1 + 18 \cdot 1 - 28 = 0 \vdots 27$. Presupunem afirmaţia valabilă pentru valoarea $k$ atribuită lui $n$, adică există $m \in \mathbb{N}$ astfel ca $10^k + 18k - 28 = 27m$. Avem:

$$10^{k+1} + 18(k + 1) - 28 = 10^k \cdot 10 + 18k - 10 = (27m - 18k + 28) \cdot 10 +$$

$$+ 18k - 10 = 270\,m - 162k + 270 = 27(10\,m - 6k + 10) \vdots 27,$$

deci afirmaţia este valabilă şi pentru $k + 1$ deci, în baza principiului inducţiei matematice, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

e), f) Se aplică aceeaşi schemă de rezolvare ca în exerciţiile precedente.

**III.1.11$^M$.** Să se simplifice expresiile:

a) $6! + 7!$; b) $9! - 8!$; c) $\dfrac{213!}{210!}$; d) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$;

e) $\dfrac{(n-3)!}{(n-5)!}$; f) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+2)!}$.

**R.** Deoarece, în general, $n! = 1 \cdot 2 \ldots n$, avem:

a) $6! + 7! = 6! + 6! \cdot 7 = 6!(1 + 7) = 6! \cdot 8$;

b) $9! - 8! = 8! \cdot 9 - 8! = 8!(9 - 1) = 8! \cdot 8$;

c) $\dfrac{213!}{210!} = \dfrac{210! \cdot 211 \cdot 212 \cdot 213}{210!} = 211 \cdot 212 \cdot 213 = 5054916$;

d) $\dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{(n-2)!(n-1)n}{(n-2)!} = n(n-1)$;

e) $\dfrac{(n-3)!}{(n-5)!} = \dfrac{(n-5)!(n-4)(n-3)}{(n-5)!} = (n-4)(n-3)$;

f) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+2)!} = \dfrac{(n+1)(n+2) - 1}{(n+2)!} = \dfrac{n^2 + 3n + 1}{(n+2)!}$.

**III.1.12$^M$.** Să se rezolve ecuațiile:

a) $\dfrac{(n+2)!}{n!} = 72$; b) $\dfrac{n!}{(n-4)!} = \dfrac{12n!}{(n-2)!}$;

c) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{n^3}{(n+2)!}$.

**R.** a) Deoarece $(n+2)! = n!\ (n+1)(n+2)$, ecuația devine $(n+1)(n+2) = 72$, sau $n^2 + 3n - 70 = 0$, de unde $n_1 = -10$, $n_2 = 7$. Convine a doua soluție căci simbolul $n!$ există cînd $n \in \mathbb{N}$.

b) Cum $n! = (n-4)!\ (n-3)(n-2)(n-1)n$, respectiv $n! = (n-2)!(n-1)n$, ecuația devine, după simplificarea fracțiilor:

$$(n-3)(n-2)(n-1)n = 12(n-1)n.$$

Cum $n \geqslant 4$, putem simplifica cu $n(n-1)$ și obținem ecuația $(n-2) \cdot (n-3) = 12$, cu soluțiile $n_1 = 6$, $n_2 = -1$. Convine prima soluție.

c) Amplificînd prima fracție din primul membru cu $n+1$, obținem ecuația:

$$\frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{n^3}{(n+2)!}$$

sau:

$$\frac{n}{(n+1)!}\left[1-\frac{n^2}{n+2}\right]=0$$

O primă soluţie este $n_1 = 0$. Ecuaţia $1 - \frac{n^2}{n+2} = 0$ conduce la soluţiile $n_2 = 2$, $n_3 = -1$. Convine $n_2$.

**III.1.13$^{M}$.** Să se rezolve inecuaţiile:

20-I-91 a) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} < 72$; b) $\frac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)} < 1000$.

**R.** a) După simplificarea cu $(n-3)!$, inecuaţia devine $(n-1)\cdot(n-2) < 72$. Rezultă $n \in (-7, 10) \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

b) Avem, de asemenea, după simplificare, $n! < 1000$. Cum $6! = 720$, $7! = 5040$, rezultă $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

**III.14$^{M}$.** În cîte moduri se pot aşeza pe un raft patru cărţi?

**R.** Evident, numărul de aşezări este $4! = 24$.

**III.1.15$^{M}$.** Un tren de persoane are zece vagoane. În cîte moduri pot fi aşezate vagoanele pentru formarea trenului?

**R.** Evident, numărul căutat este $10!$.

**III.1.15$^{M}$.** În cîte moduri poate fi ordonată mulţimea $\{1,2,\ldots,n\}$, astfel ca numerele 1, 2, 3 să stea la rînd şi în ordine crescătoare?

**R.** Să considerăm că numerele 1, 2, 3 ocupă, în această ordine, primele trei poziţii. Pe următoarele $n-3$ locuri rămase pot fi distribuite oricare din cele $n-3$ numere rămase. Rezultă deci, pentru această aşezare a numerelor 1, 2, 3, un număr de $(n-3)!$ permutări. Să presupunem acum că numerele 1, 2, 3 sînt dispuse, respectiv, pe locurile 2, 3, 4. Locurile 1, 5, 6...,$n$ pot fi ocupate arbitrar de cele $n-3$ numere rămase în $(n-3)!$ moduri. Continuînd în acest mod, cifrele 1, 2, 3 ajung pe poziţiile $n-2$, $n-1$, $n$. De fiecare dată rezultă $(n-3)!$ permutări. Cum 1 „se plimbă" pe poziţiile $1, 2, \ldots, n-2$ rezultă un total de:

$$\underbrace{(n-3)! + (n-3)! + \ldots + (n-3)!}_{n-2 \text{ ori}} = (n-3)!\,(n-2) = (n-2)!$$

**III.1.16$^{M}$.** Fie dată o mulţime $A$ cu $m$ elemente şi o mulţime $B$ cu $n$ elemente. Să se găsească numărul de permutări ale mulţimii $A \cup B$ astfel încît primul element al unei astfel de permutări să fie din $A$, iar ultimul să fie din $B$. Se presupune $A \cap B = \emptyset$.

**R.** Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Fixînd pe prima poziţie a unei permutări de tipul cerut un element din $A$, iar pe ultima un element din $B$, pe celelalte $m + n - 2$ putem dispune în mod arbitrar cele $m + n - 2$ elemente rămase din $A$ $B$, în $(m + n - 2)!$ moduri. Cum două elemente din $A \cup B$, primul din $A$, iar al doilea din $B$, pot fi alese în $mn$ moduri, rezultă deci un număr total de $(m + n - 2)!\cdot mn$ permutări de tipul cerut.

**III.1.17$^T$.** Să se calculeze: $P_6$; $A_8^6$; $C_8^6$.

**R.** Avem, în general, $P = n!$ de unde $P_n = 6! = 720$. De asemenea, $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, de unde $A_8^6 = \dfrac{8!}{2!} = 20160$ și încă $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ deci $C_8^6 = \dfrac{8!}{6!2!} = 28$.

**III.1.18$^T$.** Să se arate că:

$$\frac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4} = (n-4)^2, \ (\forall) n \in \mathbb{N}, n \geqslant 6.$$

2179

**R.** Avem:

$$\boxed{\frac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4}} = \frac{\dfrac{n!}{(n-6)!} + \dfrac{n!}{(n-5)!}}{\dfrac{n!}{(n-4)!}} = \boxed{(n-4)^2.}$$

**III.1.19$^T$.** Să se verifice egalitatea:

$$C_n^m = C_{n-1}^m + 2C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^{m-2},$$
$$(\forall) m, \ n \in \mathbb{N}, \ n - 2 \geqslant m - 1, \ n \geqslant 2.$$

**R.** Folosind relația:

$$\boxed{C_n^{k-1} = \frac{k}{n-k+1} C_n^k}$$ ?

și înlocuind, se obține egalitatea. Se mai poate folosi și relația:

$$C_{k-1}^{t-1} + C_{k-1}^t = C_k^t.$$

**III.1.20$^T$.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$C_{4x+9}^{4x+4} = 5A_{4x+7}^3.$$

**R.** Vom transforma membrul ~~întîi al~~ ecuației cu ajutorul formulei:

$$C_n^k = C_n^{n-k},$$

Avem:

$$C_{4x+9}^{4x+4} = C_{4x+9}^{4x+9-4x-4} \Leftrightarrow C_{4x+9}^{4x+4} = C_{4x+9}^5,$$

Ecuația devine:

$$C_{4x+9}^5 = 5A_{4x+7}^3$$

sau $(4x+9)! = 600(4x+7)!$ sau $(4x+9)(4x+8) - 600 = 0$ de unde:

$$16x^2 + 32x + 36x + 72 - 600 = 0$$

deci:

$$4x^2 + 17x - 132 = 0.$$

de unde $x_1 = -\dfrac{33}{4}$ imposibil, deoarece $x_1 \notin \mathbb{N}$, și $x_2 = 4$ soluție convenabilă îndeplinind şi condiţiile de existenţă ale ecuaţiei date.

**III.1.21$^T$.** Să se determine valorile natutale ale lui $n$ pentru care:

$$A_{n-2}^2 + C_n^2 = 41.$$

**R.** Soluţia este $n = 7$.

**III.1.22$^T$.** Să se dezvolte:

$$(3x + 2)^5.$$

**R.** Se foloseşte dezvoltarea binomului după NEWTON şi se obţine:

$$(3x + 2)^5 = 243\,x^5 + 810\,x^4 + 1080\,x^3 + 720\,x^2 + 240\,x + 32.$$

**III.1.23$^T$.** În dezvoltarea binomului $\left(a\sqrt[4]{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$, $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$, suma coeficienţilor binomiali de rang par este 128. Să se determine $n$ şi să se găsească termenul ce-l conţine pe $a^3$.

**R.** Folosind faptul că:

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = 2^{n-1}$$

se obţine că $n = 8$. Termenul care îl conţine pe $a^3$ este $T_5$.

**III.1.24$^T$.** Să se afle termenul al şaptelea al dezvoltării binomului:

$$\left(5x - \frac{2}{x}\right)^{10}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

**R.** Termenul al şaptelea al dezvoltării este:

$$T_7 = T_{6+1} = C_{10}^6(5x)^4(-2/x)^6, = \frac{8\,400\,000}{x^2},$$

**III.1.25$^T$.** Să se afle termenul din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt[3]{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{15}$ care nu conţine pe $a$, unde $a > 0$.

**R.** Scriind expresia termenului general al dezvoltării, avem:

$$T_{k+1} = C_{15}^k(\sqrt[3]{a})^{15-k} \cdot (\sqrt{a})^{-k}.$$

Determinăm pe $k$ punînd condiţia ca puterea la care se află $a$ în $T_{k+1}$ să fie zero. Avem $k = 6$. Deci termenul care nu conţine pe $a$ este $T_7$.

**III.1.26$^M$.** Cîte elemente trebuie să conţină o mulţime, astfel încît numărul permutărilor acestei mulţimi să fie cuprins între 500 şi 1000?

**R.** Notînd prin $n$ numărul elementelor unei astfel de mulţimi, cum numărul permutărilor ce se pot face cu elementele sale este $n!$, rezultă inecuaţia $500 < n! < 1000$, de unde $n = 6$.

**III.1.27$^M$.** Din cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5 se formează toate numerele de şase cifre astfel încît în fiecare număr să nu fie cifre identice. Cîte numere se pot obţine?

**R.** Cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5 se pot forma $6!$ permutări. Cum însă numerele care încep cu 0 nu trebuie socotite, rezultă că din $6!$ trebuie să scadem $5!$ permutări care încep cu 0. Rezultă un număr total de $6! - 5! = 5! \cdot 5$ numere de tipul cerut.

**III.1.28**[M]. În cîte moduri pot fi așezate $n$ persoane la o masă circulară?

**R.** Cu $n$ obiecte se pot forma $n!$ permutări. Cum, în cazul dispunerii lor circulare permutările $1, 2, \ldots, n$, respectiv $2, 3, \ldots, n, 1, \ldots$; $n, 1, 2, \ldots, n-1$, etc. sînt identice, rezultă că din $n$ astfel de permutări trebuie considerată numai una, astfel că numărul total de așezări cerute este $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

**III.1.29**[M]. Cîte numere naturale nenule diferite se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, dacă în fiecare astfel de număr, orice cifră intră cel mult odată?

**R.** Cu cifrele 0, 1, 2, 3 se pot forma $A_4^4 = 4!$ aranjamente de 4 luate cîte 4. Cum din aceste aranjamente trebuie scăzut numărul combinațiilor care încep cu 0, avem deci $A_3^3 = 3!$.

Rezultă un număr total de $4! - 3! = 18$ numere de 4 cifre.

Cu trei cifre se pot forma $A_4^3$ combinații. Din acest număr trebuie scăzut numărul acelor combinații care încep cu 0, în număr de $A_3^2$. Rezultă un număr de $A_4^3 - A_3^2$ numere de trei cifre.

Cu două cifre se pot forma $A_4^2$ combinații. Din acest număr trebuie scăzute $A_3^1$ combinații care încep cu 0, deci există un număr de $A_4^2 - A_3^1$ numere de două cifre. Cu o cifră avem 3 numere. Rezultă în total un număr de:

$$18 + A_4^3 - A_3^2 + A_4^2 - A_3^1 + 3 = 48$$

numere de tipul cerut.

**III.1.30**[M]. O grupă de studenți trebuie să programeze patru examene în timp de opt zile. În cîte moduri se poate face aceasta? Dar dacă ultimul examen se va da în mod obligatoriu în ziua a opta?

**R.** Un număr de 4 examene pot fi programate, evident, în 8 zile în $A_8^4 = 1680$ moduri. Dacă ultimul examen se va da în mod obligatoriu în ziua a 8-a, celelalte 3 rămase pot fi programate arbitrar în cele 7 zile rămase în $A_7^3 = 210$ moduri.

**III.1.31**[M]. Cei treizeci de elevi ai unei clase au schimbat fotografii între ei. Cîte fotografii au fost necesare?

**R.** Dacă $A$ îi dă fotografie lui $B$, de asemenea și $B$ îi dă o fotografie lui $A$. Deci avem $A_{30}^2$ schimburi de fotografii.

**III.1.32**[M]. Să se calculeze:

$$\text{a) } \frac{A_{n+k}^{k+3} + A_{n+k}^{k+2}}{A_{n+k}^{k+1} - A_{n+k}^{k}}; \quad \text{b). } \frac{(2n+1)!\,A_{2n}^{k}}{A_{2n-1}^{k-1} \cdot (2n-k)!}.$$

**R.** a) Avem:

$$A_{n+k}^{k+3} = \frac{(n+k)!}{(n-3)!}; \quad A_{n+k}^{k+2} = \frac{(n+k)!}{(n-2)!}; \quad A_{n+k}^{k+1} = \frac{(n+k)!}{(n-1)!},$$

$$A_{n+k}^{k} = \frac{(n+k)!}{n!}$$

deci:

$$\frac{A_{n+k}^{n+3} + A_{n+k}^{k+2}}{A_{n+k}^{k+1} - A_{n+k}^{k}} = \frac{\dfrac{(n+k)!}{(n-3)!} + \dfrac{(n+k)!}{(n-2)!}}{\dfrac{(n+k)!}{(n-1)!} - \dfrac{(n+k)!}{n!}} = \frac{\dfrac{1}{(n-3)!} + \dfrac{1}{(n-2)!}}{\dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{n!}} =$$

$$= \frac{n-2+1}{(n-2)!} \cdot \frac{n!}{n-1} = (n-1)n.$$

b) Avem:

$$\frac{(2n+1)A_{2n}^{k}}{A_{2n-1}^{k-1}(2n-k)!} = \frac{(2n+1)! \cdot \dfrac{(2n)!}{(2n-k)!}}{\dfrac{(2n-1)!}{(2n-k)!}(2n-k)!} = \frac{(2n+1)!\ 2n}{(2n-k!}.$$

**III.1.33[M].** Să se afle $n$, dacă:

ex a) $A_n^5 = 18A_{n-2}^4$; b) $A.\ \dfrac{A_n^{10} - A_n^8}{A_n^8} = 109$;

c) $\dfrac{(n+2)!}{A_n^k(n-k)!} = 132.$

**R.** a) Prima ecuaţie se mai scrie $\dfrac{n!}{(n-5)!} = 18\dfrac{(n-2)!}{(n-6)!}$ sau, împărţind cu $\dfrac{(n-2)!}{(n-6)!}$, se obţine ecuaţia $\dfrac{n(n-1)}{n-5} = 18$, cu soluţiile $n_1 = 9$, $n_2 = 10$.

b) Ecuaţia se mai poate scrie $\dfrac{\dfrac{n!}{(n-10)!} - \dfrac{n!}{(n-8)!}}{\dfrac{n!}{(n-8)!}} = 109$, de unde obţinem după simplificări, ecuaţia $n^2 - 17n - 28 = 0$, fără soluţii convenabile.

c) Avem $\dfrac{(n+2)!}{A_n^k(n-k)!} = \dfrac{(n+2)!}{\dfrac{n!}{(n-k)!}(n-k)!} = (n+1)(n+2)$, astfel că ecuaţia devine $n^2 + 3n - 130 = 0$, cu soluţia convenabilă $n = 10$.

**III.1.34$^M$.** Ştiind că numărul aranjamentelor de $n$ elemente luate cîte $k$ este egal cu de $p$ ori numărul aranjamentelor de $n$ elemente luate cîte $k - 2$, să se găsească $n$.

**R.** Ecuaţia care se obţine este $A_n^k = pA_n^{k-2}$ sau $(n - k + 1)(n - k + 2) = p$ ale cărei soluţii sînt imediate.

**III.1.35$^M$.** În cîte moduri, din 30 de elevi, poate fi ales un comitet format din 3 elevi?

**R.** Evident, numărul cerut este $C_{30}^3 = \dfrac{30\,!}{3\,!\,(30-3)\,!} = 8120.$

**III.1.36$^M$.** Cîte numere de cîte patru cifre se pot forma astfel încît în fiecare număr o cifră să fie mai mare decît precedentă? Dar dacă fiecare cifră este mai mică decît precedenta?

**R.** a) Deoarece fiecare cifră este mai mare decît precedenta, numerele căutate nu pot începe cu 0. Rezultă că avem $C_9^4 = 126$ numere. b) Avem în total $C_{10}^4 = 210$ numere căci fiecare grupă de 4 cifre conduc, după rearanjare, la un singur număr de tipul cerut.

**III.1.37$^M$.** În cîte moduri se pot forma echipe din 4 elevi, şi un profesor, dacă sînt 20 elevi, şi 3 profesori?

**R.** Oricare din cei $C_3^1$ profesori se pot cupla cu oricare din cele $C_{20}^4$ cvadruple de elevi. Se pot forma deci $C_3^1 C_{20}^4$ echipe de tipul cerut.

**III.1.38$^M$.** La 9 clase trebuie repartizaţi 3 profesori de matematică, fiecăruia repartizîndu-i-se cîte 3 clase. În cîte moduri se poate face repartizarea?

**R.** Primului profesor i se pot repartiza oricare 3 din cele $C_9^3$ clase. Celui de-al doilea profesor i se pot repartiza oricare 3 din cele $C_6^3$ clase rămase. În sfîrşit, ultimului profesor i se pot repartiza 3 din oricare din cele $C_3^3$ clase rămase. Rezultă numărul total de posibilităţi egal cu $C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = 210$. 1680

**III.1.39$^M$.** Să se calculeze : $C_{10}^8$ ; $C_{16}^{13}$ ; $C_{n+1}^{k+1}$ ; $C_{100}^0 + C_{100}^{99}$ ; $C_{n-k}^{k+1}$ ; $C_{10}^2 + C_{10}^8$.

**R.** Avem :

$$C_{10}^8 = \frac{10\,!}{8\,!(10-8)\,!} = 45\,;\quad C_{16}^{13} = \frac{16\,!}{13\,!(16-13)\,!} = 560\,;\quad C_{n+1}^{k+1} =$$

$$= \frac{(n+1)\,!}{(k+1)\,!(n-k)\,!}\,;\quad C_{100}^0 + C_{100}^9 = 1 + 100 = 101\,;\quad C_{n-k}^{k+1} =$$

$$= \frac{(n-k)\,!}{(k+1)\,!\,(n-k-1)\,!},\quad C_{10}^2 + C_{10}^8 = 90.$$

**III.1.40$^M$.** Să se afle $n$, dacă :

a) $C_n^4 = \dfrac{5n(n-3)}{6}$ ; b) $C_n^3 + C_n^4 = n(n-2)$ ; c). $C_{n+8}^{n+3} = 5A_{n+6}^3$.

**R.** a) Cum $C_n^4 = \dfrac{n\,!}{4\,!(n-4)\,!}$ ecuaţia devine :

$$\frac{n\,!}{4\,!(n-4)\,!} = \frac{5n(n-3)}{6}$$

sau, după simplificări, $n^2 - 3n - 18 = 0$, cu soluţia convenabilă $n = 6$.

b) Cum :

$$C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{(n-2)(n-1)n}{6}, \quad C_n^4 = \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{24},$$

ecuaţia devine :

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = n(n-2)$$

care conduce la soluţia $n = 5$.

c) Cum $C_{n+8}^{n+3} = \frac{(n+8)!}{5!(n+3)!} = \frac{(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)(n+8)}{120}$,

$A_{n+6}^3 = \frac{(n+6)!}{(n+3)!} = (n+4)(n+5)(n+6)$, ecuaţia devine :

$$\frac{(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)(n+8)}{120} = 5(n+4)(n+5)(n+6)$$

de unde rezultă ecuaţia $(n+7)(n+8) = 600$, cu soluţia $n = 17$.

**III.1.41$^M$.** Se dă o mulţime $A$ care are $n$ elemente. Împărţim toate submulţimile lui $A$ în clase (disjuncte) punînd în aceeaşi clasă toate submulţimile lui $A$ care au acelaşi număr de elemente. Care din aceste clase cea mai numeroasă?

**R.** Există în $\mathscr{P}(A)$ un număr de $C_n^0$ submulţimi ale lui $A$, care conţin 0 elemente, $C_n^1$ submulţimi ale lui $A$ care conţin un element, ..., $C_n^k$ submulţimi ale lui $A$ care conţin $k$ elemente, ..., $C_n^n$ submulţimi ale lui $A$ care conţin $n$ elemente. Trebuie aşadar, cercetat care dintre numerele $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^k, \ldots, C_n^n$ este mai mare. Deoarece $C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1}$ avem $C_n^{k-1} < C_n^k$, dacă $\frac{n-k+1}{k} > 1$, de unde $k < \frac{n+1}{2}$ şi $C_n^{k-1} > C_n^k$, dacă $\frac{n-k+1}{2} < 1$, adică dacă $k > \frac{n+1}{2}$. Dacă $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, atunci $C_{2m}^m$ este cel mai mare dintre numerele date. Dacă $n = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$ rezultă că numerele $C_{2m+1}^m$ şi $C_{2m+1}^{m+1}$, egale între ele, sînt cele mai mari.

**III.1.42$^M$.** Să se rezolve inecuaţiile :

a) $C_n^5 < C_n^6$; b) $C_n^5 > C_n^7$; c) $C_{20}^{k-1} < C_{20}^k$; d) $C_{16}^{k-2} > C_{16}^k$.

**R.** a) Inecuaţia se scrie :

$$\frac{n!}{5!(n-5)!} < \frac{n!}{6!(n-6)!}$$

sau, după simplificări, $6 < m - 5$, de unde $n > 11$.

b) Analog, rezultă $n < 12$. c) Avem $k \leqslant 10$. d) Avem $k > 9$.

**III.1.43^M.** Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} A_x^y = 7A_x^{y-1} \\ 6C_x^y = 5C_x^{y+1} \end{cases}$; b) $\begin{cases} xC_{n-2}^{k-1} + \dfrac{n-1}{k-1}\,y = \dfrac{k}{n-1} \\[2ex] xC_{n-2}^{k-2} - \dfrac{n-1}{k}\,y = \dfrac{k-1}{n-1} \end{cases}$.

**R.** a) Avem:

$$A_x^y = \frac{x\,!}{(x-y)\,!};\quad A_x^{y-1} = \frac{x\,!}{(x-y+1)\,!};\quad C_x^y = \frac{x\,!}{y\,!\,(x-y)\,!};$$

$$C_x^{y+1} = \frac{x\,!}{(y+1)\,!\,(x-y-1)\,!}$$

astfel că sistemul devine:

$$\begin{cases} \dfrac{x\,!}{(x-y)\,!} = 7\,\dfrac{x\,!}{(x-y+1)\,!} \\[2ex] 6\,\dfrac{x\,!}{y\,!\,(x-y)\,!} = 5\,\dfrac{x\,!}{(y+1)\,!\,(x-y-1)\,!} \end{cases}$$

sau, după împărțirea ambilor membrii ai primei ecuații cu $\dfrac{x\,!}{(x-y)\,!}$, respectiv a ambilor membri ai celei de-a doua cu $\dfrac{x\,!}{y\,!\,(x-y-1)\,!}$:

$$1 = \frac{7}{x-y+1},\quad \frac{6}{x-y} = \frac{5}{y+1}$$

care conduce la soluțiile $x = 10,\ y = 4.$

b) Deoarece $C_{n-2}^{k-1} = \dfrac{n-k}{k-1}\,C_{n-2}^{k-2}$, prin înmulțirea celei de-a doua relații cu $-\dfrac{n-k}{k-1}$, obținem sistemul:

$$\begin{cases} x\,\dfrac{n-k}{k-1}\,C_{n-2}^{k-2} + \dfrac{n-1}{k-1}\,y = \dfrac{k}{n-1} \\[2ex] -x\,\dfrac{n-k}{k-1}\,C_{n-2}^{k-2} + \dfrac{(n-1)(n-k)}{k(k-1)}\,y = -\dfrac{n-k}{n-1} \end{cases}$$

Prin adunarea acestor două ecuații, obținem:

$$y\left[\frac{n-1}{k-1} + \frac{(n-1)(n-k)}{k(k-1)}\right] = \frac{k}{n-1} + \frac{k-n}{n-1}$$

sau, după calcule:

$$\frac{n(n-1)}{k(k-1)}\,y = \frac{2k-n}{n-1}$$

de unde $y = \dfrac{k(k-1)(2k-n)}{n(n-1)^2}$. Substituind acestor valoare în prima ecuație a sistemului, obținem:

$$xC_{n-2}^{k-1} + \frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{(2k-n)k(k-1)}{n(n-1)^2} = \frac{k}{n-1}$$

sau:

$$x = \frac{1}{C_{n-2}^{k-1}}\left[\frac{k}{n-1} - \frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{(2k-n)k(k-1)}{n(n-1)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{C_{n-2}^{k-1}}\cdot\frac{2k(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{C_n^k} = x$$

**III.1.44^M.** Din 11 persoane dintre care 7 bărbați și 4 femei, se formează o delegație alcătuită din 5 persoane dintre care cel puțin două femei. În cîte moduri se poate forma această delegație?

**R.** Numărul delegațiilor în care sînt două femei este, evident egal cu $C_4^2\cdot C_7^3$, căci oricare grupă de două din cele $C_4^2$ grupe de femei se poate combina cu oricare grupă de 3 din cele $C_7^3$ grupe de bărbați. Dacă numărul femeilor dintr-o delegație este 3, atunci numărul delegațiilor va fi $C_7^2C_4^3$, iar dacă numărul femeilor dintr-o delegație este 4, numărul grupelor este $C_7^1C_4^4$. Rezultă un număr total de:

$$C_7^3\cdot C_4^2 + C_7^2C_4^3 + C_7^1C_4^4$$

grupe.

**III.1.45^M.** Să se dezvolte după formula lui NEWTON:

a) $(x^2-a)^6$; b) $(a-b)^5$; c) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^4$; d) $(x+2)^7$; e) $(\sqrt{3x} + \sqrt{y})^7$; f) $(3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x})^5$.

**R.** Avînd în general:

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^ka^{n-k}b^k + \ldots + C_n^nb^n.$$

Deci:

a) $(x^2-a)^6 = x^{12} - 6ax^{10} + 15a^2x^8 - 20a^3x^6 + 15a^4x^4 - 6a^5x^2 + a^6$,

b) $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 6ab^2 - b^5$;

c) $a^2 - 4a^2\sqrt{ab} + 6ab - 4b\sqrt{ab} + b^2$;

d) $x^7 + 14x^6 + 84x^5 + 280x^3 + 560x^3 + 672x^2 + 448x + 128$;

e) $(\sqrt{3x}+\sqrt{y})^7 = 3^{\frac{7}{2}}x^{\frac{7}{2}} + 189x^6\sqrt{y} + 21\cdot3^{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}}y + 315x^2y^{\frac{3}{2}} + 35\cdot$
$\cdot 3^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}y^2 + 63xy^{\frac{5}{2}} + 73^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}y^3 + y^{\frac{7}{2}}$.

f) $(3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x})^5 = 243\,x^{\frac{5}{3}} - 810x^{\frac{11}{6}} + 1080x^2 - 720x^{\frac{13}{6}} + 240x^{\frac{7}{3}} - 32x^{\frac{5}{2}}$

**III.1.46^M.** Să se determine:

a) termenul al optulea al dezvoltării $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{11}$;

b) termenul al cincilea al dezvoltării $(\sqrt{2a} - \sqrt{ab})^7$;

c) termenul din mijloc al dezvoltării $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^6$.

d) cei doi termeni din mijloc ai dezvoltării $(\sqrt{a} - \sqrt[3]{b})^9$,

**R.** În general, termenul de rang $k+1$ din dezvoltarea $(a+b)^n$ este $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$. Avem: a) $T_8 = C_{11}^7 (x^2)^{11-7}\left(-\frac{1}{x}\right)^7 = -330\ x$;

b) $T_5 = C_7^4(\sqrt{2a})^{7-4}(-\sqrt{ab})^4 = 70\sqrt{2}a^3b^2\sqrt{a}$; c) $-20xy\sqrt{xy}$; d) $126a^2b\sqrt{a}\sqrt[3]{b}$, $-126a^2b\sqrt[3]{b^2}$.

**III.1.47^PO.** Fie $n \in \mathbb{N} - \{1\}$. Se consideră o mulţime de $n$ pahare, aşezate cu gura în jos. Este posibil să se răstoarne toate paharele cu gura în sus printr-o serie finită de operaţii, astfel încît la fiecare operaţie să fie întoarse $n-1$ pahare?

**R.** Dacă $n$ este par şi efectuăm $n$ operaţii de tipul cerut în enunţ, lăsînd nemişcat cîte un alt pahar pentru fiecare operaţie atunci, după ultima operaţie fiecare pahar a fost întors de $n-1$ ori, deci toate paharele au fost răsturnate (în figură este tratat cazul $n = 4$).

4) V V V V
3) V Λ Λ Λ
2) Λ Λ V V
1) V V V Λ
0) Λ Λ Λ Λ

Dacă $n$ este impar, să asociem unui pahar cu gura în sus numărul $+1$ şi unui pahar cu gura în jos, numărul $-1$. În poziţia iniţială, produsul reprezentărilor este $+1$, iar în cea finală, $-1$. Orice operaţie inversează $n-1$ pahare, deci un număr par. Rezultă că orice operaţie lasă produsul numerelor asociate neschimbat. Deci, în acest caz, problema nu are soluţie.

**III.1.48^PO.** Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Sînt disponibile $2n+1$ obiecte, fiecare cîntărind un număr întreg de grame. Se ştie că oricare grupă de $2n$ obiecte, alese la întîmplare, se poate împărţi, cel puţin într-un fel, în două grupe de cîte $n$ obiecte, astfel încît cele două grupe să cîntărească aceleaşi număr de grame.

Să se arate că masele celor $2n+1$ obiecte sînt egale.

**R.** Toate greutăţile au masele de aceeaşi paritate În adevăr, să presupunem că există $k$ greutăţi de masă impară şi $2n+1-k$ de masă impară, $1 \leqslant k \leqslant 2n$. Alegem o greutate de masă impară (acest lucru este, evident, posibil, în ipoteză că greutăţile nu au masele de aceeaşi paritate). Cum celelalte $2n$ se pot împărţi (cel puţin într-un fel) în două grupe de cîte $n$ cu masele egale, rezultă că suma maselor celor $2n$ greutăţi este un număr par deci suma maselor celor $2n+1$ greutăţi este un număr impar.

Alegem acum o greutate cu masă pară (lucru, de asemenea, posibil) şi, repetînd raţionamentul anterior, deducem că suma maselor celor $2n+1$ greutăţi este un număr par, contrar rezultatului obţinut anterior.

Deci masele tuturor greutăţilor au aceeaşi paritate.

Dacă toate au masele impare, scăzînd o unitate din masa fiecăruia, proprietatea enunţului nu se schimbă.

Dacă masa fiecărei greutăţi este pară, împărţind prin 2 pe fiecare, proprietatea, de asemenea, nu se schimbă.

Făcînd astfel de operaţii, ajungem la un moment dat că masa unei greutăţi este nulă (deci este practic desfiinţată). Admiţînd că în acest moment există „greutăţi" cu masă nenulă, reţinem una dintre ele iar pe celelalte $2n$ (dintre care unele pot avea masa nulă) le împărţim potrivit enunţului, pînă cînd toate „devin" cu masa nulă.

**III.1.49**[PO]. Să se calculeze suma:

$$S=\sum_{k=7}^{2n}\frac{(-1)}{C_{2n}^{k}}.$$

**R.** Să considerăm suma:

$$S_1=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{2n-k}{C_{2n}^{k}}. \qquad (1)$$

Vom scrie pe $S_1$ altfel. Avem:

$$\frac{2n-k}{C_{2n}^{k}}=\frac{2n-k}{\dfrac{(2n)!}{k!(2n-k)!}}=\frac{2n-k+1-1}{\dfrac{(2n)!}{k!(2n-k)!}}=\frac{2n+1-k}{\dfrac{(2n)!}{k!(2n-k)!}}-\frac{1}{\dfrac{(2n)!}{k!(2n-k)}}=$$

$$=\frac{1}{\dfrac{(2n)!}{k!(2n+1-k)!}}-\frac{1}{C_{2n}^{k}}=\frac{2n+1}{C_{2n+1}^{k}}-\frac{1}{C_{2n}^{k}}$$

deci:

$$\frac{2n-k}{C_{2n}^{k}}=\frac{2n+1}{C_{2n+1}^{k}}+\frac{1}{C_{2n}^{k}}(\forall)k\in\{0,\ 1,\ldots,2n\}. \qquad (2)$$

Cu această din urmă relaţie, $S_1$ devine:

$$S_1=(2n+1)\left[\frac{1}{C_{2n+1}^{0}}-\frac{1}{C_{2n+1}^{0}}+\frac{1}{C_{2n+1}^{2}}+-\ldots+(-1)^k\frac{1}{C_{2n+1}^{k}}+\ldots+\right.$$
$$\left.-\frac{1}{C_{2n+1}^{2n-1}}+\frac{1}{C_{2n+1}^{2n}}\right]-S.$$

Dar:

$$\frac{1}{C_{2n+1}^{1}}=\frac{1}{C_{2n+1}^{2n}};\quad \frac{1}{C_{2n+1}^{2}}=\frac{1}{C_{2n+1}^{2n-1}};$$

(am folosit formula $C_p^k=C_p^{p-k}$ (3)). Aşadar:

$$S_1=(2n+1)\cdot\frac{1}{C_{2n+1}^{0}}-S$$

adică $S_1=2n+1-S$ (4). Relaţia (1), folosind formula (3), devine:

$$S_1=\frac{2n}{C_{2n}^{2n}}-\frac{2n-1}{C_{2n}^{2n-1}}+\frac{2n-2}{C_{2n}^{2n-2}}+\ldots+(-1)^k\frac{2n-k}{C_{2n}^{2n-k}}+\ldots-\frac{1}{C_{2n}^{1}}+\frac{0}{C_{2n}^{0}} \qquad (5)$$

Din (1) şi (2), prin adunare membru cu membru, avem:

$$2S_1 = 2nS:$$

adică:

$$S_1 = nS. \tag{6}$$

Relaţia (6) împreună cu (4) conduc la:

$$nS = 2n + 1 - S$$

deci $S = \frac{2n+1}{n+1}$.

**III.1.50**PO. (Erdös) Fie $n \in \mathbb{N}^* - \{1, 2, 3\}$ şi fie $X$ o mulţime cu $n$ elemente. Se consideră o familie $\mathscr{F}$ de submulţimi ale lui $X$ cu 3 elemente, astfel încît oricare două să aibă cel mult un element comun.

Să se arate că există o submulţime a lui $X$ care nu conţine nici o submulţime cu 3 elemente care aparţin familiei $\mathscr{F}$ şi care are cel puţin $[\sqrt{2n}]_*$ elemente.

**R.** Pentru a demonstra proprietatea exprimată de enunţ, să considerăm o submulţime $M$ a lui $X$ care nu conţine nici o submulţime din familia $\mathscr{F}$ şi este maximală cu această proprietate, adică pentru orice $x \in X - M$, există $B \in \mathscr{F}$ astfel încît $B \subset M \cup \{x\}$. Existenţa unei mulţimi $M$, maximală cu proprietatea enunţată, este evidentă. Se pleacă, în acest sens, de la o mulţime nemaximală, de exemplu, de la o mulţime formată dintr-un element al lui $X$, şi i se adaugă noi elemente pînă cînd se obţine o mulţime maximală.

Fie card $M = r$, deci:

$$\text{card } (X \dot{-} M) = n - r.$$

Conform proprietăţii de maximalitate, pentru orice $x \in X - M$, există o submulţime $A_x \subset M$ cu card $A_x = 2$, astfel încît $\{x\} \cup A_x \in \mathscr{F}$. În felul acesta, am definit o funcţie $f : X - M \to \mathscr{L}_2(m)$, unde prin $\mathscr{L}_2(M)$ am notat mulţimea părţilor lui $M$ cu două elemente.

Să demonstrăm că $f$ este o injecţie, folosind faptul că mulţimile din familia $\mathscr{F}$ au două cîte două cel mult un element comun.

Fie $x, y \in X - M$. Dacă am avea $A_x = A_y$, atunci mulţimile $A_x \cup \{x\}$ şi $A_y \cup \{y\}$ ar aparţine familiei $\mathscr{F}$ şi, în plus, conţin două elemente comune, ceea ce contrazice ipoteza că mulţimile din $\mathscr{F}$ au două cîte două cel mult un element comun.

Deci $x \neq y$ implică $A_x \neq A_y$ sau $f(x) \neq f(y)$ deci $f$ este injecţie, deci:

$$\text{card } (X - M) \leqslant \text{card } \mathscr{L}_2(X).$$

Dar:

$$\text{card } \mathscr{L}_2(M) = \frac{r(r-1)}{2}$$

deoarece $M$ avînd $r$ elemente, numărul perechilor $\{x, y\}$ cu $x, y \in M$, $x \neq y$, perechi în care nu contează ordinea elementelor $x$ şi $y$, se obţine astfel: $x$ se poate alege din $M$ în $r$ moduri diferite şi $y$ se poate alege din elementele rămase în $r-1$ moduri diferite. Numărul de $r(r-1)$ posibilităţi trebuie însă împărţit la 2, deoarece fiecare pereche se obţine de două ori: odată ca $\{x, y\}$ şi altă dată ca $\{y, x\}$, fiindcă am presupus că nu contează ordinea elementelor $x$ şi $y$.

Am obţinut deci că:

$$n - r \leqslant \frac{r(r-1)}{2}$$

sau:

$$r^2 + r - 2n \geqslant 0$$

de unde:

$$r > \frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2}$$

ţinînd seama de semnul trinomului de gradul al II-lea şi de faptul că $r$ este număr natural. Dacă notăm:

$$\frac{-1 + \sqrt{8n+1}}{2} = k,$$

obţinem:

$$2n = k^2 + k$$

şi deci:

$$[\sqrt{2n}]_* = [\sqrt{k(k+1)}]_*$$

Dacă numărul $k$ este natural, atunci:

$$[\sqrt{k(k+1)}]_* = k,$$

deoarece:

$$k < \sqrt{k(k+1)} < k + 1$$

şi deci $r \geqslant [\sqrt{2n}]_*$. În caz contrar:

$$r > [k]_* + 1$$

şi deoarece:

$$[\sqrt{k(k+1)}]_* \leqslant [k+1]_* = [k]_* + 1 \leqslant r$$

rezultă, de asemenea, $r \geqslant [\sqrt{2n}]_*$.

Am demonstrat deci că orice submulţime $M$ a lui $X$, maximală în raport cu proprietatea că nu conţine nici o mulţime din familia $\mathscr{F}$, conţine cel puţin $[\sqrt{2n}]_*$ elemente, fapt ce încheie demonstraţia.

**III.1.51**$^{\mathrm{PO}}$. Cineva a scris $n$ scrisori şi le-a introdus în plicuri fără a scrie, mai înainte, adresele. După aceasta, nu mai ştie fiecare scrisoare în care plic se află şi scrie la întîmplare pe plicuri cele $n$ adrese. Care este probabilitatea ca cel puţin unul dintre destinatari să primească scrisoarea destinată lui?

**R.** a) *Soluţia I.* Experienţa de care este vorba în enunţ constă în aceea că pe fiecare dintre cele $n$ plicuri se scrie una dintre cele $n$ adrese. În acest caz, pe primul plic poate fi scrisă oricare dintre cele $n$ adrese, pe al doilea poate fi scrisă oricare din cele $n-1$ adrese rămase, pe al treilea poate fi scrisă oricare din cele $n-2$ adrese rămase, etc. Asociind aceste posibilităţi, vom găsi că, în total, experienţa noastră poate avea:

$$n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$$

cazuri egal posibile diferite.

Astfel, rămîne să mai calculăm numărul cazurilor favorabile.

Cazurile favorabile vor fi acelea în care cel puţin pe unul dintre plicuri va fi scrisă adresa corectă. Numărul de cazuri în care pe primul plic va fi scrisă adresa corectă este, evident, egal cu numărul de moduri în care pot fi scrise celelalte $n-1$ adrese pe plicuri, adică este egal cu $(n-1)!$. La fel, numărul cazurilor în care adresa corectă va fi scrisă pe al doilea plic, pe al treilea plic,...,pe al $n$-lea plic, va fi egal cu $(n-1)!$.

Însumînd toate cazurile în care adresa corectă va fi scrisă pe primul, pe al doilea, pe al treilea,..., pe al $n$-lea plic, vom obține:

$$\underbrace{(n-1)!+(n-1)!+\ldots+(n-1)!}_{n \text{ ori}} = (n-1)!n = n!$$

cazuri favorabile. Însă, într-un astfel de calcul, facem greșeala că socotim de mai multe ori unele cazuri în care în același timp sînt scrise adresele corecte pe mai multe plicuri (tocmai datorită acestei greșeli, numărul cazurilor favorabile coincide cu numărul total al cazurilor).

Toate cazurile în care pe două plicuri oarecare (de exemplu, pe primul și pe al doilea) au fost scrise adresele corecte, se consideră de două ori în numărul $(n-1)!\,n$: o dată printre $(n-1)!$ cazuri în care pe primul plic este scrisă adresa corectă și a doua oară printre $(n-1)!$ cazuri în care pe al doilea plic este scrisă adresa corectă. Numărul cazurilor în care și pe primul și pe al doilea plic sînt scrise adresele corecte este, evident, egal cu numărul de moduri în care pot fi completate celelalte $n-2$ plicuri, adică este egal cu $(n-2)!$. Același este, evident, și numărul cazurilor în care oricare două plicuri vor fi completate corect. Deoarece din $n$ plicuri se pot forma $C_n^2$ perechi diferite, atunci însumînd toate cazurile în care va fi completată corect prima pereche de plicuri, a doua pereche, de a treia pereche,..., a $C_n^2$-a pereche, vom obține în total:

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(n-2)! = \frac{n!}{1\cdot 2}$$

cazuri. Fiecare dintre aceste cazuri este socotit de două ori în expresia $(n-1)!n = n!$. Deci numărul obținut trebuie să fie scăzut din $n!$; astfel, vom obține drept număr al cazurilor favorabile expresia:

$$n! - \frac{n!}{1\cdot 2}.$$

Însă, într-un astfel de calcul, tot mai facem o eroare. În expresia anterioară se consideră o singură dată fiecare caz în care numai un singur plic este scris corect (toate aceste cazuri intră în primul termen) și o singură dată se consideră fiecare caz în care două plicuri sînt scrise corect (fiecare dintre aceste cazuri se consideră de două ori în termenul $n!$ și o singură dată în termenul $\frac{n!}{1\cdot 2}$); însă, cazurile în care au fost completate corect mai mult de două plicuri nu sînt socotite exact aici. Să cercetăm, de exemplu, cazul în care au fost completate corect trei plicuri: primul, al doilea, și al treilea. În primul termen, $n!$, acest caz este considerat de trei ori: el figurează o dată printre cele $(n-1)!$ cazuri în care primul plic este completat corect, printre cele $(n-1)!$ cazuri în care al doilea plic este completat corect și printre cele $(n-1)!$ cazuri, în care al treilea plic este completat corect. În al doilea termen, $\frac{n!}{1\cdot 2}$, acest caz este, de asemenea, socotit de trei ori: el figurează printre cele $(n-2)!$ cazuri în care primul și al doilea plic sînt completate corect, printre cele $(n-2)!$ cazuri în care primul și al treilea plic sînt completate corect și printre cele $(n-2)!$ cazuri în care al doilea și al treilea plic sînt completate corect. Astfel, în diferența $n! - \frac{n!}{1 \cdot 2}$, cazul a trei plicuri completate corect nu este deloc considerat. Deoarece toate aceste cazuri sînt favorabile, rezultă că trebuie să adăugăm la $n! - \frac{n!}{1 \cdot 2}$ numărul total al acestor cazuri. Numărul cazurilor în care primul, al doilea și al treilea plic sînt completate corect, este egal cu numărul de moduri în care pot fi completate celelalte $n-3$ plicuri, adică este egal cu $(n-3)!$. Deoarece din $n$ plicuri se pot separa $C_n^3$ grupe de trei plicuri, însumînd numărul $(n-3)!$ după toate aceste grupuri de trei, se obține în total:

$$(n-3)!\ C_m^3 = \frac{n!}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

cazuri care nu sînt luate în considerare în expresia $n! - \frac{n!}{1 \cdot 2}$. Astfel, numărul corectat al cazurilor favorabile va deveni acum:

$$n! - \frac{n!}{1 \cdot 2} + \frac{n!}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

După toate cele spuse, este clar că ultima expresie pentru numărul cazurilor favorabile, de asemenea, nu este definitivă. În adevăr, în această expresie se consideră exact toate cazurile în care sînt completate corect unul, două sau trei plicuri; însă, cazurile în care sînt completate mai mult de trei plicuri nu este socotit exact. Să cercetăm și cazul în care sînt completate corect patru plicuri, de exemplu primul, al doilea, al treilea și al patrulea. Acest caz este considerat de patru ori în termenul $(n-1)!n = n!$, de șase ori în termenul $(n-2)!\ C_n^2 = \frac{n!}{1 \cdot 2}$ (din cele patru plicuri se pot forma $C_4^2 = 6$ perechi de plicuri) și de patru ori în termenul $(n-3)!\ C_n^3 = \frac{n!}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ (din patru plicuri se pot forma $C_4^3 = 4$ grupuri de trei plicuri). Astfel, acest caz este considerat în expresia:

$$n! - \frac{n!}{1 \cdot 2} + \frac{n!}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

în total de $4 - 6 + 4 = 2$ ori.
să scădem numărul lor total. Însă, numărul cazurilor în care primul, al doilea, al treilea și al patrulea plic sînt completate corect, este egal cu $(n-4)!$. Înmulțind această expresie cu numărul $C_n^4$ de grupuri de cîte patru plicuri, vom obține expresia:

$$(n-4)!\ C_n^4 = \frac{n!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Astfel, evaluarea următoare a numărului căutat al cazurilor favorabile o dă expresia:

$$n! - \frac{n!}{1 \cdot 2} + \frac{n!}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{n!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

Bineînţeles că această expresie nu este cea căutată. Însă raţionamentul făcut pînă acum arată că toate corecţiile succesive, care trebuie aduse, se calculează după o anumită lege simplă. Ne mai rămîne să verificăm valabilitatea acestei legi în cazul general. Această verificare poate fi făcută prin metoda inducţiei matematice.

Vom presupune, în acest sens, că după $k$ asemenea paşi, am obţinut expresia:

$$(n-1)!C_n^1 - (n-2)!C_n^2 + \ldots + (-1)^k (n-k)!C_n^k =$$

$$= n! - \frac{n!}{1 \cdot 2} + \frac{n!}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \ldots - (-1)^k \frac{n!}{1 \cdot 2 \ldots k},$$

în care sînt socotite exact toate cazurile în care nu mai mult de $k$ plicuri sînt completate corect (considerăm că $n > k$). Vom căuta acum să evaluăm corect şi acele cazuri în care $k+1$ plicuri au fost completate corect. Fiecare dintre aceste cazuri este socotit în primul termen, $(n-1)!\, C_n^1$, de $C_{k+1}^1$ ori, în al doilea termen $(n-2)!C_n^2$, care este cu semnul —, este socotit de $C_{k+1}^2$ ori (deoarece din $k+1$ plicuri se pot forma $C_{k+1}^2$ perechi), în al treilea termen, $(n-3)!\, C_n^3$ de $C_{k+1}^k$ ori, etc., în sfîrşit, în ultimul termen, $(n-k)!\, C_n^k$, este socotit de $C_{k+1}^k$ ori. Deci, în toată suma, acest caz este socotit de:

$$C_{k+1}^1 - C_{k+1}^2 + C_{k+1}^3 - \ldots - (-1)^k C_{k+1}^k = 1 + (-1)^{k+1},$$

adică această sumă este egală cu 2 pentru $k$ impar şi egală cu 0 pentru $k$ par. Deoarece toate aceste cazuri trebuie să le considerăm o singură dată, atunci pentru $k+1$ par, numărul total al acestor cazuri trebuie să-l scădem din expresia obţinută mai înainte. Însă numărul cazurilor în care anumite $k+1$ plicuri sînt scrise corect este egal cu $(n-k-1)!$. Înmulţind acest rezultat cu numărul $C_n^{k+1}$, care exprimă numărul grupurilor de $k+1$ plicuri, care se pot forma din toate cele $n$ plicuri, vom obţine termenul:

$$(n-k-1)!\; C_n^{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!}$$

care trebuie scăzut sau adăugat la expresia obţinută mai înainte, după cum $k+1$ este par sau impar.

Astfel, expresia în care sînt socotite exact toate cazurile în care nu mai mult de $k+1$ plicuri sînt scrise corect, are forma:

$$n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \ldots - (-1)^k \frac{n!}{k!} + (-1)^{k+1} \frac{n!}{(k+1)!}.$$

Deci, presupunînd că după $k$ paşi avem expresia:

$$n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \ldots - (-1)^k \frac{n!}{k!},$$

am demonstrat că după $k+1$ paşi vom obţine expresia:

$$n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \ldots - (-1)^{k+1} \frac{n!}{(k+1)!},$$

care, în baza principiului inducţiei, confirmă regula generală observată de noi.

Toate cazurile favorabile vor fi luate, evident, după $n$ paşi, cînd vor fi socotite corect toate cazurile în care sînt completate corect nu mai mult decît $n$ plicuri (adică orice număr de plicuri, deoarece în total avem $n$ plicuri). Deci, numărul total de cazuri favorabile este egal cu:

$$n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \ldots - (-1)^n \frac{n!}{n!}.$$

Deoarece numărul total de cazuri posibile este aici $n!$, rezultă că probabilitatea căutată este:

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots - (-1)^n \frac{1}{n!},$$

*Soluţia II.* Să căutăm numărul total al cazurilor nefavorabile, adică numărul cazurilor în care nici unul dintre plicuri nu va fi completat corect. Vom nota numărul unor astfel de cazuri care depinde, desigur, de numărul $n$, cu $A_n$. Vom numerota într-un fel oarecare plicurile noastre de la 1 la $n$; adresa, pe care trebuie să o scriem pe plicul al $k$-lea, o vom numi adresa a $k$-a.

Dacă avem un caz nefavorabil, pe plicul 1 poate să fie scrisă adresa a 2-a, a 3-a, a 4-a, ..., a $n$-a. Să cercetăm acele cazuri nefavorabile pentru care pe plicul 1 se află scrisă adresa a 2-a. În acest caz, pe plicul al 2-lea poate fi scrisă sau adresa 1 sau oricare din adresele de la 3 la $n$. Ambele aceste cazuri le vom cerceta separat.

Dacă pe plicul al 2-lea există scrisă adresa 1, atunci pentru ca acest caz să fie nefavorabil este necesar numai ca pe nici unul dintre celelalte $n-2$ plicuri (de la al 3-lea pînă la al $n$-lea) să nu fie scrisă adresa corectă. Numărul unor astfel de cazuri, evident, este egal cu numărul cazurilor nefavorabile pentru un număr de plicuri egal cu $n-2$, adică este egal cu $A_{n-2}$.

Să cercetăm, acum, acele cazuri în care pe plicul al 2-lea este scrisă adresa diferită de a 1-a. Numărul unor astfel de cazuri este, evident, egal cu numărul de moduri în care pot fi completate plicurile 2, 3, ..., $n$, scriind pe ele adresele 1, 3, 4, .., $n$, astfel ca pe plicul 2 să nu fie scrisă adresa 1, pe plicul 3 să nu fie scrisă adresa 3, pe plicul 4 să nu fie scrisă adresa 4, ..., pe plicul $n$ să nu fie scrisă adresa $n$. Acest număr, evident, este egal cu numărul cazurilor nefavorabile în cazul a $n-1$ plicuri, adică cu $A_{n-1}$ (faptul că aici pe plicul 2 nu trebuie să fie scrisă adresa 1, iar nu adresa 2, bineînțeles, nu este esențial).

Deci, numărul total de cazuri nefavorabile în care pe plicul 1 este scrisă adresa 2 este egal cu $A_{n-1}+A_{n-2}$. Aceeași expresie o vom obține pentru numărul acelor cazuri nefavorabile în care pe plicul 1 sînt scrise adresele $3, 4, \ldots, n$. Deoarece, în total, pe primul plic, în cazurile nefavorabile, pot fi scrise $n-1$ adrese diferite, rezultă că obținem formula:

$$A_n = (n-1)(A_{n-1} + A_{n-2}). \qquad (*)$$

Să considerăm, acum, probabilitatea $p_n$ ca nici unul dintre cele $n$ plicuri să nu fie completate corect. Deoarece numărul total al cazurilor egal posibile este, în cazul nostru, egal cu $n!$ (vezi începutul primei soluții), iar numărul cazurilor în care nici unul dintre plicuri nu este completat corect este egal cu $A_n$, atunci:

$$p_n = \frac{A_n}{n!}$$

Formula (*) devine:

$$\frac{A_n}{n!} = (n-1)\left(\frac{A_{n-1}}{n!} + \frac{A_{n-2}}{n!}\right) =$$

$$=(n-1)\left(\frac{1}{n} - \frac{A_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{A_{n-2}}{(n-2)!}\right)$$

sau:

$$p_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)p_{n-1} + \frac{1}{n}p_{n-2};\ p_n = p_{n-1} - \frac{1}{n}(p_{n-1} - p_{n-2}).$$

Pentru $n = 1$ va exista un singur caz favorabil, deoarece $A_1 = 0$ și $p_1 = 0$; pentru $n = 2$, din două cazuri egal posibile unul va fi favorabil și unul nu, deoarece $p_2 = \frac{1}{2}$. Utilizînd formula obținută, se poate calcula succesiv:

$$p_3 = p_2 - \frac{1}{3}(p_2 - p_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3},$$

$$p_4 = p_3 - \frac{1}{4}(p_3 - p_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2 \cdot 3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$p_5 = p_4 - \frac{1}{5}(p_4 - p_3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5},$$

$$p_n = p_{n-1} - \frac{1}{n}(p_{n-1} - p_{n-2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2\cdot 3\cdot 4\ldots(n-1)} -$$

$$-\frac{1}{n}\,\frac{(-1)^{n-1}}{2\cdot 3\ldots(n-1)} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Deoarece numărul total al cazurilor favorabile este egal cu $n! - A_n$, probabilitatea cerută este:

$$\frac{n! - A_n}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

**III.1.52**PO. Fiecare om de pe pămînt a dat mîna cu un anumit număr de persoane. Să se demonstreze că numărul celor care au dat mîna cu un număr impar de persoane este par.

**R.** Să numim „persoană pară" orice persoană care a strîns un număr par de mîini și „persoană impară", orice persoană care a strîns un număr impar de mîini.

Înainte de a fi apărut obiceiul de a da mîna, numărul persoanelor impare era, evident, egal cu zero.

Prima strîngere de mîini va produce două persoane impare. Începînd de atunci, fiecare strîngere de mîini se va produce între două persoane pare, două persoane impare, sau între o persoană pară și una impară. În primul caz, numărul persoanelor impare crește cu doi, în al doilea caz, numărul persoanelor impare scade cu doi, și în al treilea caz, persoana pară devine impară și persoana impară devine pară, deci numărul persoanelor impare rămîne neschimbat.

Rezultă că nici o strîngere de mînă nu schimbă paritatea numărului de persoane impare și, cum s-a plecat de la 2, el rămîne întotdeauna par.

**III.1.53**PO. a) La o casă de bilete stau la rînd $m + n$ oameni; $n$ dintre ei au monede de cîte cinci lei, iar ceilalți $m$ au numai monede de zece lei. Biletul costă cinci lei. La începutul vînzării casa nu are bani. Care este probabilitatea ca nici unul dintre cumpărători să nu fie nevoit să aștepte restul?

b) Să se rezolve problema, dacă se presupune că la începutul vînzării casa avea $p$ monede de cîte cinci lei.

c) La o casă de bilete stau la rînd $m + n$ oameni; $n$ dintre ei au monede de cîte un leu, iar ceilalți $m$ au numai monede în valoare de trei lei. Un bilet costă un leu. La începutul vînzării, casa nu are bani. Care este probabilitatea ca nici unul dintre cumpărători să nu fie nevoit să aștepte restul?

**R.** a) *Prima soluție.* Experiența considerată în problemă constă în aceea că $m + n$ cumpărători, dintre care $n$ au monede de cinci lei și $m$ numai monede de zece lei, se așează într-un mod oarecare la rînd pentru bilete.

Numărul total de cazuri egal posibile ale acestei experiențe este, evident, egal cu numărul de moduri de așezare a $m$ cumpărători, care au numai monede de zece lei în rîndul format de $n + m$ oameni, adică este egal cu $C_{n+m}^m$. Vom reprezenta aceste $C_{n+m}^m$ posibilități cu ajutorul celor mai scurte drumuri în număr de $C_{n+m}^m$ care unesc încrucișările $(0, 0)$ și $(n, m)$.

Anume, vom duce în plan, pornind de la punctul $A_0$ de coordonate $(0, 0)$ segmentul $|A_0A_1|$ de lungime 1, orizontal (de la stînga spre dreapta), sau vertical (de jos în sus), după cum primul cumpărător a avut monede de cinci lei sau numai de zece lei.

Din punctul $A_1$ vom duce segmentul $|A_1A_2|$ de lungime 1, orizontal sau vertical, după cum al doilea cumpărător a avut sau nu monede de cinci lei. Din punctul $A_2$ vom duce segmentul $|A_2A_3|$ de lungime 1, orizontal sau vertical, după cum al treilea cumpărător a avut sau nu monede de cinci lei, etc.

În acest caz, fiecăreia dintre cele $C_{n+m}^m$ posibilități de așezare în rînd a $n+m$ cumpărători îi va corespunde o linie frîntă $A_0A_1A_2...A_{n+m}$ formată din $n$ segmente orizontale și $m$ segmente verticale. Toate aceste linii frînte se vor sfîrși în punctul $A_{n+m}$ de coordonate $(n, m)$ situat cu $n$ unități la dreapta și cu $m$ unități mai sus de punctul $A_0$, și vor da toate cele mai scurte drumuri posibile care unesc „încrucișările" $A_0$ de coordonate $(0, 0)$ și $A_{n+m}$ de coordonate $(n, m)$.

Vom determina acum numărul de cazuri în care nici unuia dintre cumpărători nu i se va întîmpla să aștepte restul. Pentru ca aceasta să aibă loc neapărat, este necesar ca în fața fiecăruia dintre cumpărători să stea un număr de persoane, care au monede de cinci lei, nu mai mic decît numărul acelora care au numai monede de zece lei.

Geometric, aceasta înseamnă că fiecărui caz favorabil îi corespunde o linie frîntă $A_0A_1...A_{n+m}$, situată în întregime mai jos de dreapta $l$, care trece prin punctul $A_0$ sub unghiul de 45° față de orizontală, în particular, primul segment al unei astfel de linii frînte trebuie să fie orizontal.

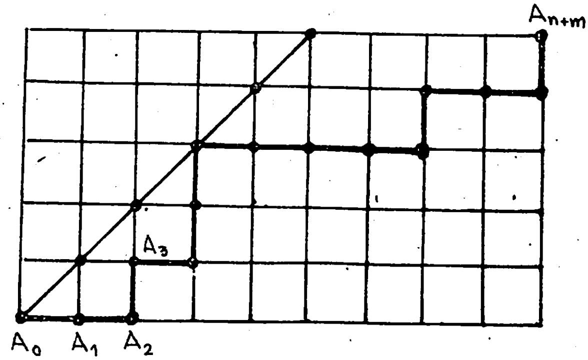
De aici rezultă că în fiecare linie frîntă care corespunde unui caz nefavorabil, trebuie să intersecteze dreapta $l$, sau, ceea ce este același lucru, trebuie să aibă vîrfurile pe dreapta $l_1$, paralelă cu dreapta $l$ și obținută din $l$ printr-o translație în sus cu o distanță egală cu 1.

Pentru $m > n$, toate liniile frînte vor avea, neapărat, vîrfurile pe dreapta $l_1$; în acest caz, punctul $A_{n+m}$ se află mai sus de dreapta $l$. Vom presupune, acum, că $m \leqslant n$ și vom determina numărul liniilor frînte care au vîrfurile pe dreapta $l_1$. Fie $A_k$ primul vîrf al unei astfel de linii frînte $A_0A_1...A_{n+m}$, care aparține dreptei $l_1$. Vom lua simetrica părții $A_0A_1...A_k$ a acestei linii frînte față de dreapta $l_1$.

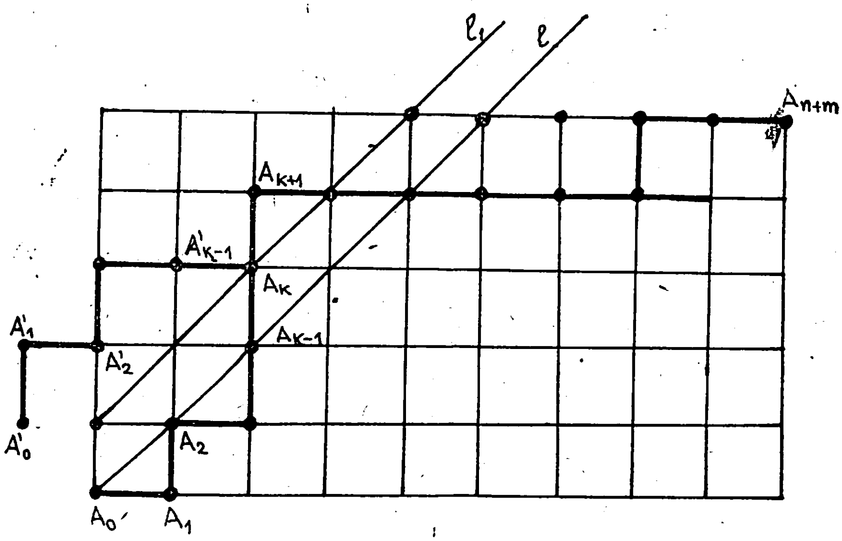
Vom obține, în acest caz, o nouă linie frîntă $A_0'A_1'...A_{k-1}'A_kA_{k+1}...A_{n+m}$, care unește punctul $A_{n+m}$ cu punctul $A_0'$, simetricul lui $A_0$ față de $l_1$, adică situat cu o unitate mai la stînga și cu o unitate mai sus de punctul $A_0$.

Mai departe, pentru $m \leqslant n$, fiecare cea mai scurtă linie frîntă, care unește punctele $A_0'$ și $A_{n+m}$ va intersecta neapărat dreapta $l_1$. Dacă $A_k$ este primul punct de intersecție al unei linii frînte $A_0'A_1'...A_{k-1}'A_k...A_{n+m}$ cu dreapta $l_1$, atunci, luînd simetria părții $A_0'A_1'...A_{k-1}'A_k$ a acestei linii frînte față de $l_1$, vom obține linia frîntă $A_0A_1...A_kA_{k+1}...A_{n+m}$, care unește $A_0$ cu $A_{n+m}$ și care are vîrfurile pe dreapta $l_1$. Astfel, pentru $m \leqslant n$ numărul liniilor frînte care unesc $A_0$ cu $A_{n+m}$ și care au vîrfurile pe dreapta $l_1$ este egal cu numărul tuturor liniilor frînte care unesc $A_0'$ cu $A_{n+m}$. Însă aceste ultime linii frînte sînt formate din $n+1$ segmente orizontale și $m-1$ segmente verticale, numărul lor este egal cu $C_{n+m}^m$.

Deci, în problema considerată, numărul total al cazurilor egal posibile este egal cu $C^m_{n+m}$, iar numărul cazurilor nefavorabile este egal cu numă-




a




b

rul total al cazurilor pentru $m > n$ și egal cu $C^{m-1}_{n+m}$ pentru $m \leqslant n$. De aici, rezultă că numărul cazurilor favorabile este respectiv egal cu zero sau cu:

$$C^m_{n+m} - C^{m-1}_{n+m}$$

Deci, probabilitatea căutată ca nici un cumpărător să nu fie nevoit să aștepte restul este egală cu zero pentru $m > n$, și este egală cu:

$$\frac{(n+m)!\,(n-m+1)}{(n+1)!\,m!} : C^m_{n+m} = \frac{n-m+1}{n+1}$$

pentru $m \leqslant n$.

**III.1.54**[Po]. Se dă mulţimea cu $2n+1$ numere reale:

$$A = \{a_{-n};\ a_{n+1};\ a_{n+2};\dots;a_{-1};\ a_0;\ a_1;\dots;a_n\}$$

Să se demonstreze prin inducţie relaţia:

$$\sum_{0\leqslant x,y\leqslant n-1} a_{x-y} = \sum_{k=-n}^{n} (n-|k|)a_k.$$

**R.** *Soluţia I.* Demonstrăm relaţia propusă prin inducţie după $n$. Pentru $n=1$, relaţia din enunţ devine:

$$a_0 = \sum_{n=-1}^{1} (1-|k|)\ a_k,$$

evident.

Presupunem relaţia adevărată pentru un $n\in\mathbb{N}$ şi să o verificăm pentru $n+1$, adică să demonstrăm relaţia:

$$\sum_{0\leqslant x,y\leqslant n} a_{x-y} = \sum_{k=-n+1}^{n} (n+1-|k|)a_k, \tag{1}$$

Vom calcula separat membrul drept. Avem:

$$\sum_{k=-n-1}^{n+1} (n+1-|k|)a_k = \sum_{k=-n}^{n} (n+1-|k|)a_k + 0\cdot a_{n-1} + 0\cdot a_{n+1} =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} (n-|k|)a_k + \sum_{k=-n}^{n} a_k.$$

Folosind ipoteza de inducţie avem:

$$\sum_{k=-n-1}^{n+1} (n+1-|k|)a_k = \sum_{0\leqslant x,y\leqslant n-1} a_{x-y} + \sum_{k=-n}^{n} a_k =$$

$$= \sum_{0\leqslant x,y\leqslant n} a_{x-y},$$

adică membrul stîng din relaţia (1).

*Soluţia a II-a.* Considerăm funcţia $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ dată prin:

$$f(x,\ y) = a_{x-y}.$$

Membrul stîng al relaţiei din enunţ este suma valorilor acestei funcţii în toate punctele de coordonate întregi din pătratul:

$$0\leqslant x\leqslant n-1;\quad 0\leqslant y\leqslant n-1$$

din planul $xOy$.

Apoi, pe orice segment al dreptei de ecuaţie:

$$x-y=k,$$

în care:

$$k\in\{-(n-1);\ -(n-2);\dots;\ -1;\ 0;\dots;\ n-2;\ n-1\},$$

situat în acest pătrat, funcţia de mai sus ia de $n-|k|$ ori valoarea $a_k$, astfel că suma tuturor valorilor funcţiei pe toate aceste segmente va fi:

$$\sum_{k=-(n-1)}^{n-1} (n-|k|)a_n = \sum_{k=-n}^{n} (n-|k|)a_k.$$

**III.1.55[PO].** Se consideră numerele:

$$a_n = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \dots$$
$$b_n = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + \dots$$
$$c_n = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + C_n^{11} + \dots$$

Să se arate că:

$$a_n^3 + b_n^3 + c_n^3 - 3a_nb_nc_n = 2^n, \qquad (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

**R.** Dacă $\alpha$ este una din rădăcinile ecuației:

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

atunci, conform dezvoltării binomului după NEWTON:

$$(1 + \alpha)^n = a_n + b_n\alpha + c_n\alpha^2,$$
$$(1 + \alpha^2)^n = a_n + b_n\alpha^2 + c_n\alpha.$$

Înmulțind aceste două egalități membru cu membru, obținem:

$$(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3)^n = a_n^2 + b_n^2\alpha^3 + c_n^2\alpha^3 + a_nb_n(\alpha + \alpha^2) +$$
$$+ b_nc_n(\alpha + \alpha^2) + c_na_n(\alpha + \alpha^2).$$

Deoarece însă $\alpha^3 = 1$ și:

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0,$$

avem:

$$1 = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 - a_nb_n - b_nc_n - a_nc_n.$$

Dar:

$$2^n = a_n + b_n + c_n$$

și, înmulțind aceste două egalități membru cu membru, o obținem pe cea din enunț.

**III.1.56[PO].** Considerăm următoarele trei numere:

$$a_n = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots,$$
$$b_n = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \dots,$$
$$c_n = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \dots,$$

Să se demonstreze că două dintre ele sînt egale, iar al treilea diferă de ele printr-o unitate.

**R.** Fie $\alpha$ una din rădăcinile imaginare ale unității:

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0.$$

Dacă facem în formula dezvoltării binomului după NEWTON:

$$(x + 1)^n = C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1} + \dots + C_k^nx^{n-k} + \dots + C_r^n \qquad (1)$$

respectiv $x = \alpha$ și $n = 3p$, $p \in \mathbb{N}$, obținem:

$$(-\alpha^2)^{3p} = (1 + \alpha)^{3p} = (C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots) + \alpha(C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \dots) +$$
$$+ \alpha^2(C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \dots) = a_n + \alpha c_n + \alpha^2 b_n.$$

sau:

$$\alpha^2 b_n + \alpha c_n + a_n \pm 1 = 0$$

semnele — și + luîndu-se după cum $p$ este impar sau par, de unde rezultă:

$$b_n = c_n = a_n \pm 1.$$

În adevăr, să arătăm că dacă:

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

cu $a, b, c \in \mathbb{Q}$, atunci:

$$a = b = c.$$

Cum $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$, rezultă, înmulţind această ultimă egalitate cu $c$ şi scăzînd egalitatea obţinută din cea presupusă, găsim:

$$(a - c)\alpha^2 + (b - c)\alpha = 0$$

de unde, simplificînd prin $\alpha$:

$$(a - c)\alpha + (b - c) = 0$$

Presupunînd $a - c \neq 0$, rezultă:

$$\alpha = -\frac{b - c}{a - c},$$

absurd, căci $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, iar $\frac{b-c}{a-c} \in \mathbb{Q}$. Deci $a - c = 0$. şi $b - c = 0$, adică $a = b = c$.

Dacă în (1) facem $x = \alpha$, $n = 3p + 1$, $p \in \mathbb{N}$, atunci găsim:

$$(-\alpha^2)^{3p+1} = b_n + \alpha a_n + \alpha^2 c_n,$$

deci:

$$\alpha^2(c_n \pm 1) + \alpha a_n + b_n = \theta$$

de unde, de asemenea, rezultă afirmaţia făcută în enunţ.

Pentru $x = \alpha$, $n = 3p + 2$, $p \in \mathbb{N}$, relaţia (1) conduce la:

$$a_n\alpha^2 + (b_n \pm 1)\alpha + c_n = \theta$$

deci, şi de această dată, obţinem afirmaţia făcută în enunţ.

**III.1.57PO.** Să se arate că:

$$C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4},$$

$$C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4},$$

făcînd convenția că $C_n^k = 0$, dacă $k > n$.

...ii lui MOIVRE:

$$\cos n\alpha + i \sin n\alpha, \ (\forall)\ \alpha \in \mathbb{R}, \ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$$

$$= (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4}\right) \qquad (1)$$

iar, după dezvoltarea binomului după NEWTON:

$$(1+i)^n = (C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots) + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots). \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă:

$$2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} + i\, 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4} = (C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots) + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 \ldots)$$

de unde, egalînd părţile reale şi părţile imaginare, obţinem enunţul.

**III.1.58**[PO]. Fie permutarea $p: X \to X$, în care $X=\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Vom spune că permutarea $p$ admite o coincidenţă în $i$, dacă $p(i)=i$, $i \in X$.

Numărul $i$ cu această proprietate se numeşte *punct fix* al permutării $p$. Orice alt $j \in X$, cu proprietatea $p(j) \neq j$, nu este punct fix pentru permutarea $p$.

Să se determine numărul $P(n)$ de permutări fără puncte fixe ale mulţimii $X$.

**R.** Fie permutarea $p: X \to X$, definită astfel:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots & n \\ p(1) & p(2) & p(3) \ldots & p(n) \end{pmatrix}.$$

Pentru a rezolva problema propusă vom ţine seamă de următoarele observaţii:

1) Considerăm $m: X \to [0, \infty)$ o funcţie numerică, numărul $m(x)$ fiind numit măsura elementului $x$.

2) Pentru orice submulţime $A \subset X$ definim măsura mulţimii $A$, pe care o notăm $m(A)$ astfel:

$$m(A) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in A} m(x), & \text{dacă } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{dacă } A = \emptyset \end{cases}$$

Din această definiţie rezultă că dacă $A \subset X$, $B \subset X$ şi $A \cap B = \emptyset$, atunci:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B).$$

Dacă $A \subset X$ şi $\bar{A} = X - A$ reprezintă complementara lui $A$ în raport cu $X$, atunci:

$$m(\bar{A}) = m(X) - m(A).$$

Prin definiţie, dacă $K = \emptyset$, se notează:

$$m(\bigcup_{i \in K} A_i) = m(\bigcap_{i \in K} A_i) = 0.$$

Un exemplu de măsură a unei mulţimi finite, evident, este numărul elementelor sale, căci dacă definim pentru orice $x \in X$, $m(X) = 1$, atunci $m(A) = |A|$, unde cu $|A|$ am notat numărul elementelor mulţimii $A$.

Fie $A_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, q\} = T$, submulţimi ale lui $X$. În acest caz, avem:

$$m(\bigcup_{i \in T} A_i) = \sum_{K \subset T} (-1)^{|K|+1} \cdot m(\bigcap_{i \in K} A_i).$$

Schiţăm demonstraţia prin inducţie după $q = |T|$.

Evident, pentru $q = 2$, obţinem:

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2) - m(A_1 \cap A_2).$$

Presupunem egalitatea adevărată pentru mulţimi $T$, cu $|T| \leqslant q - 1$, şi o demonstrăm pentru $|T| = q$. Avem:

$$m(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_q) = m(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{q-1}) + m(A_q) -$$
$$- m((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{q-1}) \cap A_q).$$

Dar:

$$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{q-1}) \cap A_q = (\bigcup_{\substack{i<q \\ i \in \mathbb{N}}} (A_i \cap A_q))$$

şi deci:

$$m(\bigcup_{i \in T} A_i) = m(\bigcup_{i=1}^{q-1} A_i) + m(A_q) - m\,(\bigcup_{\substack{i<q \\ i \in \mathbb{N}}} (A_i \cap A_q)) =$$
$$= \sum_{i<q} m(A_i) - \sum_{i<j<q} m(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k<q} m(A_i \cap A_j \cap A_k) -$$
$$- \ldots + m(A_q) - \sum_{i<q} m(A_i \cap A_q) + \ldots$$

Dacă regrupăm termenii găsim că:

$$m(\bigcup_{i \in T} A_i) = \sum_{i=1}^{q} m(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant q} m(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{q+1} m\left(\bigcap_{i=1}^{q} A_i\right).$$

În egalitatea anterioară, dacă punem $m(A_i) = |A_i|$, ultima ei formă devine:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{q} A_i\right| = \sum_{i=1}^{q} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant q} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{q+1} \left|\bigcap_{i=1}^{q} A_i\right|,$$

cunoscută sub denumirea de principiul includerii şi al excluderii.

Să trecem acum la rezolvarea problemei propuse. Notăm cu $A_i$ mulţimea celor $(n-1)!$ permutări care admit un punct fix în $i$ şi să aplicăm principiul includerii şi excluderii pentru a găsi numărul permutărilor care admit cel puţin un punct fix. Avem:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|.$$

Se observă că:

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$$

căci o permutare din mulţimea:

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$$

prezintă în poziţiile $i_1, i_2, \ldots, i_k$ puncte fixe în număr de $(n-k)!$. Astfel, $k$ poziţii $i_1, i_2, \ldots, i_k$ pot fi alese din mulţimea celor $n$ poziţii în $C_n^k$ moduri, deci:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = C_n^1(n-1)! - C_n^2(n-2)! + \ldots + (-1)^{n-1}C_n^n.$$

Numărul permutărilor cerute de problemă, fără puncte fixe, se obţine scăzînd din numărul tuturor permutărilor, egal cu $n!$, numărul permutărilor care admit măcar un punct fix. Aşadar:

$$P(n) = n! - C_n^1(n-1)! + \ldots + (-1)^k C_n^k(n-k)! + \ldots + (-1)^n C_n^n.$$

Evident, formula se mai poate scrie:

$$P(n) = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^k}{k!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

**III.1.59**PO. Fie $X$ o mulţime finită şi $U \subset X \times X$. Numim graf cuplul $G = (X; U)$. Elementele lui $X$ se numesc vîrfurile sau nodurile grafului, iar elementele lui $U$, muchiile grafului.

Vom spune că graful este *neorientat* dacă asupra elementelor lui $U$ nu impunem nici o restricţie la citire.

Vom mai numi, încă, *subgraful complet*, o mulţime de vîrfuri ale grafului $G$ care sînt legate în toate modurile posibile prin muchii din $U$, iar $k$— *subgraf complet*, un subgraf complet cu $k$ vîrfuri.

Notăm cu $d(x)$ gradul unui vîrf $x$, $x \in X$ (unde, gradul unui vîrf $x$ este, prin definiţie, numărul muchiilor care au ca extremităţi vîrful $x$).

Să se demonstreze că:

i) (Zarankiewicz). Dacă graful $G$ nu conţine $k$- subgrafuri complete, atunci mulţimea gradelor vîrfurilor sale verifică inegalitatea:

$$\min_{x \in X} d(x) \leqslant \left[\frac{(k-2)n}{k-1}\right]_*,$$

unde $2 \leqslant k \leqslant n$, $n$ fiind cardinalul mulţimii $X$.

ii) (Turàn). Să se arate că în clasa grafurilor $G$ cu $n$ vîrfuri şi fără $k$ — subgrafuri complete, numărul maxim de muchii ale unui graf este dat de expresia:

$$M(n; k) = \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2 - r^2}{2} + C_r^2,$$

unde:

$$r = n - (k-1)\left[\frac{n}{k-1}\right]_*.$$

Graful $G$ pentru care se atinge această margine superioară este unic (pînă la un izomorfism) şi este compus din $k-1$ clase de vîrfuri, unde $r$ clase conţin $t+1$ vîrfuri, unde $t$ este dat de:

$$n = (k-s)t + r, \quad 0 \leqslant r \leqslant k-2,$$

în timp ce clasele rămase conţin cîte $t$ vîrfuri, şi fiecare vîrf se leagă prin muchii cu toate vîrfurile care nu aparţin aceleiaşi clase cu el. Un astfel de graf se numeşte graf $(k-1)$ — partit orientat.

**R.** i) Fie:

$$(k-2)n = p(k-1) + r \tag{1}$$

unde $p$ şi respectiv $r$ sînt cîtul şi restul împărţirii lui $(k-2)n$ la $k-1$.

Vom folosi metoda reducerii la absurd. Presupunem în acest sens că pentru orice $x \in X$, gradul său $d(x)$ este cel puţin egal cu $p+1$; din (1) rezultă:

$$p = \left[\frac{(k-2)n}{k-1}\right]_*.$$

Alegem un vîrf $x_{i_1} \in X$ şi fie $A_{x_{i_1}}$ mulţimea vîrfurilor grafului $G$ care se leagă printr-o muchie cu $x_{i_1}$. Analog, considerăm un alt vîrf $x_{i_2} \in X$ şi $A_{x_{i_2}}$ mulţimea corespunzătoare.

Folosim în continuare principiul includerii şi al excluderii:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{q} A_i\right| = \sum_{i=1}^{q} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant q} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{q+1}\left|\bigcap_{i=1}^{q} A_i\right|,$$

(prin $|A|$ s-a notat numărul elementelor mulţimii finite $A$), respectiv:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{q} A_i\right| = \sum_{i=1}^{q} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant q} |A_i \cup A_j| + \ldots + (-1)^{q+1}\left|\bigcup_{i=1}^{q} A_i\right|.$$

Obţinem:

$$|A_{x_{i_1}} \cap A_{x_{i_2}}| = |A_{x_{i_1}}| + |A_{x_{i_2}}| - |A_{x_{i_1}} \cup A_{x_{i_2}}|.$$

Deoarece fiecare mulţime are cel puţin $p+1$ elemente, putem scrie:

$$|A_{x_{i_1}} \cap A_{x_{i_2}}| \geqslant 2p + 2 - n.$$

Fie acum $x_{i_3} \in A_{x_{i_1}} \cap A_{x_{i_2}}$.

Aplicînd din nou principiul enunţat, avem:

$$|A_{x_{i_1}} \cap A_{x_{i_2}} \cap A_{x_{i_3}}| \geqslant 3(p+1) - 2n$$

Prin inducţie, vom obţine pentru $x_{i_{k-1}} \in \bigcap_{j=1}^{k-2} A_{x_{i_j}}$:

$$\left|\bigcap_{j=1}^{k-1} A_{x_{i_j}}\right| = |A_{x_{i_{k-1}}}| + \left|\bigcap_{j=1}^{k-2} A_{x_{i_j}}\right| - \left|A_{x_{i_{k-1}}}\left(\bigcap_{j=1}^{k-2} A_{x_{i_j}}\right)\right|,$$

sau:

$$\left|\bigcap_{j=1}^{k-1} A_{x_{i_j}}\right| \geqslant p + 1 + (k-2)(p+1) - (k-3)n + n =$$

$$= (k-1)(p+1) - (k-2)n,$$

adică:

$$\left|\bigcap_{j=1} A_{x_{i_j}}\right| \geqslant k - 1 - r > 0$$

căci, din (1), $0 \leqslant r < k - 1$, care ne poate duce la concluzia că există cel puţin un vîrf $x_{i_k}$ aparţinînd la $\bigcap_{j=1}^{k-1} A_{x_{i_j}}$, adică se poate obţine un $k$ — subgraf complet $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$, ceea ce contrazice ipoteza făcută, anume că $G$ nu conţine $k$ — subgrafuri complete.

ii) Demonstrăm afirmaţia enunţului prin inducţie.

Pentru $n \in \overline{1, k-1}$, $G$, care are un număr maxim de muchii şi nu conţine $k$ — subgrafuri complete este un $n$ — graf complet.

Presupunem că teorema este adevărată pentru orice $m \leqslant n - 1$.

În cazul cînd $G$ are $n$ vîrfuri şi nu conţine $k$ — subgrafuri complete, atunci din problema anterioară se deduce că $G$ are cel puţin un vîrf $x$ cu:

$$d(x) \leqslant \left[\frac{(k-2)n}{k-1}\right]_* .$$

Fie subgraful $G_x = \{X - \{x\};\ U_x\}$, unde $U_x$ se obţine din mulţimea $U$ a muchiilor prin suprimarea tuturor muchiilor care îl au pe $x$ drept extremitate. Relativ la numărul de muchii, acest graf ce nu conţine $k$ — subgrafuri complete, poate fi maximal sau nu.

În cazul cînd nu este maximal îl înlocuim cu un graf $k$ — maximal şi care, conform ipotezei, este compus din $k - 1$ clase de vîrfuri, unde $r'$ clase conţin $t' + 1$ vîrfuri, în timp ce clasele rămase conţin $t'$ vîrfuri dacă $n - 1 = (k-1)t' + r'$, cu $0 \leqslant r' \leqslant k - 2$ şi fiecare vîrf se leagă prin muchii cu toate vîrfurile care nu aparţin unei aceleiaşi clase cu el.

Dacă adăugăm vîrful $x$ la o clasă care conţin $t'$ vîrfuri şi îl vom lega la toate vîrfurile care nu aparţin unei aceleiaşi clase cu el, obţinem un graf care nu conţine $k$ — subgrafuri complete şi care este unic (pînă la un izomorfism).

Gradul vîrfului $x$ în graful considerat este:

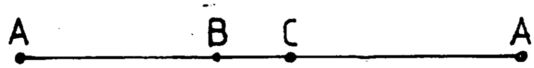
$$d(x) = n - 1 - t' = n - 1 - \left[\frac{n-1}{k-1}\right]_* = \left[\frac{(k-2)n}{k-1}\right]_*,$$

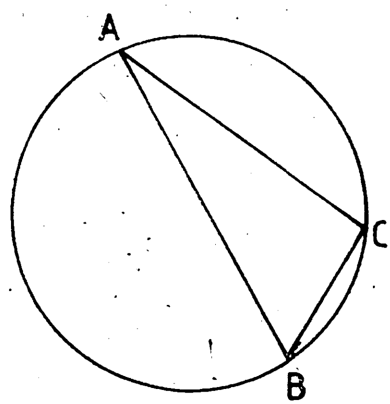
Relaţia cerută se poate obţine ca semisuma gradelor vîrfurilor grafului $(k - 1)$ — partit complet construit ca mai sus.

## §.2. Geometrie combinatorică

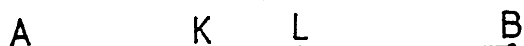
**III.2.1**[PO]**.** Pe un cerc sînt luate la întîmplare trei puncte $A$, $B$, $C$. Care este probabilitatea ca triunghiul $ABC$ să fie ascuţitunghic?

**R.** Deoarece toate punctele cercului sînt în condiţii egale, putem considera că primul dintre aceste trei puncte (punctul $A$) este fixat într-un anumit mod. În acest caz, poziţiile punctelor $B$ şi $C$ vor fi date de lungimea arcelor $\overset{\frown}{AB}$ şi $\overset{\frown}{AC}$, măsurate într-un anumit sens (de exemplu, în sens trigonometric). Vom tăia acum cercul în punctul $A$ şi-l vom desfăşura pe segmentul $|AA'|$ (v. fig. III.2.1. *a*); faptul că cele două extre-



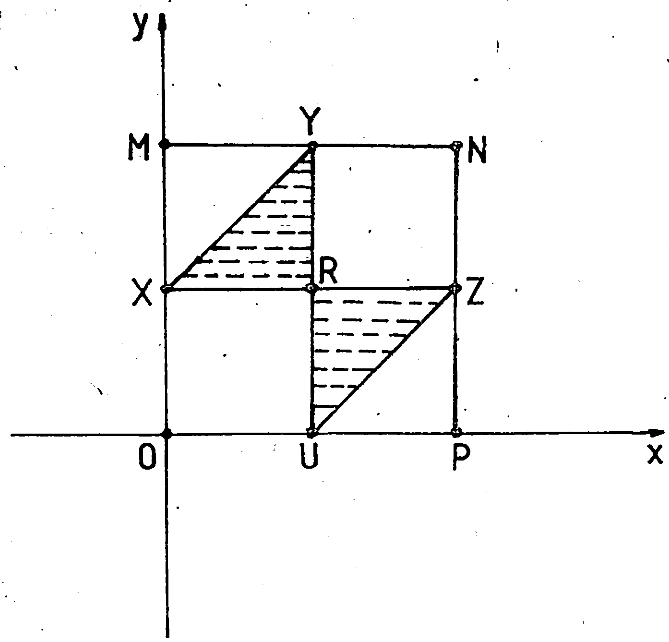




mităţi ale segmentului nostru reprezintă un acelaşi punct nu este esenţial. Prezenţa unui unghi obtuz în triunghiul $ABC$ înseamnă, evident, că unul dintre cele trei arce în care vîrfurile lui împart segmentul, este mai mare decît o jumătate din cerc. De aceea, după trecerea de la cerc la segmentul $|AA'|$, problema considerată capătă următoarea formă: pe segmentul $|AA'|$ sînt luate două puncte $B$ şi $C$; care este probabilitatea ca nici una dintre cele trei părţi în care aceste puncte împart cercul să nu fie mai mare decît jumătate din lungimea segmentului? Pentru determinarea




acestei probabilităţi vom rezolva următoarea problemă, echivalentă cu problema noastră: o bară este frîntă în trei bucăţi; cele trei locuri de frîngere sînt luate la întîmplare. Care este probabilitatea ca din cele trei bucăţi obţinute să se poată forma un triunghi?

Să presupune că bara considerată este $|AB|$, iar $K$ şi $L$ două puncte de frîngere ale barei (v. fig. III.2.1.b). Vom nota lungimea AB cu $l$. Toate cazurile posibile ale experienţei considerate în această problemă se determină prin poziţia punctelor $K$ şi $L$; alte cu cuvinte, prin două numere $\|AK\| = x$ şi $\|AL\| = y$, fiecare dintre ele fiind luat la întîmplare între




0 şi L. Considerînd aceste numere drept coordonate ale punctelor în plan, vom reprezenta mulţimea acestor cazuri sub forma unei mulţimi de puncte din pătratul $OMNP$ cu latura $l$ (v. fig. III.2.1.c). Dar probabilitatea ca punctul de coordonate $(x, y)$ să se afle în interiorul unei părţi oarecare a acestui pătrat va fi egală cu raportul dintre aria acestei părţi şi aria pătratului întreg. Astfel, mai rămîne să determinăm care parte a pătratului $MNPO$ va fi umplută de punctele corespunzătoare cazurilor favorabile ale experimentului.

Pentru ca din cele trei segmente în care se rupe bara să poată fi format un triunghi, trebuie numai ca fiecare dintre ele să fie mai mic decît suma celorlalte două. Deoarece suma celor trei segmente este egală cu $l$, rezultă că această condiţie este echivalentă cu următoarea: fiecare dintre cele trei segmente trebuie să aibă lungimea mai mică decît $l/2$. Să cercetăm, acum, în ce cazuri această condiţie nu este îndeplinită.

a) Lungimea segmentului din stînga va fi mai mare decît $l/2$, dacă atît $x$ cît şi $y$ vor fi mai mari decît $l/2$. Acestor cazuri le vor corespunde punctele situate în interiorul pătratului mic $YRZN$ cu latura $l/2$, care ocupă sfertul de sus din dreapta al pătratului $OMNP$ (v. fig. III.2.1.c).

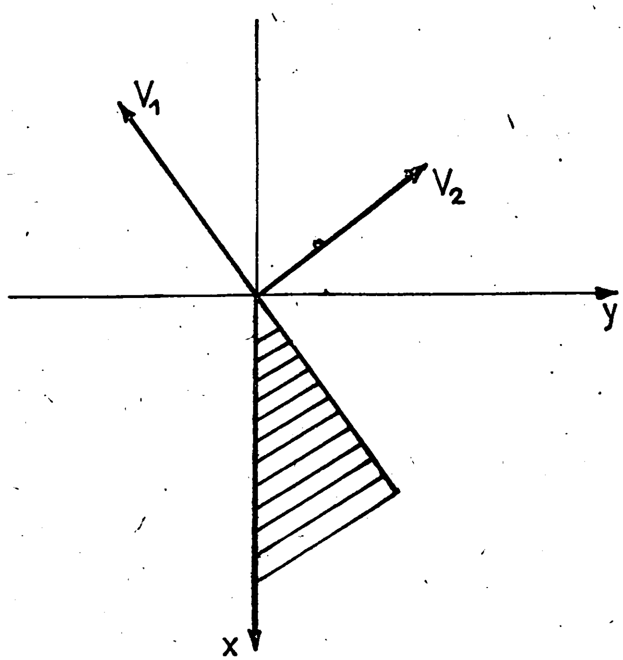
b) Segmentul din dreapta va fi mai mare decît $l/2$, dacă atît $x$ cît şi $y$ vor fi mai mici decît $l/2$. Acestor cazuri le vor corespunde punctele situate în interiorul pătratului mic $XRUO$ cu latura de lungime $l/2$, care ocupă sfertul de jos din stînga al pătratului $OMNP$ (v. fig. III.2.1.c).

c) Lungimea segmentului din mijloc va fi mai mare decît $l/2$, dacă $x$ şi $y$ verifică inegalităţile $y-x > l/2$ sau $x-y > l/2$. Mulţimea punctelor de coordonate $(x, y)$ pentru care $y - x = l/2$ este reprezentată în figura noastră prin dreapta $XY$, iar mulţimea punctelor pentru care $x-y = l/2$ prin dreapta $ZU$. Nu este greu de văzut că punctele pentru care $y-x > l/2$ vor umple în figura considerată triunghiul $XMY$, iar punctele pentru care $x-y > l/2$ triunghiul $UPZ$. Astfel, cazurilor nefavorabile de tipul al treilea le vor corespunde punctele situate în interiorul triunghiurilor $XMY$ şi $UPZ$.

În sfîrşit, cazurilor favorabile le vor corespunde punctele care umplu partea din pătratul $MNPO$ haşurată în fig. III.2.1.c. Deoarece aria acestei părţi este egală cu 1/4 din aria întregului pătrat mare, rezultă că probabilitatea căutată este 1/4.

**III.2.2$^{PO}$.** Care este numărul maxim de semidrepte din spaţiu ce pornesc din acelaşi punct şi fac două cîte două numai unghiuri obtuze?

**R.** Considerăm doi vectori $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ formînd între ei un unghi obtuz. Ducem prin originea lor planele perpendiculare pe $\bar{v}_1$ şi respectiv $\bar{v}_2$. Ele




determină un diedru, măsura unghiului său fiind mai mică decît 90, în care trebuie să se afle ceilalţi vectori (figura III.2.2. reprezintă secţiunea dreaptă a construcţiei; regiunea haşurată este cea permisă). Ne alegem un triedru de referinţă $Oxyz$, $Oz$ fiind muchia triedrului. Vectorii $\bar{v}_3$ şi $\bar{v}_4$

sînt aflați în regiunea permisă cu $x_i$ și $y_i$ pozitivi ($i = 3, 4$). Unghiul lor fiind obtuz, produsul componentelor scalare este negativ:

$$x_3x_4 + y_3y_4 + z_3z_4 < 0$$

(deducem acest lucru din formula ce exprimă cosinusul unui unghi) ceea ce arată că $z_3$ și $z_4$ sînt de semne contrare. Un al 5-lea vector $\bar{v}_5$, ca să formeze un unghi obtuz cu $\bar{v}_3$, trebuie ca $z_3z_5 < 0$. Deci $z_5$ ar trebui să fie de semn contrar și cu $z_3$ și cu $z_4$, contrar faptului că $z_3$ și $z_4$ sînt de semne contrare. Ca atare, nu pot exista decît cel mult 4 vectori formînd doi cîte doi unghiuri obtuze.

**III.2.3**PO. Cîte tipuri de poligoane regulate se pot înscrie într-o elipsă cu axele inegale?

**R.** Oricărui poligon regulat i se poate circumscrie un cerc. Rezultă că putem avea doar două poligoane regulate înscrise într-o elipsă cu axele inegale deoarece numărul maxim al punctelor de intersecție al unui cerc cu o elipsă este 4.

Există deci doar triunghiul echilateral și pătratul.

**III.2.4**PO. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Pe un cerc sînt însemnate $2n$ puncte. În cîte moduri diferite pot fi unite aceste puncte, două cîte două, prin $n$ coarde, așa încît să nu se intersecteze în interiorul cercului?

**R.** Vom nota cu $\Phi_n$ numărul de moduri în care $2n$ puncte oarecare de pe un cerc pot fi unite două cîte două prin $n$ coarde care nu se intersectează în interiorul cercului. Vom arăta că, știind pe $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}$, putem determina pe $\Phi_n$.

Să notăm cele $2n$ puncte în ordinea succesiunii lor pe cerc cu:

$$A_1, A_2, \ldots, A_{2n}.$$

Punctul $A_1$ poate fi unit cu punctele $A_2, A_4, A_6, \ldots, A_{2n}$; astfel, de ambele părți ale coardei care trece prin punctul $A_1$ s-ar găsi cîte un număr impar de puncte și deci, unind punctele două cîte două, coarda care trece prin $A_1$ ar trebui să fie intersectată de cel puțin o coardă.

Să calculăm acum numărul modurilor diferite de unire a punctelor, în care $A_1$ este unit cu $A_{2k}$. În acest caz, de o parte a coardei $A_1A_{2k}$ se află $2(k-1)$ puncte (punctele $A_2, A_3, \ldots, A_{2k-1}$), iar de cealaltă $2(n-k)$ puncte (punctele $A_{2k+1}, A_{2k+2}, \ldots, A_{2n}$). Evident că primele $2(k-1)$ puncte pot fi unite două cîte două în $\Phi_{k-1}$ moduri, iar celelalte $2(n-k)$ puncte în $\Phi_{n-k}$ moduri. Toate modurile posibile, care verifică condițiile problemei, de unire două cîte două a tuturor celor $2n$ puncte și în care $A_1$ este unit cu $A_{2k}$, le vom obține combinînd toate cele $\Phi_{k-1}$ moduri de unire a punctelor $A_2, A_3, \ldots, A_{2k-1}$ cu toate cele $\Phi_{n-k}$ moduri diferite pentru punctele $A_{2k+1}, A_{2k+1}, \ldots, A_{2n}$. Astfel, numărul acestor moduri de unire este egal cu $\Phi_{k-1}\Phi_{n-k}$. Considerînd, acum, că punctul $A_1$ poate fi unit cu punctele $A_2, A_4, A_6, \ldots, A_{2n-2}, A_{2n}$ obținem formula generală:

$$\Phi_n = \Phi_{n-1} + \Phi_1\Phi_{n-2} + \ldots + \Phi_{n-2}\Phi_1 + \Phi_{n-1}.$$

De aici:

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_1 = 1 + 1 = 2$$

$$\Phi_3 = \Phi_2 + \Phi_1\Phi_1 + \Phi_2 = 2 + 1 \cdot 1 + 2 = 5,$$

etc.

Prin inducție, rezultă $\Phi_n = \dfrac{1}{2n+1} C_{2n+1}^n$.

**III.2.5**$^{PO}$. (Tomescu). Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Se consideră un dreptunghi $ABCD$ cu lungimea laturilor de 3 și respectiv $2n$ unități.

Se notează cu $I(n)$ numărul de moduri în care acest dreptunghi poate fi acoperit prin dreptunghiuri identice cu lungimile laturilor de două unități și respectiv o unitate.

Să se calculeze $I(n)$.

**R.** Începînd să acoperim de la unul din capetele dreptunghiului $ABCD$ prin dreptunghiuri cu laturile de două și respectiv o unitate, obținem următoarele situații posibile (v. figurile).

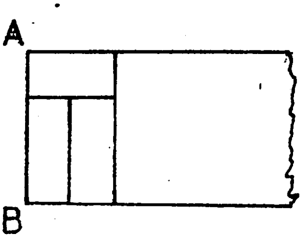
De aici se deduce că:

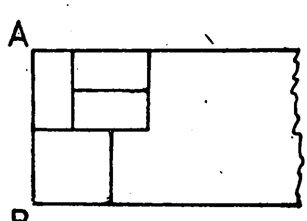
$$I(n) = 3I(n-1) + 2j(n-1)$$

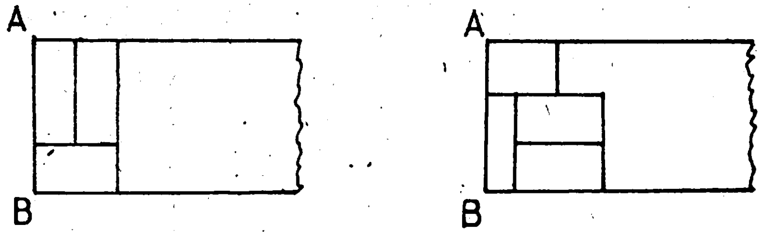
unde prin $j(n)$ am notat numărul de acoperiri prin dreptunghiuri $2 \times 1$, așa cum se arată în fig. III.2.5.a iar prin $I(n)$ numărul de acoperiri cerut.

Însă:

$$j(n) = I(n-1) + j(n-1)$$

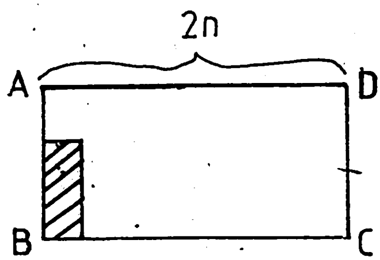


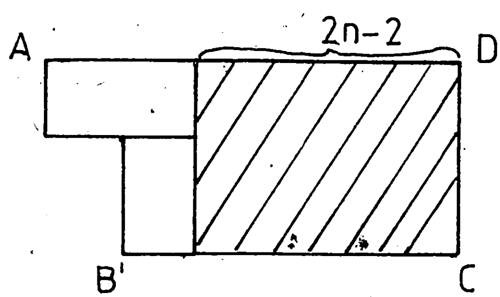



a)

deoarece această figură poate fi acoperită ca în figurile următoare:




b)



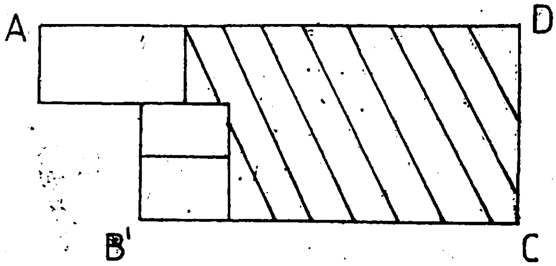

c)

Obținem deci, prin iterare:

$$I(n) = 3I(n-1) + 2j(n-1) = 3I(n-1) + 2I(n-2) + 3j(n-2) =$$

$$= \ldots = 3I(n-1) + 2[I(n-2) + I(n-3) + \ldots + I(1)] + 2j(1).$$

Dar $j(1) = 1$, $I(1) = 3$, după cum se vede din fig. III.2.5.d.




d)

deci, pentru $n \geqslant 3$, avem:

$$I(n) = 3I(n-1) + 2[I(n-2) + I(n-3) + \ldots + 3] + 2$$

şi:

$$I(n+1) = 3I(n) + 2[I(n-1) + I(n-2) + \ldots + +3] + 2$$

de unde, scăzînd aceste din urmă relaţii:

$$I(n+1) = 4I(n) - I(n-1)$$

adică o ecuaţie cu diferenţe finite. Ecuaţia caracteristică este:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

care are rădăcinile $\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}$, $\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$, de unde:

$$I(n) = c_1(2 + \sqrt{3})^n + c_2(2 - \sqrt{3})^n$$

unde $c_1$ şi $c_2$ se determină din condiţiile iniţiale: $I(1) = 3$; $I(2) = 11$.

Obţinem, în final:

$$I(n) = \frac{1}{2\sqrt{3}}[(\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})^n + (\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})^n].$$

**III.2.6**$^{\text{PO}}$. (Cayley). Fie $k$, $n \in \mathbb{N}^* - \{1, 2\}$. Cîte poligoane convexe cu $k$ laturi există, astfel încît vîrfurile lor să coincidă cu vîrfurile unui poligon convex cu $n$ laturi, iar toate laturile lor să fie diagonale ale acestuia?

**R.** Vom nota vîrfurile poligonului cu $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ şi vom calcula cîte poligoane cu $k$ laturi verifică toate condiţiile problemei şi au un vîrf în $A_{n-1}$. Să presupunem că celelalte $k-1$ vîrfuri ale unui astfel de poligon cu $k$ laturi sînt $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_{k-1}}$. Numerele $i_1, \ldots, i_{k-1}$ sînt toate cuprinse între 1 şi $n-3$ şi trebuie să verifice condiţiile:

$$i_2 - i_1 \geqslant 2,\ i_3 - i_2 \geqslant 2, \ldots, i_{k-1} - i_{k-2} \geqslant 2.$$

Să considerăm acum $k-1$ numere:

$$j_1 = i_1,\ j_2 = i_2 - 1,\ j_3 = i_3 - 2, \ldots, j_{k-1} = i_{k-1} - (k-2)$$

Din inegalitățile pe care trebuie să le verifice numerele $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$ rezultă că numerele $j_1, j_2, \ldots, j_{k-1}$ vor verifica inegalitățile:

$$1 \leqslant j_1 < j_2 < j_3 < \ldots < j_{k-1} \leqslant (n-3) - (k-2) = n - k - 1.$$

Reciproc, dacă $j_1, j_2, \ldots, j_{k-1}$ sînt numere oarecare neegale între ele, cuprinse între 1 și $n - k - 1$ și așezate în ordine crescătoare, atunci numerele:

$$i_1 = j_1,\ i_2 = j_2 + 1, \ldots, i_{k-1} = j_{k-1} + (k-2)$$

vor verifica inegalitățile:

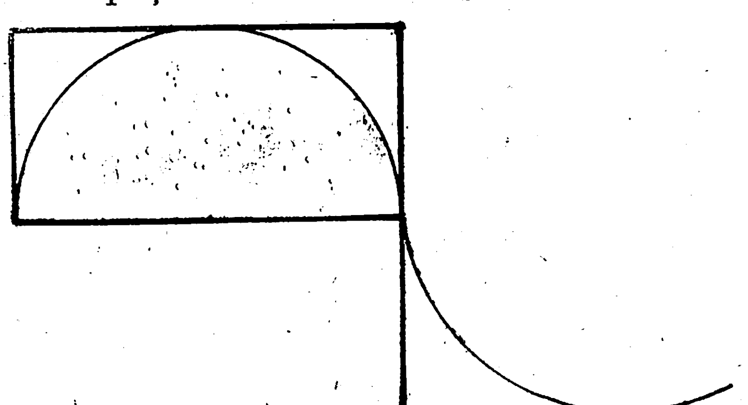
$$i_1 \geqslant 1,\quad i_2 - i_1 \geqslant 2, \ldots, i_{k-1} - i_{k-2} \geqslant 2,\quad i_{k-1} \leqslant n - 3$$

și deci poligonul cu $k$ laturi $A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_{k-1}}A_{n-1}$ va fi unul dintre poligoanele căutate, care au un vîrf în punctul $A_{n-1}$. Rezultă deci că numărul poligoanelor căutate, care au un vîrf în punctul $A_{n-1}$, este egal cu numărul grupurilor de $k - 1$ numere întregi pozitive care nu sînt mai mari decît $n - k - 1$, adică este egal cu $C_{n-k-1}^{k-1}$.

Acum este ușor de calculat care este numărul total de poligoane, care satisfac condițiile problemei noastre. Întrucît numărul poligoanelor cu $k$ laturi, care au unul dintre vîrfuri într-un anumit vîrf al poligonului cu $n$ laturi, este același pentru toate vîrfurile, înmulțind $C_{n-k-1}^{k-1}$ cu $n$ (adică însumînd numărul poligoanelor cu $k$ laturi, care au drept unul dintre vîrfuri un vîrf determinat al poligonului cu $n$ laturi, după toate cele $n$ vîrfuri), vom socoti fiecare poligon cu $k$ laturi, care verifică condițiile problemei, de $k$ ori (poligonul cu $k$ laturi are $k$ vîrfuri). Deci, numărul căutat al poligoanelor diferite cu $k$ laturi este egal cu:

$$\frac{n}{k} C_{n-k-1}^{k-1} = \frac{n(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}.$$

**III. 2.7**[PO]. Considerăm o cale ferată închisă, formată din porțiuni de forma unui sfert de cerc cu raza de lungime $R$, puse cap la cap. Să se arate că numărul de porțiuni folosite este divizibil cu 4.



R. Presupunem $R = \frac{1}{2}$ şi înlocuim fiecare şină cu un unghi drept pe ale cărui laturi considerăm segementele cu intersecţia vîrful unghiului şi lungimea 1/2, ca în fig. III. 2.7. Obţinem astfel o linie poligonală închisă, trasată în reţeaua plană de pătrate de latură de lungime 1, ale cărei vîrfuri au coordonatele întregi. Este suficient să arătăm că numărul laturilor poligonului dse divide cu 4.

Putem considera, fără a restrînge generalitatea problemei, că un vîrf al poligonului are coordonatele (0, 0). Deoarece lungimile laturilor poligonului sînt toate 1, se observă că pornind dintr-un punct de coordonate întregi pare, abia după parcurgerea a exact 4 laturi ne aflăm din nou într-un punct de coordonate pare. Deci, plecînd din (0, 0) pentru a ajunge din nou în (0, 0), parcurgînd linia poligonală, trebuie să parcurgem $4k$ laturi, $k \in \mathbb{N}$.

**III. 2.8**PO. Fie $n$ puncte în plan, $n \in \mathbb{N} - [\{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}]$. Să se arate că dacă pe orice direcţie există o dreaptă care lasă de fiecare parte a ei acelaşi număr de puncte, atunci 3 sînt coliniare.

R. Dacă $n$ este impar, fie $A$ un punct fixat între cele $n$ puncte şi o dreaptă $d$, $A \in d$.

Dreapta $d$ este astfel aleasă încît să împartă cele $n$ puncte în două mulţimi cu acelaşi număr de puncte. Întrucît acest lucru este posibil, rotim pe $d$ pînă întîlneşte primul punct, fie acesta $B$, din mulţime, $A \neq B$.

Dreapta $AB$ împarte mulţimea în două submulţimi cu $\frac{n-1}{2}$ şi respectiv $\frac{n-1}{2} - 1$ puncte. Direcţia dată de $AB$ contrazice enunţul problemei, deci $n$ este par.

**III. 2.9**PO. Se consideră mulţimile de $2n + 1$ puncte care au proprietatea următoare : oricare ar fi un punct ales, $n$ puncte din celelalte se află la o distanţă strict mai mică decît 1 de el şi $n$ la o distanţă strict mai mare decît 1 de el.

Să se arate că numai pentru $n$ par există astfel de mulţimi.

R. Vom număra segmentele de lungime strict mai mică decît 1.

Din fiecare punct pornesc $n$ segmente şi avem $2n + 1$ puncte. În acest mod se numără un segment de două ori, după cele două capete ale sale.

Vom avea $\frac{n(2n+1)}{2}$ astfel de segmente de unde rezultă că $n$ este par.

Pentru $n$ par considerăm poligoanele regulate cu $2n + 1$ laturi în care notăm lungimea laturii cu $l$ şi cu $R$ lungimea razei cercului circumscris.

Vom avea :

$$\frac{l}{2} = R \sin \frac{\pi}{2n+1} \cdot$$

dacă considerăm în fiecare vîrf al poligonului un cerc cu raza de lungime $R\sqrt{2}$ care lasă $n$ vîrfuri din vîrfurile poligonului în afară.

Fie $R\sqrt{2} = 1$. Atunci $\dfrac{l\sqrt{2}}{2\sin\dfrac{\pi}{2n+1}} = 1$ și de aici rezultă $l = \sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{2n+1}$ care verifică condițiile puse de problemă.

**III. 2.10**[PO]. Să se demonstreze că pentru orice număr întreg pozitiv $m$, există o mulțime $E$ finită, nevidă, de puncte în plan, cu proprietatea: dacă $A$ este un element al mulțimii $E$, există în $E$, $m$ și numai $m$ puncte situate la distanța 1 de $A$.

**R.** Vom demonstra afirmația din enunț prin inducție. Ea este adevărată pentru $m = 1$, luînd două puncte în plan la distanța 1.

Să presupunem că există o mulțime $E$, avînd de exemplu $k$ elemente, care satisface condițiile problemei pentru un $m$ oarecare și considerăm o mulțime $E'$ definită prin translația lui $E$ într-o anumită direcție de modul 1.

Există cel mult $km$ direcții de translație pentru care două puncte din $E$ și $E'$ pot coincide; putem alege deci o direcție pentru care punctele lui $E$ și $E'$ să fie distincte.

Orice punct din $E$ se află la distanța 1 de omologul său din $E'$; există, după cum se poate verifica imediat, $2(k-1)$ direcții de translație prin care un punct din $E$ ar putea ajunge la distanța 1 de un punct neomolog (căci cercurile de rază 1 cu centrele în cele două puncte au cel mult două puncte de intersecție).

În total, pot exista $2k(k-1)$ astfel de direcții; putem alege din infinitatea de direcții de translație, una pentru care acest lucru să nu se întîmple. În acest caz, reuniunea lui $E$ cu $E'$ are, după cum se verifică ușor, proprietatea că orice punct are exact $m+1$ puncte din mulțime ($m$ din ipoteza de inducție și un punct omolog) la distanța 1.

Am arătat deci că propoziția, fiind adevărată pentru un $m$ oarecare ea este adevărată și pentru $m+1$ și, cum ea este adevărată pentr $m = 1$, rezultă, potrivit principiului inducției matematice, că ea este adevărată pentru orice $m \in \mathbb{N}$.

**III. 2.11**[PO]. Pe întregul plan se dispun pătrate $1 \times 1$, asemănătoare celor de pe hîrtia milimetrică. Planul este astfel împărțit în pătrate de aceeași mărime.

Să se arate că, pentru orice număr natural $k$, există în plan un cerc care are în interior exact $k$ vîrfuri de pătrate. Dacă $r_k$ este lungimea razei unui astfel de cerc, să se calculeze numărul către care tinde raportul:

$$\frac{r_k}{\sqrt{k}}$$

cînd variabila $k$ tinde către infinit.

**R.** Fie un sistem de axe rectangulare $xOy$ și $P$, punctul de coordonate $\left(\sqrt{3}, \dfrac{1}{3}\right)$. Vom arăta că există un cerc cu raza de lungime $r_n$ care conține în interior (exclusiv circumferința) exact $n$ astfel de vîrfuri (pe care le numim, potrivit terminologiei curente, puncte laticiale), cu centrul în $P$.

Oricare două puncte laticiale distincte se află la distanțe diferite de punctul $P$. Alegem originea sistemului $xOy$ într-un astfel de punct laticial (pe care îl notăm cu 0, de coordonate $(0, 0)$) în așa fel încît toate vîrfurile considerate să aibă coordonatele întregi (acest lucru este, evident, posibil).

În adevăr, fie, prin absurd $Q_1$ și respectiv $Q_2$ două puncte laticiale de coordonate (diferite) $(a, b)$ și respectiv $(c, d)$, situate la egală distanță de $P$. Potrivit formulei ce exprimă distanța dintre două puncte în plan, avem :

$$(a - \sqrt{3})^2 + \left(b - \frac{1}{3}\right)^2 = (c - \sqrt{3})^2 + \left(d - \frac{1}{3}\right)^2$$

cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Deducem :

$$2(c - a)\sqrt{3} = c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + \frac{2}{3}(b - d)$$

și, cum membrul al doilea al egalității este un număr rațional, rezultă $c = a$ și deci :

$$(b - d)\left(b + d - \frac{2}{3}\right) = 0.$$

Cum $b + d \in \mathbb{Z}$, rezultă $b + d - \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$, deci $b = d$ adică $Q_1$ și $Q_2$ ar fi confundate, contrar ipotezei.

Fie acum un număr natural $k$, dat. Există, evident, cercuri care conțin în interior mai mult de $k$ puncte laticiale (luînd, de exemplu, lungimea razei superioară lui $k$). Deoarece distanțele de la $P$ pînă la aceste puncte sînt diferite, rezultă că le putem ordona într-un șir infinit după distanțele crescătoare la punctul $P$. Fie :

$$q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1} \ldots$$

acest șir. Fie atunci un cerc $\Omega$ cu centrul în $P$ și care trece prin $q_{k+1}$. Evident, $\Omega$ satisface afirmația problemei.

Pentru a demonstra partea a doua a problemei, considerăm un punct $Q$ în plan și un cerc $K$, de centru $Q$ și cu raza de lungime dată, $r$. În jurul fiecărui punct laticial $M$ desenăm un pătrat cu centrul $M$ și laturile de lungimi 1, paralele cu axa absciselor, respectiv a ordonatelor. Fie $S$ partea acoperită de pătratele desenate în jurul tuturor punctelor laticiale situate în cercul $K$. Dacă punctele laticiale sînt în număr de $n$, atunci, evident, aria lui $S$ va fi egală cu $n$.

Fie $K_1$ cercul de centru $Q$ și cu raza de lungime $r + \sqrt{\frac{1}{2}}$. Dat fiind că $\sqrt{\frac{1}{2}}$ este cea mai mare distanță dintre punctele unui pătrat cu latura de lungime 1 și centrul lui, obținem ușor că interiorul cercului $K_1$, împreună cu circumferința lui, acoperă pe $S$. Deoarece aria cercului $K_1$ este $\pi\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$, iar aria lui $S$ este $n$, obținem:

$$n \leqslant \pi\left(r+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Analog, deducem că $n$ acoperă interiorul și frontiera cercului de centru $Q$ și cu raza de lungime $r-\frac{1}{\sqrt{2}}$, de unde inegalitatea:

$$\pi\left(r-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \leqslant n.$$

Aceste inegalități ne dau:

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}}-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant r \leqslant \sqrt{\frac{n}{\pi}}+\frac{1}{\sqrt{2}},$$

de unde:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}-\frac{1}{\sqrt{2n}} \leqslant \frac{r}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

deci:

$$\left|\frac{r}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Cînd $n$ tinde către infinit, $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ tinde către zero deci:

$$\left|\frac{r}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right|$$

tinde către zero, deci raportul $\frac{r}{\sqrt{n}}$ tinde către $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

**III. 2.12**[PO]. Fie $n \in \mathbb{N}-\{1, 2\}$ puncte în plan astfel încît oricare trei să fie necolliniare. Să se arate că se poate construi un cerc care să treacă prin cel puțin 3 din cele $n$ puncte și să nu conțină nici un punct din cele $n$ în interior.

**R.** Există două puncte din cele $n$, astfel încît toate celelalte să se afle situate de o singură parte a dreptei determinată de ele (aceasta deoarece oricare trei nu sînt coliniare). Această dreaptă se poate obține în felul următor: mulțimea de puncte fiind finită, există o dreaptă astfel încît toate punctele să se afle într-un semiplan determinat de ea. Această dreaptă o translatăm pînă atinge un punct din mulțime și o rotim în jurul acestui punct pînă trece prin alt punct al mulțimii. Aceste puncte sînt cele căutate, să le notăm cu $A$ și $B$. Considerăm toate unghiurile $AXB$, unde $X$ aparține mulțimii de puncte date; alegem punctul $C$ așa încît $\sphericalangle ACB$ să fie maxim. Vom arăta că cercul care trece prin $A, B, C$ este cel căutat. În adevăr, fie $D$ alt punct din cele $n$. Din felul cum a fost ales $C$, rezultă că:

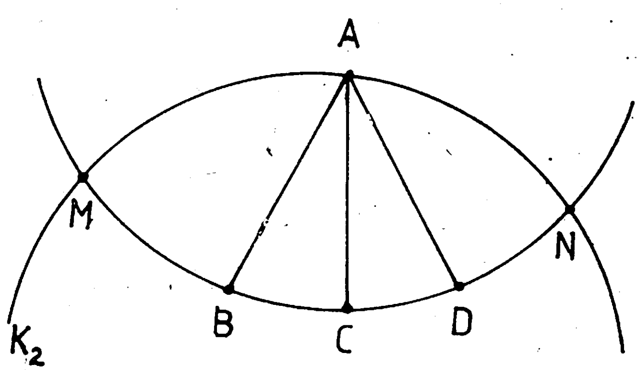
$$m(\widehat{ADB}) \leqslant m(\widehat{ACB}) < 180$$

(deoarece $A, B, C$ sînt necoliniare).

Dacă $D$ s-ar afla în interiorul cercului, măsura unghiului $ADB$ ar fi egală cu $m\left(\widehat{AB} + \frac{1}{2}\,\widehat{xy}\right)$, unde $x$ este punctul de intersecție al lui $AD$ cu cercul și, analog, $y$, deci strict mai mare decît măsura unghiului $ACB$. Deci punctul $D$ se află în exteriorul cercului (sau pe circumferință). Cum punctul $D$ era arbitrar, problema este rezolvată.

**III. 2.13**PO. Fie $n \in \mathbb{N}$ $n \geqslant 3$ și într-un plan $n$ puncte astfel că distanța cea mai mare dintre aceste puncte, dintre cele date, este $d$. Se numesc diametri ai sistemului de puncte date acele segmente de dreaptă care unesc două dintre punctele date și au lungimea $d$.

Să se demonstreze că numărul acestor diametrii nu este mai mare decît $n$.




**R.** Fie $|AB|$, $|AC|$, $|AD|$, trei diametri (dacă există) ai mulțimii de puncte (dacă există) (v. fig. III. 2.13). Rezultă că punctele $B, C, D$ se află pe un cerc $K_1$, de centru $A$ și raza de lungime $d$, iar dacă $C$ este situat între $B$ și $D$, lungimea arcului $\widehat{BD}$ este cel mult egală cu $\frac{\pi}{3}\,d$ (căci altfel segmentul $|BD|$ ar avea lungimea mai mare decît $d$).

Fie $K_2$ cercul cu centrul în $C$ și cu raza de lungime $d$.

Toți diametrii (mulțimi de puncte) ce pleacă din $C$ au a doua extremitate pe arcul $\widehat{MAN}$ al lui $K_2$, situat în interiorul cercului $K_1$. Dar distanța de la $D$ la un punct al arcului $\widehat{MA}$ sau de la $B$ la un punct al arcului $\widehat{AN}$ este mai mare decît $d$, în afară de $|CA| = d$. Deci, dacă dintr-un punct $A$ al mulțimii de puncte pleacă 3 diametri, atunci din cel puțin una din extremitățile lor (diferite de $A$) — $C$, de exemplu—nu poate pleca decît un singur diametru.

S-a dovedit, astfel că, pentru o mulțime de $n$ puncte există doar două posibilități : sau din fiecare punct pornesc cîte doi diametrii sau cel puțin dintr-un punct pornește cel mult un diametru.

Demonstrația afirmației din enunț o facem prin inducție matematică.

Pentru $n = 3$, afirmația este evidentă. Considerăm afirmația valabilă pentru $k \geq 3$ oarecare și fie $M$ o mulțime cu $k + 1$ puncte :

$$\{A_1, A, \ldots, A_{k+1}\}.$$

Dacă dintr-un punct — $A_1$ de exemplu — nu pornește decît cel mult un diametru, atunci numărul diametrilor mulțimii $M$ este deci cel mult egal cu $k + 1$. Dacă nu există însă un asemenea punct, atunci din fiecare punct $A_i (i=1, 2, \ldots k + 1)$ pornesc cîte doi diametrii și deci numărul lor este :

$$2(k + 1) \cdot \frac{1}{2} = k + 1.$$

Se vede că $n$ este un maxim al numărului diametrilor mulțimii celor $n$ puncte căci, pentru $n = 3$, numărul diametrelor poate fi 1, în cazul unui triunghi oarecare (cu laturile de lungimi diferite), 2 (în cazul unui triunghi isoscel) sau 3( în cazul unui triunghi echilateral).

Pentru un $n$ oarecare, numărul maxim este atins, de exemplu, într-un poligon stelat cu $n$ laturi ($n$ impar) sau, dacă $n - 3$ puncte sînt situate pe arcul $BD$(deschis), care are măsura de 60, iar celelalte puncte sînt $A$, $B$, $D$.

**III. 2.14**PO. Fie $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ și fie $n$ puncte în plan, nu toate coliniare. Este posibil ca distanța dintre oricare două să fie un număr întreg?

**R.** Fie $d$ o dreaptă în plan și $A_2, \ldots, A_n$ puncte pe dreapta $d$, $A_1 \notin d$, $|A_1A_2| \perp d$. Ideea este de a găsi o valoare pentru $|A_1A_2|$ astfel ca mărimea acestui segment să formeze numere pitagorice cu mărimea segmentelor $A_1A_j$, $A_2A_j$; $j=\overline{3, n}$ (este vorba de numere întregi). Fie :

$$|A_2A_j| = a_j^2 - b_j^2$$

cu $a_j b_j \in \mathbb{N}$; trebuie ca :

$$|A_1A_2| = 2a_jb_j$$

să fie constant pentru orice $j \in \overline{3, n}$. Luînd :

$$|A_1A_2| = 2^n = 2 \cdot 2^{n-j+1} \cdot 2^{j-2}, \ (\forall)\ j \in \overline{3, n}$$

găsim :

$$a_j = 2^{n-j+1}; \ b_j = 2^{j-1}$$

deci $|A_1A_j| = a_j^2 + b_j^2$.

**III. 2.15**[PO]**.** Fie $n \in \mathbb{N}^*$. În general, $n$ cercuri mari ale unei sfere se intersectează două cîte două în $n(n-1)$ puncte. Să se găsească un mod de a numerota aceste puncte cu $1, 2, \ldots, n(n-1)$, astfel încît suma numerelor corespunzătoare punctelor situate pe un cerc să fie aceeaşi pentru fiecare cerc mare.

**R.** Să numerotăm în mod arbitrar (de exemplu cu $b$) un punct de intersecţie ales la întîmplare şi să numerotăm punctul diametral opus cu „complementarul" lui $b$, $n(n-1)+1-b$. Să constinuăm această operaţie pînă cînd toate numerele (deci şi toate punctele) au fost epuizate. Pe fiecare cerc mare se găsesc $n-1$ perechi de puncte de intersecţie diametral opuse; suma numerelor corespunzătoare a acestor puncte este:

$$[n(n-1)+1]\,(n-1).$$

**III. 2.16**[PO]**.** Să se arate că pentru orice $m \geqslant 3$ există un întreg pozitiv $N_m$ minimal relativ la proprietatea următoare: pentru toate numerele întregi $n \geqslant N_m$ dacă $n$ puncte din plan nu conţin trei puncte coliniare, atunci $m$ dintre ele sînt vîrfurile unui poligon convex.

**R.** Mai întîi vom arăta că dacă cinci puncte din plan nu conţin trei puncte coliniare, atunci patru dintre acestea sînt vîrfurile unui patrulater convex.

În adevăr, cele cinci puncte definesc $C_5^2 = 10$ segmente de dreaptă care se unesc două cîte două şi perimetrul acestei configuraţii este un poligon convex. Dacă acest poligon convex este un patrulater sau pentagon, proprietatea este imediată, deoarece în cazul unui pentagon convex, patru dintre vîrfurile sale formează un patrulater convex. În caz contrar, poligonul convex este triunghi, şi deci, două dintre cele cinci puncte sînt în interiorul triunghiului.

Cele două puncte interioare definesc o dreaptă şi două din cele trei vîrfuri ale triunghiului sînt situate de aceeaşi parte a acestei drepte. În acest caz, cele două puncte interioare împreună cu cele două vîrfuri ale triunghiului, situate de aceeaşi parte a dreptei formează un patrulater convex şi proprietatea este demonstrată. Cele $m$ puncte definesc $\frac{m(m-1)}{2}$ segmente de dreaptă care le unesc două cîte două iar perimetrul acestei configuraţii este un poligon convex cu $q$ vîrfuri. Vom arăta că $m = q$. Să alegem un sens de parcurgere a acestui poligon convex şi să notăm vîrfurile întîlnite cu $V_1, V_2, \ldots, V_q$. Dacă unul dintre punctele alese se găsesc în interiorul acestui poligon convex, el trebuie să se găsească în interiorul unuia dintre triunghiurile $V_1V_2V_3, \ldots, V_1V_{q-1}V_q$, ceea ce contrazice afirmaţia că orice mulţime formată din patru puncte—oricare trei necoliniare—defineşte un patrulater convex.

Rămîne că $m = q$ şi cele $m$ puncte sînt vîrfurile unui patrulater convex.

**III. 2.17**[PO]**.** Dacă $n+1$ puncte în plan au proprietatea că din oricare cinci se pot alege 4 conciclice, să se demonstreze că $n$ din cele $n+1$ puncte se află pe acelaşi cerc.

**R.** Vom demonstra mai întîi afirmaţia pentru $n = 5$. Fie cele 6 puncte numerotate $A_1, \ldots, A_6$ şi fie $A_1, A_2, A_3, A_4$ pe acelaşi cerc şi $A_5 \notin C$. Dacă $A_6 \notin C$, atunci $A_1, A_2, A_5, A_6$ sînt situate pe circumferinţa unui cerc $C_1$ şi

$A_2, A_3, A_5, A_6$ sînt situate pe circumferința unui cerc $C_2$. De aici rezultă că $A_2, A_5, A_6$ se găsesc pe circumferințele cercurilor $C_1$ și $C_2$, deci $C_1 \equiv C_2$. De aici, cum $A_1, A_2, A_3, \in C$ și $A_1, A_2, A_3 \in C_1 \equiv C_2$, rezultă $C \equiv C_1 \equiv C_2$, adică $A_5, A_6 \in C$, contrar ipotezei. Deci presupunerea $A_5 \notin C$ este falsă. Pentru $n > 5$ raționăm analog, luînd $A_1, A_2, A_3, A_4 \in C$ și $A_5 \notin C$ și considerînd apoi punctele $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, pentru $k > 5$.

**III. 2.18**[PO]. Fie $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ și fie $M$ o mulțime formată din $n$ puncte în plan astfel încît pentru orice 3 puncte din $M$, există în plan un cerc de rază 1 care le conține.

Să se demonstreze că există un cerc de rază 1 care conține toate punctele lui $M$.

**R.** Faptul că o mulțime de puncte este conținută într-un cerc de rază 1, este echivalent cu faptul că cercurile cu centrele în punctele respective și de rază 1 au intersecția nevidă. Să arătăm că, fiind date $n$ cercuri în plan, cu proprietatea că oricare trei au intersecția nevidă, atunci toate cercurile au un punct comun.

Fie $m$ numărul maxim de cercuri cu intersecția nevidă și, evident $n \geqslant 3$. Să notăm cu $A_1, \ldots, A_m$ cercurile respective și cu $G$ intersecția lor.

Să presupunem că $m < n$, adică există un cerc $A$ astfel ca $A \cap G = \Phi$. Există atunci o dreaptă $d$ care separă discul $A$ de regiunea $G$, adică $d \cap A = \Phi$, $d \cap G = \Phi$ și $d$ intersectează orice segment determinat de un punct din $G$ și unul din $A$. Există $i$ și $j$ cu $i, j \in \overline{1, m}$ astfel încît:

$$(A_i \cap d) \cap (A_j \cap d) = \Phi.$$

Astfel ar rezulta că:

$$(A_1 \cap d) \cap (A_2 \cap d) \cap \ldots \cap (A_m \cap d) \neq \Phi$$

adică $d \cap G \neq 0$ ceea ce este fals.

Conform ipotezei:

$$A \cap A_i \cap A_j \neq \Phi.$$

Fie $X$ un punct din $A \cap A_j \cap A_i$ și $Y$ un punct din $G$, iar $|XY|$ segmentul determinat de ele. Obținem:

$$|XY| \cap d \neq \Phi.$$

Fie $Z = |XY| \cap d$, deci $|XY| \subset A_i$, și, analog, $|XY| \subset A_j$, deci $Z \in A_i \cap A_j$. Dar $Z \in d$ implică $Z \in (A_i \cap d) \cap (A_j \cap d)$, ceea ce este fals.

Deci, presupunerea făcută este falsă și, în definitiv, $m = n$.

Rezultă de aici că toate cercurile au intersecția nevidă și deci există un cerc de rază 1 care conține toate punctele.

**III. 2.19**[PO]. Fie un număr finit de semispații (se numește semispații, partea din spațiu situată de o parte a unui plan), care umplu întregul spațiu. Să se demonstreze că dintre ele se pot extrage cel mult patru care umplu intergul spațiu.

**R.** Să examinăm succesiv următoarele probleme.

A°). Dreapta este acoperită cu un număr finit de semidrepte. Atunci se pot extrage două dintre ele care să acopere întreaga dreaptă.

În adevăr, fie $A$ vîrful cel mai din dreapta al tuturor semidreptelor orientate în stînga iar $B$ vîrful cel mai din stînga al tuturor semidreptelor orientate în dreapta. Deoarece semidreptele acoperă, prin ipoteză, întreaga dreaptă, punctul $B$ nu se află în dreapta lui $A$ şi cele două semidrepte cu capetele în $A$ şi $B$ acoperă complet întreaga dreaptă.

B°). Întregul plan este acoperit cu un număr finit $n$ de semiplane (se numeşte semiplan, partea din plan situată de o parte a unei drepte). Atunci dintre ele pot fi alese două sau trei semiplane care acoperă întregul plan.

Vom face demonstraţia cu ajutorul inducţie după numărul $n$ al semiplanelor.

Pentru $n = 3$, afirmaţia este evidentă. Să presupunem că afirmaţia noastră este valabilă pentru $n$ semiplane şi fie date $n + 1$ semiplane.

$$F_1, F_2, \ldots, F_n, F_{n+1}$$

care acoperă întregul plan. Să notăm marginile acestor semiplane, respectiv cu :

$$l_1, l_2, \ldots, l_n, l_{n+1}.$$

Sînt posibile două cazuri :

I°). Dreapta $l_{n+1}$ este conţinută în întregime într-unul dintre semiplanele date, să zicem în $F_n$. Atunci dreptele $l_n$ şi $l_{n+1}$ sînt paralele. Dacă semiplanele $F_n$ şi $F_{n+1}$ sînt situate de părţi diferite ale frontierelor sale, atunci cele două semiplane $F_n$ şi $F_{n+1}$ acoperă întregul plan. În caz contrar, unul dintre aceste două semiplane este conţinut în întregime în cel de-al doilea (de exemplu $F_{n+1}$ este conţinut în $F_n$; şi afirmaţia rezultă din ipoteza inductivă, deoarece în acest caz cele $n$ semiplane (în cazul nostru $F_1, F_2, \ldots$ $\ldots, F_n$) acoperă întregul plan.

II°) Dreapta $l_{n+1}$ nu este conţinută în nici unul dintre semiplanele $F_1$, $F_2, \ldots, F_n$. Atunci ea este acoperită în întregime de aceste semiplane, care taie pe ea $m \leqslant n$ semidrepte care acoperă întreaga dreaptă.

După cum am văzut la punctul A°), din aceste semidrepte se pot alege două care acoperă întreaga dreaptă.

Fie $F_{n-1}$ şi $F_n$ semiplanele respective. Să examinăm acum separat cele două cazuri posibile de aşezare reciprocă a semiplanelor $F_{n-1}$, $F_n$ şi $F_{n+1}$.

a°). Semiplanul $F_{n-1}$ conţine punctul de intersecţie al dreptelor $l_{n-1}$ şi $l_n$. În acest caz cele trei semiplane $F_{n-1}$, $F_n$ şi $F_{n+1}$ acoperă întregul plan.

b°). Semiplanul $F_{n+1}$ nu conţine punctul de intersecţie al dreptelor $l_{n-1}$ şi $l_n$. În acest caz, planul este acoperit de $n$ semiplane $F_1, F_2, \ldots F_n$ şi afirmaţia rezultă din ipoteza inductivă.

Să trecem acum la demonstraţia problemei propriu zise. Vom face demonstraţia prin inducţie după numărul $n$ al semispaţiilor date.

Pentru $n = 4$, afirmaţia este evidentă.

Să presupunem că afirmaţia este valabilă pentru $n$ semispaţii şi fie date $n + 1$ semispaţii :

$$v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}.$$

Frontierele acestor semispaţii le vom nota respectiv cu :

$$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \pi_{n+1}.$$

Sînt posibile două cazuri:

1°). Planul $\pi_{n+1}$ este în întregime conținut într-unul din semispațiile $v_1, v_2, \ldots, v_n$, și de exemplu să zicem în $v_n$.

În acest caz, planele $\pi_{n+1}$ și $\pi_n$ sînt paralele. Dacă semispațiile $v_{n+1}$ și $v_n$ sînt situate de părți diferite ale frontierelor sale, aceste două semispații acoperă deja întregul spațiu. În caz contrar, unul dintre cele două semispații $v_{n+1}$ și $v_n$ este conținut în întregime în celălalt și teorema rezultă din ipoteza inductivă.

2°). Planul $\pi_{n+1}$ nu este conținut în nici unul dintre semispațiile $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Atunci el este acoperit în întregime de aceste semispații care taie pe el $m \leqslant n$ semiplane $F_1, F_2, \ldots F_n$.

În virtutea rezultatului B°), dintre aceste semiplane se pot alege două sau trei care acoperă și ele întregul plan. Să examinăm separat fiecare din cazurile posibile.

a°). Planul $\pi_{n+1}$ este acoperit de două semiplane să zicem $F_1$ și $F_2$, planele respective $\pi_1$, și $\pi_2$ fiind paralele. În acest caz, întregul spațiu este acoperit de două semispații $v_1$ și $v_2$.

b°). Planul $\pi_{n+1}$ este acoperit de două semiplane $F_1$ și $F_2$, însă planele respective $\pi_1$ și $\pi_2$ se intersectează. Dacă semispațiul $v_{n+1}$ conține linia de intersecție a planelor $\pi_1$ și $\pi_2$, atunci trei semispații $v_1$ $v_2$ și $v_{n+1}$ umplu întregul spațiu. În caz contrar semispațiul $v_{n+1}$ este acoperit de semispațiile $v_1$ și $v_2$ și teorema rezultă din ipoteza inductivă.

c°). Planul $\pi_{n+1}$ este acoperit de trei seimplane, să zicem $F_1$, $F_2$, și $F_3$, planul $\pi_3$ fiind paralel cu linia de intersecție a planelor $\pi_1$ și $\pi_2$ (planele respective formează o „prismă". În acest caz, cele trei semispații $v_1$, $v_2$, și $v_3$ acoperă întregul spațiu.

d°). Planul $\pi_{n+1}$ este acoperit de trei semiplane $F_1$, $F_2$ și $F_3$, iar planul $\pi_3$ nu este paralel cu linia de intersecție a lui $\pi_1$ și $\pi_2$ (planele respective formează o „piramidă").

Dacă semispațiul $v_{n+1}$ conține punctul de intersecție al planelor $F_1$, $F_2$ și $F_3$, atunci patru semispații $v_1$, $v_2$, $v_3$ și $v_{n+1}$ umplu întregul spațiu; în caz contrar semispațiul $v_{n+1}$ este acoperit de semispațiile $v_1$, $v_2$, $v_3$ și teorema rezultă din ipoteza inductivă.

**III. 2.20**[PO]**.** În spațiu se dau $n$ sfere, $n \in \mathbb{N}$, patru cîte patru secante. Să se demonstreze că toate aceste sfere au cel puțin un punct comun.

**R.** Vom face demonstrația prin inducție. Pentru $n = 4$, afirmația este evidentă. Să presupunem afirmația adevărată pentru $n$ sfere oarecare și fie date $n + 1$ sfere:

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n, \Phi_{n+1}.$$

Să notăm cu $\Phi$ intersecția a $n$ sfere:

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_n$$

(existentă, în virtutea ipotezei inductive).

Dacă sfera $\Phi_{n+1}$ nu se intersectează cu $\Phi$, există un plan $\pi$ care le separă.

Figurile după care fiecare dintre sferele $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ intersectează planul $\pi$, sînt cercuri astfel încît trei oarecare dintre ele se intersectează; prin urmare, în planul $\pi$ există un punct aparținînd tuturor acestor cercuri, și, prin urmare, aparținînd lui $\Phi$, ceea ce contrazice definiția planului $\pi$.

**III.2.21$^{PO}$.** Se consideră în plan $2n+3$ puncte, $n \geq 1$, astfel încît oricare trei să fie necoliniare, şi oricare 4 neconciclice.

Se poate duce un cerc prin trei din aceste puncte care să lase $n$ puncte în afară şi $n$ puncte în interior?

**R.** Luăm o dreaptă ce trece prin două din cele $2n+3$ puncte şi care lasă toate celelalte $2n+1$ puncte de aceeaşi parte. Acest lucru este evident posibil, întrucît oricare trei puncte sînt necoliniare şi, încă, luînd cele $C_n^2$ drepte determinate de cele $n$ puncte, putem considera încă una care lasă toate punctele de aceeaşi parte şi o deplasăm pînă cînd întîlneşte două puncte ale mulţimii (adică o translatăm pînă cînd întîlneşte un punct şi o rotim pînă cînd întîlneşte un al doilea).

Fie $B$ şi $C$ cele două puncte şi $A_1, A_2, \ldots A_{2n+1}$ celelalte, numerotate astfel încît:

$$m(\widehat{BA_1C}) < m(\widehat{BA_2C}) < \ldots < m(\widehat{BA_{2n+1}C})$$

(nu putem avea $m(\widehat{BA_iC}) = m(\widehat{BA_jC})$, $i \neq j$, întrucît ar însemna că cele patru puncte sînt conciclice contrar ipotezei.

Considerăm cercul determinat de punctele $A_{n+1}$, $B$ şi $C$. El va lăsa punctele $A_1, \ldots, A_n$ în afară şi va conţine punctele $A_{n+1}, \ldots, A_{2n+1}$ în interior.

**III. 2.22$^{PO}$.** Se dau în plan 5 puncte astfel încît oricare trei nu sînt coliniare. Fiecare două puncte se unesc între ele fie printr-o linie roşie, fie printr-o linie albastră, astfel încît nici un triplet de astfel de linii să nu formeze un triunghi monocolor.

Să se arate că:

a) Din fiecare punct pleacă cel mult două linii roşii şi două albastre;

b) Segmentele roşii reprezintă o linie poligonală închisă care conţine toate cele cinci puncte şi această proprietate este valabilă şi pentru segmentele albastre.

**R.** a.). Notăm punctele date cu $A, B, C, D, E$ şi presupunem că din $A$ pleacă trei linii roşii. Fie, de exemplu, segmentele $|AB|$, $|AC|$, $|AD|$. Atunci, potrivit enunţului, segmentele $|BC|$, $|BD|$, $|CD|$, trebuie să fie albastre, şi, prin urmare, triunghiul $BDC$ devine albastru, contrar ipotezei.

b) Observăm că din fiecare punct pleacă exact două linii de fiecare culoare. Deoarece, dacă ar pleca mai puţin de două linii roşii, ar pleca mai mult de două linii albastre. Considerăm liniile de culoare roşie. Punctul $A$ este unit cu două puncte $B$ şi $C$. Punctul $B$ nu poate fi unit cu $C$, deci $B$ este unit cu $D$; punctul $C$ nu poate fi unit cu $D$, deoarece cel puţin din unul din punctele $A, B, C, D$ ar pleca mai mult de trei drepte, deci $C$ este unit cu $E$. Analog pentru $B$.

**III. 2.23$^{PO}$.** Fie o reţea $R_1$ în plan ale cărei vîrfuri le notăm $A_i$, $i \in \overline{1, n}$, cu următoarele proprietăţi;

1) Dacă segmentul $|A_iA_j|$ $(i \neq j)$ aparţine reţelei atunci oricare ar fi $k \neq i$, $k \neq j$, $|A_kA_i| \in R_1$ implică $|A_kA_j| \notin R_1$;

2). Dacă $|A_iA_j| \in R_1$, atunci există exact doi indici $k, l$ diferiţi de $i, j$ astfel încît:

$$|A_kA_i| \in R_1, \ |A_kA_j| \notin R_1, \ |A_lA_i| \in R_1 \text{ şi } |A_lA_j| \notin R_1.$$

Să se demonstreze în aceste condiţii că din orice punct al reţelei pleacă acelaşi număr de segmente.

**R.** Fie $A_i$ şi $A_j$ două puncte distincte ale reţelei, astfel încît:

$$|A_iA_j| \subset R_1.$$

Fie $A_k$ un punct astfel încît $|A_kA_i| \subset R_1$. Conform proprietăţii 1), avem $|A_kA_j| \subset R_1$. Conform proprietăţii 2), există exact un $A_l$, cu $l \neq i$, astfel încît $|A_lA_j| \subset R_1$. Am obţinut astfel că numărul segmentelor care pleacă din $A_i$ este mai mare decît acela al segmentelor care pleacă din $A_i$. Analog se arată şi inegalitatea inversă înlocuind în raţionamentul anterior pe $i$ cu $j$.

Să presupunem că $|A_iA_j| \not\subset R_1$. Atunci există $k$, astfel încît $|A_iA_k| \subset R_1$ şi $|A_kA_j| \subset R_1$. Conform celor demonstrate mai sus, numărul segmentelor care pleacă din $A_k$, la rîndul său egal cu numărul segmentelor ce pleacă din $A_j$.

**III. 2.24**$^{PO}$. Dacă se elimină în mod arbitrar două pătrate de culori opuse de pe tabla de şah, poate fi acoperit restul tablei cu dreptunghiuri $1 \times 2$?

**R.** Răspunsul este afirmativ. Să stabilim pe tabla de şah un drum închis cu lăţimea egală cu latura unui pătrat, care să acopere toată tabla şi care să nu se intersecteze niciodată cu sine însuşi.

Să observăm că, de-a lungul drumului, culorile pătratelor alternează. Eliminarea a două pătrate de culori diferite va tăia drumul în alte două drumuri, care nu vor mai fi închise (sau în unul singur, dacă cele două pătrate sînt adiacente de-a lungul drumului).

Fiecare segment conţine un număr par de pătrate şi deci poate fi acoperit cu dreptunghiuri, rezultă că în acest mod poate fi acoperită întreaga suprafaţă dată.

**III.2.25**$^{PO}$. Fie $n$ puncte în plan cu proprietatea că distanţa dintre oricare două este mai mare ca 1. Să se arate că raza oricărui cerc care conţine toate aceste puncte este mai mare decît $\frac{\sqrt{n}-1}{2}$. Să se generalizeze afirmaţia pentru cazul spaţiului.

**R.** Fie $S$ un cerc cu raza de lungime $R$ care conţine toate punctele în interior. Dacă considerăm cercurile cu raza de lungime $\frac{1}{2}$, cu centrele în punctele date, atunci aceste cercuri vor fi disjuncte şi cuprinse în cercul $L$ concentric cu $S$ şi cu raza de lungime $R + 1$.

Scriind că suma ariilor cercurilor este strict mai mică decît aria cercului $L$, obţinem :

$$\frac{n\pi}{4} < \pi\left(R + \frac{1}{2}\right)^2$$

de unde :

$$R > \frac{\sqrt{n} - 1}{2}.$$

Pentru spaţiu problema are următorul enunţ : fie $n$ puncte în spaţiu cu proprietatea că distanţa dintre oricare două este mai mare ca 1. Să se arate că raza oricărei sfere care le conţine pe toate în interior este strict mai mare decît $\frac{\sqrt[3]{n} - 1}{2}$.

Demonstraţia este analoagă celei de mai sus, înlocuind cercurile cu sferele.

**III.2.26**[PO]. Fie $n \in \mathbb{N} - \{1,2\}$. Într-un plan sînt date $n$ puncte care nu sînt situate toate pe aceeaşi dreaptă. Să se demonstreze că printre dreptele care unesc toate perechile posibile de astfel de puncte vor exista cel puţin $n$ drepte diferite.

**R.** Vom demonstra enunţul folosind metoda inducţiei matematice. Dacă $n = 3$, afirmaţia din enunţ este evidentă, trei puncte care nu se află pe o aceeaşi dreaptă pot fi unite, două cîte două prin trei drepte. Vom presupune în continuare că pentru $n$ puncte afirmaţia este adevărată şi vom arăta, că, în acest caz, ea este adevărată şi pentru $n + 1$ puncte.

Vom considera toate dreptele care unesc două cîte două cele $n + 1$ puncte. Cel puţin pe una dintre aceste drepte trebuie să fie situate numai două puncte $A_n$ şi $A_{n+1}$ din mulţimea noastră (în caz contrar, toate cele $n + 1$ puncte să se afle pe o aceeaşi dreaptă). Vom suprima acum punctul $A_{n+1}$. Dacă celelalte $n$ puncte $A_1, A_2, \ldots, A_n$, sînt situate pe o aceeaşi dreaptă, numărul total de drepte, evident, va fi egal cu $n+1$; acestea vor fi cele $n$ drepte care unesc punctul $A_{n+1}$ cu punctele $A_1, \ldots, A_n$, împreună cu dreapta pe care sînt situate aceste ultime $n$ puncte. Dacă însă cele $n$ puncte $A_1, \ldots, A_n$ nu se află pe o aceeaşi dreaptă, atunci, conform principiului inducţiei, printre dreptele care unesc două cîte două punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$, vor exista cel puţin $n$ drepte diferite. Vom adăuga acum, aici, toate dreptele care unesc punctul $A_{n+1}$ cu punctele $A_1, \ldots, A_n$. Deoarece pe dreapta $A_nA_{n+1}$ nu se află nici unul dintre punctele $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, această dreaptă, în orice caz, nu se află printre dreptele care unesc două cîte două punctele $A_1, \ldots, A_n$. Astfel, am adăugat cel puţin o nouă dreaptă şi deci, după această adăugare, numărul dreptelor diferite a devenit cel puţin egal cu $n + 1$.

Conform principiului inducției matematice complete, afirmația din enunț este demonstrată.

**III.2.27$^{PO}$.** Presupunem planul împărțit în benzi paralele, fiecare bandă avînd lățimea 1.–

Să se arate că nu este posibil să se așeze în fiecare bandă cîte un disc cu diametrul de lungime 1 în așa fel încît după așezare, orice dreaptă din plan să nu întîlnească mai mult de două discuri.

**R.** Dacă o asemenea așezare a discurilor în întreg planul ar fi posibilă, atunci am avea implicit și o soluție a problemei pentru un semiplan. Să arătăm că acest lucru nu este posibil.

Să considerăm un sistem de axe rectangulare $Ox$ și $POy$ și să împărțim semiplanul $x > 0$ în benzi paralele cu axa $Oy$, de lărgimea 1. Dreptele care separă benzile sînt dreptele:

$$x = 0,\ x = 1,\ x = 2, \ldots$$

Să presupunem că discurile sînt așezate în aceste benzi, așa cum cere problema și să notăm cu $C_i$ discul din banda $i$, adică din banda mărginită de dreptele $x = i - 1$ și $x = i$ și cu $O_i$ centrul acestui disc. Vom arăta că presupunerea că nici o dreaptă din plan nu întîlnește trei din aceste discuri, conduce la o absurditate, și anume la faptul că suma:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

care este infinită, ar fi de fapt finită (sau altfel spus, absurdul va rezulta din convergența seriei armonice).

Pentru aceasta vom arăta întîi că toate discurile $C_i$ $(i = 1,2,3,\ldots)$ sînt situate în interiorul unui unghi cu vîrful în $O_1$ și care are măsura mai mică ca 180.

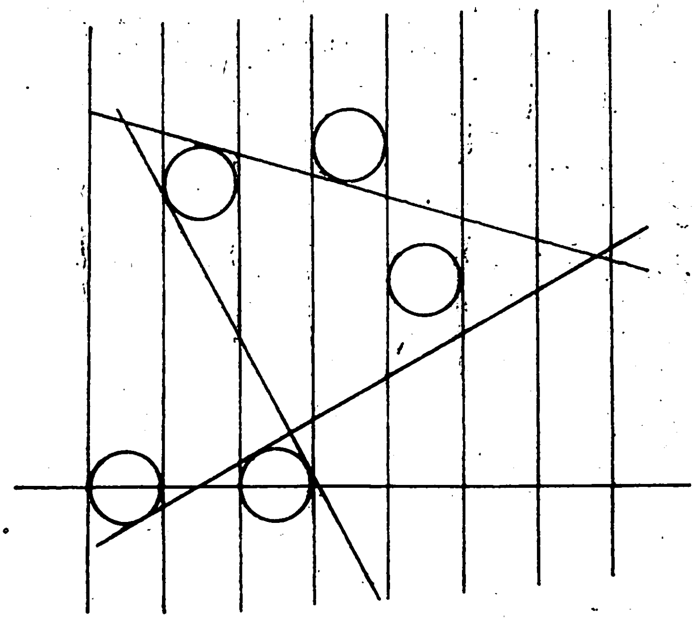
Putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că $O_1$, este situat chiar pe axa $Ox$ (în caz contrar facem o translație a originii în direcția dată de benzile paralele) și că $O_2$ nu mai este situat pe această axă deoarece, în caz contrar, $O_3$ nu mai poate fi în nici un caz situat pe această axă.

Atunci în locul semiplanului $x > 0$ vom considera semiplanul $x > 1$, pentru care centrul discului din prima bandă este situat pe $Ox$, dar centrul discului din banda a 2-a nu se mai află pe această axă.

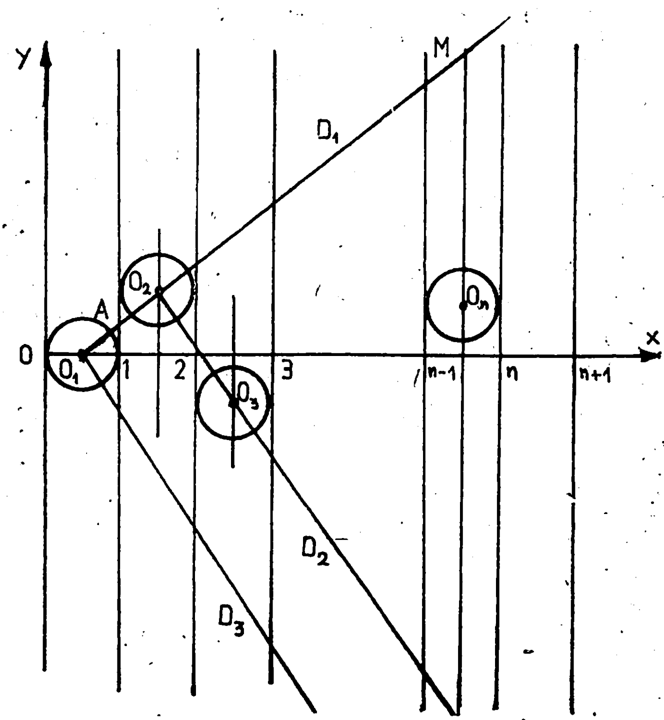
De asemenea, se poate presupune că $O_2$ se găsește deasupra axei $Ox$ ca în figura III.2.27. b.

Să unim pe $O_1$ cu $O_2$, prin semidreapta $D_1$.

În unghiul format de această semidreaptă cu semidreapta $x = 1$ (cu $y \geqslant 0$) nu se mai poate afla nici unul din discurile $C_3$, $C_4$, $C_5$, $\ldots$, căci



a)




b)

dacă unul din aceste discuri, de exemplu discul $C_n$, ar fi situat în interiorul acestui unghi, dreapta care trece prin $O_n$ și prin $A$, intersecția dreptelor $D_1$ și $x = 1$, ar întîlni cel puțin trei discuri și anume discurile $C_1$ și $C_2$ și $C_n$.

Așadar, discurile $C_3, C_4, C_5, \ldots$ se găsesc toate sub semidreapta $D_1$. Să unim acum pe $O_2$ cu $O_3$ prin semidreapta $D_2$ cu extremitatea în $O_2$. Conchidem, la fel ca mai sus, că în unghiul format cu semidreapta $D_2$ cu dreapta $x = 2$ (cu $y \leqslant 0$), nu se poate afla nici unul din discurile $C_3$, $C_4, \ldots$ Toate aceste discuri sînt situate în interiorul unghiului $\theta$ format de $D_1$ și $D_2$ cu vîrful în $O_2$ și cu deschiderea îndreptată spre sensul pozitiv al lui $Ox$. Acest unghi este suma celor două unghiuri $\theta_1$ (format de $D_1$ cu $Ox$) și $\theta_2$ (format de $D_2$ cu $Ox$), amîndouă aceste unghiuri fiind mai mici ca $\frac{\pi}{2}$. Dacă prin $O_1$ ducem paralela $D_3$ la $D_2$, este evident, că unghiul format de semidreptele $D_1$ și $D_3$ și egal cu $\theta$, cuprinde în interiorul lui toate discurile $C_4, C_5, C_6, \ldots$

Această situație a discurilor este însă imposibilă.

În adevăr, să evaluăm unghiul sub care se vede discul $C_n$ din punctul $O_1$.

Prin $O_n$ să ducem paralele la $Oy$ și să notăm cu $M$ și $N_1$ intersecțiile acestei paralele cu laturile unghiului $\theta$ și cu:

$$d = \max\ (|O_1M|;\ |O_1N|).$$

Pentru claritate, să presupunem ca în fig. III.2.27.b:

$$d = \|O_1N_1\|$$

Atunci are loc:

$$d = \frac{n-1}{\cos\theta_2}.$$

Să construim triunghiul $O_1O\,C$, unde $C$ este punctul de contact al unei tangente dusă din $O_1$ la discul $C_n$.

Avem, pentru unghiul $\alpha_n$, sub care se vede discul $C_n$ din $O_1$:

$$\frac{\mathrm{m}(\alpha_n)}{2} > \sin\frac{\alpha_n}{2} > \frac{\|O_nC\|}{\|O_1O_n\|} = \frac{1}{\|O_1O_n\|} \geqslant \frac{1}{d} = \frac{\cos\theta_2}{n-1}$$

adică:

$$m(\alpha_n) \geqslant \frac{2\cos\theta_2}{n-1}.$$

Însă nici unul din unghiurile $\alpha_n$ nu poate trece asupra altuia, căci în acest caz, ar exista o dreaptă (care trece prin $O_1$), care întîlneşte trei discuri.

Pe de altă parte, toate aceste unghiuri fiind cuprinse în unghiul format de semidreptele $D_1$ şi $D_2$, urmează:

$$m(\alpha_4) + m(\alpha_5) + \ldots + m(\alpha_n) < \theta$$

adică

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} < \frac{\theta}{2\cos\theta_2},$$ adică suma $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$

este finită, contradicţie cu faptul că suma este de fapt infinită.

c. 629 — I.P. Informaţia
Str. Brezoianu 23 — 25,
Bucureşti